Министерство образования Республики Беларусь
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Е.А. Ровба, Е.А. Сетько, А.С. Ляликов, К.А. Смотрицкий

Общая информация
Часть I. Теория
Часть II. Задачи
Часть III. Тесты

ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Высшая математика» по экономическим специальностям в высших учебных заведениях Республики Беларусь.

Дата сборки: 27 февраля 2013 г.

Общая информация

Методические указания
Рекомендуемая литература

Методические указания

Запуск ЭУМК
Принцип построения и структура
Рекомендации для преподавателя
Рекомендации для студента

Запуск ЭУМК

ЭУМК поставляется на компакт-диске. Стандартный комплект включает:

- данный файл в формате `pdf`, находящийся в корневом каталоге диска;
- дистрибутив свободно распространяемого программного средства Adobe Reader для чтения файлов в формате `pdf`.

ЭУМК не предъявляет никаких специальных требований к системе. Для работы достаточно компьютера с установленной на нём любой современной операционной системой и программой просмотра файлов формата `pdf`. Для семейства операционных систем MS Windows рекомендуется программа Adobe Reader версии не ниже 9 или Foxit Reader версии не ниже 4.0.

Инсталляция программы Adobe Reader осуществляется стандартным образом. Запустите файл `setup.exe` дистрибутива и следуйте интсрукциям.

УМК можно запустить непосредственно с компакт-диска или скопировать все файлы в каталог на жёстком диске. Для запуска учебника обычно достаточно дважды щёлкнуть левой кнопкой мыши, указав на `pdf`-файл учебника. В случае необходимости можно открыть учебник программным средством, отличным от установленного по умолчанию. Для этого следует выделить файл учебника левой кнопкой мыши и нажать на правую кнопку. В выпавшем контекстном меню можно выбрать требуемое программное средство, например, Adobe Reader.

Принцип построения и структура

ЭУМК состоит из следующих структурных частей:

- методических указаний, содержащих различную методическую и справочную информацию;
- теоретической части с лекционными материалами по курсу;
- практической части с заданиями для практических занятий;
- тестовых заданий для самопроверки.

В левой части экрана расположена панель навигации, содержащая систему вложенных закладок на структурные элементы учебника. Окно с текстом учебника снабжено дополнительными кнопками навигации. Все учебные материалы связаны между собой гиперссылками.

Рекомендации для преподавателя

Лекции
Организация практических занятий
Тесты

Лекции

Несомненным достоинством данного ЭУМК является возможность его использования на лекциях в качестве презентационного материала. Для этого необходимо перейти к странице, которая будет использоваться в качестве начальной в презентации к данной лекции и включить полноэкранный режим с помощью специальной кнопки, комбинации клавиш `Ctrl+L` либо клавиши `F11`. Далее по страницам перемещаются, используя гиперссылки и встроенные в страницы средства навигации.

Целесообразно выдавать данный ЭУМК студентам до начала чтения курса. Можно рекомендовать студентам распечатать лекционные материалы на одной стороне листов бумаги, переплести и использовать полученный альбом в качестве конспекта лекций. При этом чистые стороны листов используются для записи пояснений и дополнений лектора к представленному материалу. Это избавляет студентов от необходимости переписывать содержание презентаций и, в то же время, позволяет зафиксировать комментарии и дополнения лектора.

Эффективное использование ЭУМК для изучения теоретического материала предполагает организацию самостоятельной работы студентов перед лекциями. Следует требовать, чтобы перед лекцией студенты ознакомились с соответствующими статьями ЭУМК.

Организация практических занятий

Для организации практических занятий целесообразно использовать систему задач и упражнений, включённую в ЭУМК.

Задачи и упражнения структурированы по разделам курса. Большинство из них снабжены ответами, а некоторые — решениями или указаниями. Наряду с общематематическими подобраны задачи с экономическим содержанием.

Тесты

Тесты, включённые в данный ЭУМК, предназначены исключительно для самоконтроля студентов и носят вспомогательный характер. Это связано с тем, что в ходе изучения дисциплины студенты должны, прежде всего, научиться логически мыслить. Основное внимание следует уделить построению математических рассуждений и выполнению студентами задач и упражнений. Можно рекомендовать студентам пройти тесты перед экзаменом, зачётом или другим мероприятием по контролю знаний.

Рекомендации для студента

Изучение теоретического материала
Практические занятия
Тесты

Изучение теоретического материала

Перед лекцией изучите материалы ЭУМК, связанные с темой следующей лекции. Будьте готовы к тому, что преподаватель не будет повторять на лекциях материалы, включённые в настоящий ЭУМК. Зафиксируйте вопросы, которые у Вас возникли с тем, чтобы задать их преподавателю. Если лектор до начала чтения курса лекций выдал вам лекционные материалы, распечатайте их на одной стороне листов бумаги, переплетите и используйте полученный альбом в качестве конспекта лекций. При этом чистые стороны листов можно использовать для записи пояснений и дополнений лектора к представленному материалу. Это избавит Вас от необходимости переписывать содержание презентаций и, в то же время, позволит зафиксировать комментарии и дополнения лектора.

Практические занятия

Получите у преподавателя номера задач. Большинство задач снабжены гиперссыками на ответы, некоторая часть — на решения или указания. Прежде, чем смотреть решение, указание или ответ, постарайтесь решить задачу самостоятельно.

Тесты

Тесты, включённые в данный ЭУМК, предназначены для самоконтроля. Пройдите их при подготовке к экзамену, зачёту или другому мероприятию по контролю знаний.

При прохождении тестов с выбором правильного ответа из списка возможных ответов кликните мышкой по квадратику, расположенному рядом с ответом. Зелёная галочка отметит правильный, а красный крестик — неправильный результат.

В поле для ввода числовых данных можно набрать число в формате десятичной дроби, используя точку для отделения дробной части, например, `0.333`. Число можно также представить в виде обыкновенной дроби, например, `1/3`. Введённое Вами число будет сравниваться с правильным результатом. Если они различаются не болеее, чем на 0,001, то ответ засчитывается и помещается в зелёную рамку. Иначе ответ считается неправильным и помещается в красную рамку. Рядом с полем для ввода данных располагается кнопка `*`. Нажав на неё, Вы увидите правильный ответ.

Некоторые тесты содержат поля для ввода текстовых данных. Чтобы такой тест был засчитан, введённый Вами текст должен с точностью до регистра совпадать с правильным текстом. Если, например, ответом к задаче является бесконечность, наберите текст `inf` (от английского слова «infinity»).

Тесты, подразумевающие цепочку последовательных вычислений, снабжаются решениями, содержащими несколько полей для ввода данных. Чтобы пройти такой тест, последовательно заполняйте его поля в порядке их следования.

Рекомендуемая литература

[1] *Баврин, И.И.* Высшая математика / И.И. Баврин, В.И. Матросов. — М.: Владос, 2002.

[2] *Булдык, Г.М.* Высшая математика: курс лекций / Г.М. Булдык. — Минск: ФУАинформ, 2010. — 544 с.

[3] Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер [и др.]. — 3-е изд. — М.: Юнити, 2008. — 479 с.

[4] Высшая математика. Общий курс / А.И. Яблонский [и др.]; под общ. ред. С.А. Самаля. — 2-е изд. — Минск: Вышэйшая школа, 2000.

[5] *Гусак, А.А.* Высшая математика: в 2 т. / А.А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2004. — 2 т.

[6] *Гусак, А.А.* Задачи и упражнения по высшей математике / А.А. Гусак. — Минск: Вышэйшая школа, 1990.

[7] *Гусак, А.А.* Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. — Минск: ТетраСистемс, 2004.

[8] *Данко, П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. — М.: Издательский дом «Оникс 21 век»: Мир и образование, 2002. — 2 ч.

[9] *Дураков, Б.К.* Краткий курс высшей алгебры / Б.К. Дураков. — М.: Физматлит, 2006.

[10] *Жевняк, Р.М.* Высшая математика / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. — Минск: Высшая школа, 1992.

[11] *Карасев, А.И.* Курс высшей математики для экономических вузов / А.И. Карасев, З.М. Аксютин, Т.Н. Савельев. — Минск: Высшая школа, 1982.

[12] *Комалев, В.А.* Математическая экономика / В.А. Комалев. — Минск: ЮНИТИ, 1998.

[13] *Красс, М.С.* Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. — М.: Дело, 2005.

[14] *Кузнецов, А.В.* Высшая математика. Общий курс / А.В. Кузнецов, Л.Ф. Янчук. — Минск: Вышэйшая школа, 1993.

[15] *Курош, А.Г.* Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. — М.: Наука, 1968.

[16] Курс вышэйшай матэматыкі. Алгебра і геаметрыя. Аналіз функцый адной зменнай / В.М. Русак [і інш.]. — Мінск: Вышэйшая школа, 1994. — 431 с.

[17] Курс вышэйшай матэматыкі. Функцыі некалькіх зменных. Интэгральнае злічэнне. Шэрагі / В.М. Русак [і інш.]. — Мінск: Вышэйшая школа, 1997.

[18] *Малыхин, В.И.* Математика в экономике / В.И. Малыхин. — М.: ИНФРА, 2001.

[19] *Минорский, В.П.* Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. — М.: Физматлит, 2001.

[20] *Минюк, С.А.* Высшая математика / С.А. Минюк, Е.А. Ровба. — 3-е изд. — Гродно: ГрГУ, 2004. — 407 с.

[21] *Минюк, С.А.* Высшая математика для экономистов: в 2 т. / С.А. Минюк, С.А. Самаль, Л.И. Шевченко. — Минск: Элайда, 2003. — 2 т.

[22] *Минюк, С.А.* Математические методы и модели в экономике / С.А. Минюк, Е.А. Ровба, К.К. Кузьмич. — Минск: Тетра Системс, 2002.

[23] *Письменный, Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. / Д.Т. Письменный. — М.: Айрис-пресс, 2004. — 2 ч.

[24] *Размыслович, Г.П.* Сборник задач по геометрии и алгебре / Г.П. Размыслович, М.М. Феденя, В.М. Ширяев. — Минск: Университетское, 1999.

[25] Сборник задач по высшей математике: в 2 ч. / К.Н. Лунгу [и др.]. — 3-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2004. — Ч. 1. — 576 с.

[26] Сборник задач по высшей математике для экономистов / под ред. В.И. Ермакова. — М.: ИНФРА-М, 2002. — 575 с.

[27] *Солодовников, А.С.* Математика в экономике: в 2 ч. / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов. — М.: Финансы и статистика, 2000. — Ч. 2.

[28] *Сухая, Т.А.* Сборник задач по высшей математике: в 2 ч. / Т.А. Сухая, В.Ф. Бубнов. — Минск: Высшая школа, 1993. — 2 ч.

[29] *Шипачёв, В.С.* Высшая математика / В.С. Шипачёв. — М.: Высшая школа, 2003.

[30] *Шипачёв, В.С.* Задачник по высшей математике / В.С. Шипачёв. — М.: Высшая школа, 2004. — 304 с.

[31] *Шувалова, Э.З.* Повторим математику / Э.З. Шувалова, В.Т. Агафонов, Т.И. Богатырёв. — М.: Высшая школа, 1969. — 464 с.

[32] Сборник задач и упражнений по высшей математике. Общий курс / под общ. ред. А.В. Кузнецова. — Минск: Высшая школа, 1994.

Часть I

Теория

Предисловие
Введение
Глава 1. Линейная алгебра
Глава 2. Аналитическая геометрия
Глава 3. Предел последовательности и функции
Глава 4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной
Глава 5. Теория интегрирования
Глава 6. Дифференцирование функций двух переменных
Глава 7. Дифференциальные уравнения
Глава 8. Ряды
Предметный указатель
Список основных сокращений
Определения
Доказательства теорем

Предисловие

Поступая в высшие учебные заведения на экономические специальности, абитуриенты часто недооценивают значение математических методов в экономической науке. Читаемый на первом году обучения курс высшей математики лежит в основе подготовки специалистов в области экономики и закладывает фундамент, необходимый для построения основных экономических дисциплин, а также ориентированных на экономические приложения математических дисциплин, изучаемых на старших курсах.

Данная книга является теоретической частью комплекса по дисциплине «Высшая математика» для студентов экономических специальностей. Комплекс включает также задачник для практических занятий и самостоятельной работы студентов. Обе части неразрывно связаны между собой и подготовлены одним и тем же коллективом авторов на основе многолетнего опыта чтения лекций и проведения семинарских занятий по высшей математике.

Материал комплекса содержит следующие темы, оформленные в виде глав:

1) аналитическая геометрия, где рассматриваются декартова система координат, прямая на плоскости, кривые второго порядка;
2) предел последовательности и функции, где вводятся и подвергаются исследованию фундаментальные для математического анализа понятия предела и непрерывности;
3) теория дифференцирования, где даётся понятие производной функции;
4) теория интегрирования, посвящённая исследованию и приложениям неопределённого, определённого и несобственного интегралов;
5) дифференцирование функций двух переменных, где выводится обобщение понятия производной на случай функций двух переменных;

6) теория дифференциальных уравнений, содержащая материал по различным видам уравнений первого порядка, а также линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами и методам их решения;

7) теория рядов, развивающая идеи сходимости, заложенные при рассмотрении теории пределов, и дающая представление о числовых и функциональных рядах, разложении функций в степенные ряды;

8) линейная алгебра, включающая теорию матриц, определителей и систем линейных уравнений, а также вопросы векторной алгебры.

Теоретический материал сопровождается решениями задач основных типов.

В предлагаемом учебном пособии большое внимание уделено экономическим приложениям рассматриваемых математических методов, что естественным образом дополняет изучаемые в дальнейшем курсы математического программирования, методов математического моделирования, экономической теории, микроэкономики. Даются приложения функциональной зависимости в экономике. При этом рассматриваются функции не только одной переменной (например, функции спроса и предложения), но и многих переменных (функция полезности и производственная функция Кобба — Дугласа). В пособии читатель может ознакомиться с применением производной и интеграла в экономике, задачей о непрерывном начислении процентов, свойствами экстремума выпуклых функций, макромоделью Домара, моделью Леонтьева межотраслевого баланса. Авторы надеются, что подробное рассмотрение широкого класса экономических приложений усилит мотивацию изучения высшей математики, повысит интерес к этой дисциплине, научит строить математические модели, применять их для исследования реальных экономических процессов и решения профессиональных задач.

Каждая глава учебного пособия содержит материал по различным разделам математики. Главы состоят из параграфов, примерно соответствующих одной лекции. Параграфы разбиваются на подпараграфы, посвящённые рассмотрению отдельных вопросов, минимальных по объёму, но замкнутых по содержанию. Пособие снабжено предметным указателем и списком основных математических обозначений. Во всей работе используется двойная нумерация формул и других объектов. Первое число обозначает номер главы, содержащей данный объект, второе — номер объекта внутри этой главы. В конце доказательств теорем и решений задач для удобства читателя ставится знак $\square$.

Авторы стремились выработать такой стиль изложения материала, при котором основной упор делается на доступность, но при этом сохраняется разумный уровень математической строгости. Успешному

усвоению материала должно способствовать значительное количество иллюстраций. В книге нет громоздких или повторяющихся по своим идеям доказательств. Вместе с тем основные теоремы тщательно проработаны и обоснованы.

Данное учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов экономических специальностей дневной, заочной и дистанционной форм обучения. Авторы надеются, что оно поможет развить у студентов способность к абстрактному мышлению и превратить математику в орудие познания окружающего мира.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензентам — коллективу кафедры высшей математики Белорусского государственного экономического университета (особо заведующему кафедрой доктору физико-математических наук, профессору М.П. Дымкову) и заведующему кафедрой теории функций Белорусского государственного университета доктору физико-математических наук, профессору В.Г. Кротову, — замечания и рекомендации которых способствовали улучшению учебного пособия.

Все отзывы и предложения просьба направлять по адресу: издательство «Вышэйшая школа», пр. Победителей, 11, 220048, Минск.

Авторы

Введение

B.1. Базовые понятия математики
B.2. Декартова система координат
B.3. Метод математической индукции

B.1. Базовые понятия математики

B.1.1. Представление о математической логике
B.1.2. Общее понятие множества
B.1.3. Числовые множества

В.1.1. Представление о математической логике

В математике для записи понятий, утверждений используется специальная логическая символика. Так, запись

$\alpha \Rightarrow \beta$ означает, что из предложения α следует предложение β;

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ означает, что из α следует β и из β следует α, т.е. предложения α и β равносильные.

Символ $\forall$[1], называемый *квантором всеобщности*, читается: «для любого», «для всех», «для каждого», «каково бы ни было». Символ $\exists$[2] называется *квантором существования* и используется вместо слов «существует», «найдётся».

Теоремы в математике обычно имеют структуру, выражаемую формулой

$$\alpha \Rightarrow \beta.$$

При этом утверждение α называется *условием теоремы*, а β — её *заключением*. В этом случае также говорят, что заключение β является *необходимым* для выполнения условия α и что условие α является *достаточным* для выполнения заключения β.

Пусть, например, утверждение α состоит в том, что Вася учится на факультете экономики и управления, а утверждение β — в том, что Вася изучает высшую математику. Тогда $\alpha \Rightarrow \beta$. Действительно, изучение высшей математики является необходимым условием для того, чтобы быть студентом факультета экономики и управления. С другой стороны, для изучения высшей математики достаточно быть студентом факультета экономики и управления.

Из справедливости $\alpha \Rightarrow \beta$, вообще говоря, не следует справедливость $\beta \Rightarrow \alpha$. В нашем случае Вася может изучать высшую математику и при этом не быть студентом факультета экономики и управления, а учиться, например, на биологическом или физико-техническом факультете.

Если $\alpha \Rightarrow \beta$ и одновременно $\beta \Rightarrow \alpha$, то пишут:

$$\alpha \Leftrightarrow \beta.$$

[1] Перевёрнутая латинская буква «A», от англ. any — любой.
[2] Перевёрнутая латинская буква «E», от англ. exists — существует.

Такая теорема называется *критерием*. Формулируя критерий, обычно говорят, что условие α имеет место *тогда и только тогда*, когда выполнено β, или что условие α *необходимо и достаточно* для выполнения β.

В.1.2. Общее понятие множества

Множество является одним из основных понятий математики. Оно принадлежит к числу первичных, не определяемых через другие математические понятия. Под множеством в математике понимают совокупность однородных элементов, объединённых по какому-либо признаку. Математические множества могут состоять из чисел, векторов, функций и других элементов. Множества, как правило, обозначают прописными буквами латинского алфавита, а их элементы — строчными. Принадлежность элемента a множеству A записывается следующим образом: $a \in A$. Если a не является элементом множества A, то пишут $a \notin A$. Запись $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ означает, что множество A состоит из элементов a_1, a_2, $\ldots$, a_n.

Множество X называется *подмножеством* множества Y, если все элементы множества X являются одновременно элементами множества Y. При этом пишут $X \subset Y$ и говорят, что X содержится в Y, или Y содержит X. Два множества X и Y называются *равными*, если одновременно выполнены включения $X \subset Y$ и $Y \subset X$. В таком случае пишут $X = Y$. Равные множества состоят из одних и тех же элементов.

Пусть, например, Вася обучается на первом курсе факультета экономики и управления. Обозначим Васю буквой v. Множество всех студентов-первокурсников этого факультета обозначим I. Множество студентов всех курсов факультета экономики и управления обозначим S. Тогда

$$v \in I \subset S.$$

В самом деле, Вася принадлежит множеству студентов первого курса, которое в свою очередь содержится в более широком множестве всех студентов факультета.

Символом $\varnothing$ обозначают множество, которое не содержит ни одного элемента. Такое множество называется *пустым*. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Пересечением множеств X и Y называется множество $Z = X \cap Y$, состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих как X, так и Y. *Объединением множеств* X и Y называется множество $W = X \cup Y$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из указанных множеств.

В.1.3. Числовые множества

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Основными числовыми множествами являются *множество натуральных чисел*

$$\mathbb{N} = \{\, 1, 2, \ldots, n, \ldots \},$$

множество целых чисел

$$\mathbb{Z} = \{\, 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots \},$$

состоящее из натуральных чисел, им противоположных, и нуля, *множество рациональных чисел*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

элементами которого являются всевозможные отношения целых чисел к натуральным. Всякое рациональное число может быть представлено в виде конечной либо бесконечной периодической десятичной дроби. Например,

$$\frac{1}{5} = 0{,}2, \quad \frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots = 0{,}1(6).$$

Множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ оказывается недостаточно для построения математической теории. Возникающие при этом проблемы можно, например, проиллюстрировать фактом, что не существует такого рационального числа, квадрат которого равнялся бы двум. В самом деле, если бы такое число существовало, то его можно было бы представить несократимой дробью $\frac{m}{n}$, где m и n — такие натуральные числа, что $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Отсюда следует, что $m^2 = 2n^2$. Тогда число m^2, а значит, и m, кратно двум. Следовательно, $m = 2r$, где r — некоторое натуральное число, и, таким образом,

$$\left(\frac{2r}{n}\right)^2 = 2, \quad \frac{4r^2}{n^2} = 2, \quad 4r^2 = 2n^2, \quad n^2 = 2r^2.$$

А это означает, что и число n также кратно двум, что противоречит несократимости дроби $\frac{m}{n}$.

Чтобы решить такого рода проблемы, множество рациональных чисел пополняется так называемыми *иррациональными числами*, представимыми в виде бесконечных непериодических десятичных дробей.

Полученное множество, содержащее все рациональные и иррациональные числа, называют *множеством действительных чисел* и обозначают $\mathbb{R}$. Примерами иррациональных действительных чисел являются:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373\ldots, \quad \pi = 3{,}141592653589\ldots .$$

Между основными числовыми множествами имеет место следующее соотношение:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Пусть a и b — действительные числа, причём $a < b$. *Числовыми промежутками* (*интервалами*) называют подмножества всех действительных чисел, имеющие следующий вид:

$[a, b] = \{ x : a \leqslant x \leqslant b \}$ — *отрезок* (замкнутый промежуток);

$(a, b) = \{ x : a < x < b \}$ — *интервал* (открытый промежуток);

$[a, b) = \{ x : a \leqslant x < b \}$, $(a, b] = \{x : a < x \leqslant b\}$ — *полуоткрытые интервалы*;

$(-\infty, b] = \{ x : x \leqslant b \}$, $(-\infty, b) = \{ x : x < b \}$ — не ограниченные снизу *полубесконечные интервалы*;

$[a, +\infty) = \{ x : x \geqslant a \}$, $(a, +\infty) = \{x : x > a\}$ — не ограниченные сверху *полубесконечные интервалы*;

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ — *бесконечный интервал*.

B.2. Декартова система координат

B.2.1. Декартовы координаты на прямой
B.2.2. Декартовы координаты на плоскости
B.2.3. Декартовы координаты в пространстве

В.2.1. Декартовы координаты на прямой

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ обладает свойством *непрерывности*, суть которого состоит в возможности отождествления этого множества с прямой линией. Отметим, что для множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ свойство непрерывности не выполнено.

Координатной осью Ox называется прямая, на которой отмечена точка O, называемая *началом отсчёта* или *началом координат*, выбран масштаб, т.е. указан отрезок единичной длины для измерения расстояний, называемый *единичным* или *масштабным отрезком*, и задано *положительное направление*, отмечаемое стрелкой (рис. В.1). Начало координат O в соответствии с выбранным направлением делит ось Ox на два луча: *положительную* и *отрицательную полуоси*.

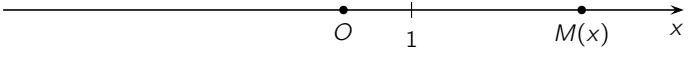

Рис. В.1

Координатой точки M, лежащей на оси Ox, называется число x, равное длине отрезка OM, взятой со знаком «$+$», если точка M лежит на положительной полуоси, и со знаком «$-$», если эта точка лежит на отрицательной полуоси. Координату точки обычно указывают в скобках рядом с обозначением точки. Если, например, точка M имеет координату x, то пишут $M(x)$. Таким образом, каждой точке координатной оси поставлено в соответствие некоторое число $x \in \mathbb{R}$.

С другой стороны, каждому действительному числу x можно поставить в соответствие точку M оси Ox, имеющую координату x. Для этого на оси Ox следует отложить отрезок $OM = |x|$ в положительном направлении, если $x \geqslant 0$, и в отрицательном направлении, если $x < 0$.

Итак, мы ввели *декартовы координаты* на прямой, установив взаимно однозначное соответствие между множеством точек числовой оси и множеством действительных чисел $\mathbb{R}$.

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ на оси Ox выражается формулой

$$M_1M_2 = |x_1 - x_2| \tag{В.1}$$

(убедитесь в этом самостоятельно) и, таким образом, равно модулю разности соответствующих координат.

В.2.2. Декартовы координаты на плоскости

Переходя к случаю плоскости, проведём пару взаимно перпендикулярных координатных осей с одинаковым масштабным отрезком так, чтобы их начала координат совпали. Первую ось назовём *осью абсцисс* и будем обозначать Ox, вторую назовём *осью ординат* и будем обозначать Oy. Оси координат делят плоскость на четыре части, называемые *квадрантами* (рис. В.2).

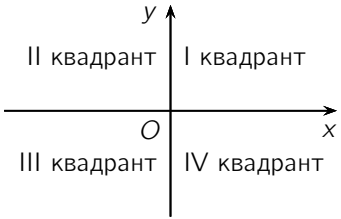

Рис. В.2

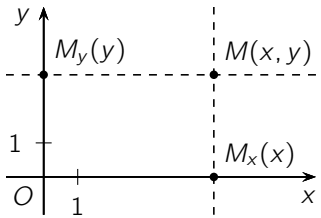

Рис. В.3

Рассмотрим произвольную точку M плоскости. Через эту точку проведём прямую, параллельную оси ординат (рис. В.3). Она пересечёт ось абсцисс Ox в некоторой точке M_x. Координата x точки M_x на оси Ox называется *абсциссой* точки M. Теперь проведём через точку M прямую, параллельную оси абсцисс. Она пересечёт ось ординат Oy в некоторой точке M_y. Координату y точки M_y на оси Oy назовём *ординатой* точки M. Таким образом, каждой точке плоскости M мы поставили в соответствие пару действительных чисел x и y. Это соответствие принято обозначать $M(x, y)$.

Произвольной паре чисел $x, y \in \mathbb{R}$, в свою очередь, может быть поставлена в соответствие некоторая точка плоскости. Чтобы убедиться в этом, отметим на осях Ox и Oy точки $M_x(x)$ и $M_y(y)$. Напомним, что мы уже научились это делать, когда рассматривали координаты на прямой. Проведём через точки M_x и M_y прямые, параллельные соответственно осям Oy и Ox. Точка пересечения этих прямых и будет искомой точкой $M(x, y)$.

Из сказанного можно сделать вывод, что, введя декартовы координаты на плоскости, мы отождествили упорядоченные пары действительных чисел, множество которых принято обозначать $\mathbb{R}^2$, и точки плоскости.

В.2.3. Декартовы координаты в пространстве

Для построения декартовой системы координат в пространстве начертим три взаимно перпендикулярные координатные оси с общим началом координат O и одинаковым масштабным отрезком (рис. В.4). Будем называть их *осями абсцисс*, *ординат* и *аппликат* и обозначать Ox, Oy и Oz соответственно.

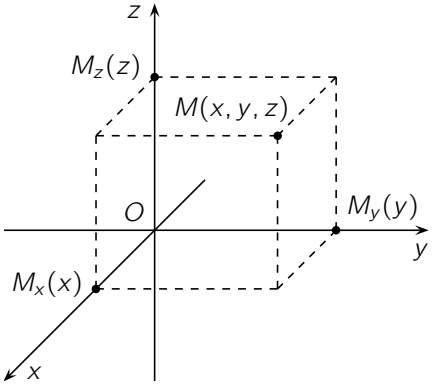

Рис. В.4

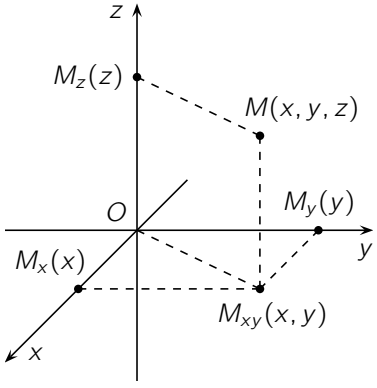

Рис. В.5

В зависимости от взаимного расположения осей декартова система координат в пространстве может быть *правой* или *левой*. Правую систему координат можно получить, если ось абсцисс пустить по направлению большого пальца правой руки, ось ординат — указательного, а ось аппликат — среднего. Чаще всего рассматривают именно правую систему координат (рис. В.4). Левую систему координат можно получить, если в правой системе поменять направление любой из осей на противоположное.

Попарно взятые координатные оси образуют *координатные плоскости* xOy, yOz и xOz, разбивающие пространство на восемь частей — *октантов*. Например, точка M на рис. В.4 лежит в первом октанте.

Рассмотрим произвольную точку M пространства и проведём через неё плоскости, параллельные координатным плоскостям yOz, xOz и xOy. Точки пересечения этих плоскостей с осями Ox, Oy и Oz обозначим соответственно M_x, M_y и M_z (рис. В.4). Координаты x, y и z точек M_x, M_y и M_z на осях Ox, Oy и Oz

назовём соответственно *абсциссой*, *ординатой* и *аппликатой* точки M или *декартовыми прямоугольными координатами* этой точки. То, что точка M имеет координаты x, y и z, будем обозначать следующим образом: $M(x, y, z)$.

Чтобы построить точку $M(x, y, z)$, зная её координаты, отметим на осях Ox, Oy и Oz соответственно точки $M_x(x)$, $M_y(y)$ и $M_z(z)$, действуя так же, как и в одномерном случае (рис. B.5). Как и в двухмерном случае, на координатной плоскости xOy найдём точку $M_{xy}(x, y)$. Проведём прямую через точки O и M_{xy}. Через точку M_z проведём прямую, параллельную ей, а через точку M_{xy} — прямую, параллельную оси Oz. На пересечении последних двух прямых лежит искомая точка $M(x, y, z)$.

Итак, мы поставили в соответствие произвольной тройке действительных чисел точку пространства и заодно ознакомились с удобным способом графического построения точки по её координатам.

Декартовы координаты в пространстве позволяют установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и упорядоченными тройками действительных чисел, множество которых обозначают $\mathbb{R}^3$.

В.3. Метод математической индукции

В.3.1. Дедукция и индукция в математике
В.3.2. Суммы и прогрессии
В.3.3. Произведения и факториалы
В.3.4. Бином Ньютона

В.3.1. Дедукция и индукция в математике

Одной из отличительных черт математики является дедуктивное построение теории, при котором все утверждения выводятся из нескольких основных положений, называемых *аксиомами*, с помощью *дедукции*, т.е. с помощью логического вывода. Однако дедукция является не единственным методом научного мышления. В науке широко используются также *индуктивные* рассуждения и выводы, сделанные на основе наблюдения и опытов, т.е. полученные путём заключений от частного к общему.

Так, одной из форм математического рассуждения является *метод математической индукции*, который может применяться в случае, когда требуется установить справедливость бесконечной последовательности утверждений

$$T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_{n-1},\ T_n,\ \ldots,$$

занумерованных натуральными числами.

Рассуждение по методу математической индукции состоит из следующих двух этапов:

1) *база индукции*, когда проверяется истинность утверждения T_1, т.е. первого из утверждений в последовательности;
2) *индукционный переход*, где для всякого $n \in \mathbb{N}$ доказывается, что если верно утверждение T_n, называемое *предположением индукции*, то верно и следующее за ним утверждение T_{n+1}.

В.3.2. Суммы и прогрессии

Понятие математической индукции естественным образом возникает при изучении *прогрессий*. Прогрессии определяются *рекуррентными соотношениями*, т.е. соотношениями, позволяющими выразить следующий член по одному или нескольким предыдущим членам. *Арифметическая* и *геометрическая прогрессии* задаются соответственно рекуррентными соотношениями:

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad b_{n+1} = b_n q,$$

где число d называется *разностью*, а q — *знаменателем* соответствующей прогрессии.

Таким образом, само определение этих прогрессий даётся с помощью индукции от n к $n+1$. Поэтому и большинство формул, относящихся к прогрессиям, целесообразно выводить с использованием метода математической индукции. Это касается в первую очередь формул для сумм первых n членов арифметической и геометрической прогрессий. Для арифметической прогрессии имеем:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1+a_n}{2}\, n = a_1 n + d\,\frac{n(n-1)}{2}. \tag{В.2}$$

Для геометрической прогрессии верно, что

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \begin{cases} b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1} & \text{при } q \neq 1, \\ n b_1 & \text{при } q = 1. \end{cases} \tag{В.3}$$

При записи формул (В.2) и (В.3) мы воспользовались символом суммирования $\sum$, который читается «сумма». Вообще говоря,

$$\sum_{k=m}^{n} f_k = f_m + f_{m+1} + f_{m+2} + \ldots + f_n, \qquad m, n \in \mathbb{N},\ f_k \in \mathbb{R}.$$

Символ k называют *индексом суммирования*. Он пробегает значения от *нижней границы суммирования* m до *верхней границы суммирования* n. Если $n < m$, то в сумме нет ни одного слагаемого и её значение

принимают равным нулю. Не меняя суммы, можно обозначить индекс суммирования любой буквой. Сумма также не изменится, если к границам суммирования добавить любое целое число r и вычесть это число из индекса суммирования в выражении под знаком суммы:

$$\sum_{k=m}^{n} f_k = \sum_{l=m}^{n} f_l = \sum_{k=m+r}^{n+r} f_{k-r} = f_m + f_{m+1} + \ldots + f_n.$$

Докажем, например формулу (В.3) для суммы геометрической прогрессии. Случай $q = 1$ тривиальный. Будем считать, что $q \neq 1$. При $n = 1$ имеем:

$$S_1 = b_1 = b_1 \frac{q^1 - 1}{q - 1}.$$

Итак, база индукции установлена.

Осуществим индукционный переход. Предположим, что формула (В.3) верна для некоторого номера $n \in \mathbb{N}$. Докажем справедливость этой формулы и для номера $n + 1$. В самом деле,

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} b_k = \sum_{k=1}^{n} b_k + b_{n+1}.$$

По предположению индукции к стоящей здесь сумме применима формула (В.3). Кроме того, очевидно, что $b_{n+1} = b_1 q^n$. Тогда

$$S_{n+1} = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} + b_1 q^n = b_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{q^n (q - 1)}{q - 1} \right) =$$
$$= b_1 \frac{(q^n - 1) + (q^{n+1} - q^n)}{q - 1} = b_1 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

что и требовалось доказать.

В.3.3. Произведения и факториалы

По аналогии со знаком суммы вводится знак произведения:

$$\prod_{k=m}^{n} p_k = p_m \cdot p_{m+1} \cdot p_{m+2} \cdot \ldots \cdot p_n, \qquad m, n \in \mathbb{N},\ p_k \in \mathbb{R}.$$

Если $n < m$, т.е. произведение не содержит множителей, то его значение считают равным единице.

В математике часто встречаются произведения первых n натуральных чисел, называемые *факториалами* и обозначаемые $n!$ (читается «эн факториал»). Иначе говоря,

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пользуясь очевидным соотношением $(n+1)! = n!\,(n+1)$, несложно вычислять факториалы для небольших значений n:

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \ \ldots\ .$$

Метод математической индукции часто применяют для доказательства неравенств. Мы, например, установим, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leqslant 2 - \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{B.4}$$

Очевидно, что при $n = 1$ в формуле (B.4) имеет место знак равенства.

Осуществим индукционный переход. Считаем, что формула (B.4) верна для некоторого номера $n \in \mathbb{N}$. Доказываем её справедливость для номера $n + 1$. В самом деле,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}.$$

К стоящей справа сумме применим предположение индукции. Отметим также, что $(n+1)! \geqslant n(n+1)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \leqslant \left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n(n+1)} = 2 - \frac{n+1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= 2 - \frac{(n+1)-1}{n(n+1)} = 2 - \frac{n}{n(n+1)} = 2 - \frac{1}{n+1},$$

что и требовалось доказать.

В.3.4. Бином Ньютона

Историки науки утверждают, что, несмотря на своё название, знаменитая формула бинома Ньютона была открыта задолго до второй половины XVII в., когда ею заинтересовался сэр Исаак Ньютон. Оказывается, её уже знали китайские и арабские математики XIII в. Эта формула имеет следующий вид:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{B.5}$$

Числа C_n^k называются *биномиальными коэффициентами* и вычисляются по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n. \tag{B.6}$$

Выпишем бином Ньютона в развёрнутой форме:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

И. Ньютон обобщил формулу (B.5) на случай произвольного рационального показателя n.
Для всякого $n \in \mathbb{N}$ находим:

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1, \quad C_n^1 = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n.$$

В силу определения (B.6) $C_n^{n-k} = C_n^k$, поэтому $C_n^n = 1$ и $C_n^{n-1} = n$.

Для биномиальных коэффициентов имеет место формула

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{B.7}$$

В самом деле,

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,\big(n-(k-1)\big)!} =$$
$$= \frac{n!\,(n+1-k)}{k!\,(n+1-k)!} + \frac{n!\,k}{k!\,(n+1-k)!} =$$
$$= \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,\big((n+1)-k\big)!} = C_{n+1}^k.$$

Формула (В.7) позволяет быстро вычислять биномиальные коэффициенты порядка $n+1$, если известны коэффициенты порядка n. При этом для наглядности их удобно выписывать в виде так называемого *треугольника Паскаля*:

$n=0$						1				
$n=1$					1		1			
$n=2$				1		2		1		
$n=3$			1		3		3		1	
$n=4$		1		4		6		4		1
$n=5$	1		5		10		10		5		1

Здесь каждый элемент равен сумме двух соседних с ним элементов из предыдущей строки. В качестве упражнения самостоятельно заполните ещё две строки для $n=6$ и $n=7$.

Для доказательства справедливости формулы бинома Ньютона (В.5) применим метод математической индукции. При $n=1$

$$(a+b)^1 = a+b = C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1 = \sum_{k=0}^{1} C_1^k a^{1-k} b^k.$$

Выполним индукционный переход. Предположим, что формула бинома Ньютона верна для некоторого номера n. Докажем, что тогда она верна и для номера $n+1$. В самом деле,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= a\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k + b\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = S_1 + S_2,$$

где для краткости первое слагаемое правой части обозначено через S_1, а второе — через S_2. Из суммы S_1 извлечём слагаемое, соответствующее $k = 0$:

$$S_1 = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k.$$

Из суммы S_2 извлечём слагаемое, соответствующее $k = n$, а в оставшейся сумме добавим единицу к границам суммирования:

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^{n-(k-1)} b^k + b^{n+1},$$

откуда

$$(a+b)^{n+1} = S_1 + S_2 = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}.$$

Воспользуемся формулой (В.7). Тогда

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k,$$

что и требовалось доказать.

Глава 1

Линейная алгебра

1.1. Матрицы и определители
1.2. Системы линейных алгебраических уравнений
1.3. Векторная алгебра

1.1. Матрицы и определители

1.1.1. Понятие матрицы. Виды матриц
1.1.2. Операции над матрицами
1.1.3. Определители низших порядков
1.1.4. Определители произвольного порядка
1.1.5. Свойства определителей
1.1.6. Элементарные преобразования
1.1.7. Обратная матрица
1.1.8. Матричные уравнения
1.1.9. Ранг матрицы

1.1.1. Понятие матрицы. Виды матриц

Определение 1.1. Прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов, называется *матрицей размера $m \times n$*. Матрицы, как правило, обозначают прописными буквами латинского алфавита и записывают в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или коротко $A = (a_{ij})$.

Определение 1.2. Строки и столбцы матриц объединяют общим названием *ряды*.

Определение 1.3. Числа a_{ij}, образующие матрицу $A = (a_{ij})$, называются её *элементами*, причём индекс i обозначает *номер строки*, а j — *номер столбца*, где расположен данный элемент.

Определение 1.4. Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинаковых размеров называются *равными*, если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$.

Определение 1.5. Матрица O называется *нулевой* или *нуль-матрицей*, если все её элементы равны нулю.

Определение 1.6. Матрица, число строк которой равно числу столбцов и равно n, называется *квадратной матрицей порядка n*.

Определение 1.7. Элементы a_{11}, a_{22}, $\dots$, a_{nn} квадратной матрицы порядка n образуют её *главную диагональ*. Другая диагональ, состоящая из элементов a_{n1}, $a_{n-1,2}$, $\dots$, a_{1n}, называется *побочной*.

Определение 1.8. Квадратная матрица называется *треугольной*, если все её элементы ниже главной диагонали равны нулю.

Определение 1.9. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все её элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю.

Определение 1.10. Диагональная матрица называется *единичной* и обозначается E, если все её элементы, расположенные на главной диагонали, равны единице.

Пример 1.1. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

являются соответственно квадратной, треугольной, диагональной и единичной матрицами третьего порядка.

Замечание 1.1. В матричном исчислении нулевая матрица O и единичная матрица E играют роль, аналогичную роли чисел 0 и 1 в арифметике.

Определение 1.11. Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *вектором-столбцом* или *вектором-строкой*.

Пример 1.2. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

являются соответственно вектором-столбцом и вектором-строкой.

Можно рассматривать матрицы размера 1×1 и вида $A = (a_{11})$, например $A = (3)$, т.е. просто числа.

Определение 1.12. *Ступенчатой* называется матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,r-1} & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,r-1} & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где элементы a_{11}, a_{22}, $\dots$, a_{rr} отличны от нуля. Ступенчатыми считаются также матрицы, приводимые к виду (1.1) перестановкой параллельных рядов.

Пример 1.3. Матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

являются ступенчатыми.

1.1.2. Операции над матрицами

Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд действий, причём некоторые из них аналогичны операциям над числами, а некоторые — специфические.

Определение 1.13. *Суммой двух матриц* $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ *одинаковых размеров* называется матрица того же размера $A + B = C_{m\times n} = (c_{ij})$, элементы которой равны сумме элементов матриц A и B, расположенных на соответствующих местах:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Пример 1.4. Для заданных матриц A и B находим сумму $A + B$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A + B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.14. *Произведением матрицы* $A = (a_{ij})$ *на число* k называется матрица $kA = (ka_{ij})$ того же размера, что и матрица A, полученная умножением всех элементов матрицы A на число k.

Пример 1.5. Для заданной матрицы A находим матрицу $3A$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad 3A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.15. Матрицу $-A = (-1) \cdot A$ будем называть *противоположной* матрице A.

Определение 1.16. *Разностью матриц* A *и* B *одинаковых размеров* называется сумма матрицы A и матрицы, противоположной к B, т.е. $A - B = A + (-B)$.

Несложно доказать, что операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

1) $A + B = B + A$;
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3) $A + O = A$;
4) $A - A = O$;
5) $1 \cdot A = A$;
6) $k(A + B) = kA + kB$;
7) $(k + l)A = kA + lA$;
8) $k(lA) = (kl)A$.

Рассмотренные действия над матрицами аналогичны соответствующим действиям над числами. Этого нельзя сказать про вводимое ниже произведение матриц, которое возможно только для так называемых согласованных матриц.

Определение 1.17. Две матрицы называются *согласованными*, если число столбцов первой равно числу строк второй.

Определение 1.18. *Произведением AB согласованных матриц* $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{n\times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ik})$, элемент c_{ik} которой вычисляется как сумма произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk}.$$

Вычисление элемента c_{ik} проиллюстрировано на рис. 1.1.

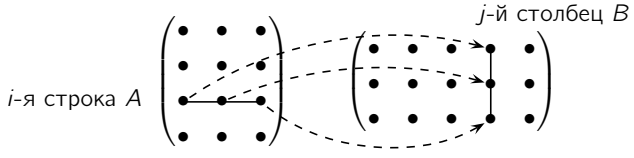

Рис. 1.1

Замечание 1.2. Из возможности умножения матрицы A на матрицу B не следует существования произведения BA. Дело в том, что согласованность матриц A и B, вообще говоря, не обеспечивает согласованности матриц B и A (рис. 1.1).

Пример 1.6. Вычислить произведение матриц A и B, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. По определению произведения матриц

$$AB = \begin{pmatrix} 1(-1)+0\cdot 5+2(-2) & 1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 0 \\ 3(-1)+1\cdot 5+0(-2) & 3\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1) $A(B+C) = AB + AC$;
2) $(A+B)C = AC + BC$;
3) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$;
4) $A(BC) = (AB)C$.

Замечание 1.3. Для квадратных матриц A и B одинаковых размеров заданы оба произведения: AB и BA. При этом, вообще говоря, $AB \neq BA$, т.е. произведение матриц не обладает свойством *перестановочности*.

Пример 1.7. Найти произведения AB и BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 0+2\cdot 6 & 1\cdot 5+2\cdot 8 \\ 3\cdot 0+4\cdot 6 & 3\cdot 5+4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 24 & 47 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0\cdot 1+5\cdot 3 & 0\cdot 2+5\cdot 4 \\ 6\cdot 1+8\cdot 3 & 6\cdot 2+8\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix}.$$

Итак, в данном случае $AB \neq BA$. □

Замечание 1.4. Из того, что произведение двух матриц равно нулевой матрице, не следует, что хотя бы одна из матриц нулевая. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Определение 1.19. Матрицы A и B, для которых $AB = BA$, называются *перестановочными*.

Очевидно, что любая квадратная матрица A является перестановочной с единичной матрицей E и нулевой матрицей O, причём

$$AE = EA = A, \quad AO = OA = O.$$

Определение 1.20. Если $k \in \mathbb{N}$, то *k-й степенью квадратной матрицы* A называется произведение k матриц A:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ раз}}.$$

По определению считают, что $A^0 = E$.

Операция возведения в степень обладает следующими привычными свойствами:

1) $A^m A^k = A^{m+k}$, 2) $(A^m)^k = A^{mk}$.

Определение 1.21. *Многочленом степени n* от квадратной матрицы A называется выражение вида

$$P_n(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A^1 + a_0 A^0,$$

где a_0, a_1, $\ldots$, a_n — произвольные числа.

Пример 1.8. Найти значение $f(A)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3.$$

Р е ш е н и е. Вычисляем A^2 и A^3:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим $f(A)$:

$$f(A) = 2A^3 - 4A^2 + 3E =$$
$$= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$ □

Определение 1.22. Матрица A^T, столбцы которой составлены из строк матрицы A с теми же номерами и тем же порядком следования элементов, называется *транспонированной* к матрице A.

Пример 1.9. Найти матрицу, транспонированную к данной матрице:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перечислим основные свойства операции транспонирования:

1) $\left(A^T\right)^T = A$;
2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
3) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
4) $(AB)^T = B^T A^T$.

1.1.3. Определители низших порядков

Квадратной матрице A может быть поставлено в соответствие число, называемое *определителем* и обозначаемое $|A|$, $\det A$ или Δ.

Определение 1.23. *Определитель первого порядка* квадратной матрицы $A = (a_{11})$ равен самому элементу этой матрицы, а именно $\det A = |A| = a_{11}$.

Замечание 1.5. Следует различать вертикальные линии, обозначающие определитель и модуль числа: они имеют совершенно различный смысл. Определитель, например, может принимать отрицательные значения.

Определение 1.24. *Определителем второго порядка* квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{1.2}$$

Замечание 1.6. Правило вычисления определителя второго порядка иллюстрируется рис. 1.2 и состоит в том, что из произведения элементов главной диагонали вычитается произведение элементов побочной диагонали.

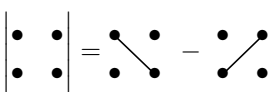

Рис. 1.2

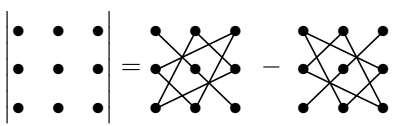

Рис. 1.3

Пример 1.10. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. По «правилу диагоналей»

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2)(-7) = 15 - 14 = 1. \qquad \square$$

Определение 1.25. *Определителем третьего порядка* квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad (1.3)$$

Замечание 1.7. Облегчить запоминание формулы (1.3) позволяет так называемое *правило треугольников*, представленное схемой на рис. 1.3. Суть правила треугольников состоит в том, что со знаком «+» берётся произведение элементов главной диагонали, а также произведения элементов, стоящих в вершинах треугольников, чьи основания параллельны главной диагонали. Со знаком «−» идёт побочная диагональ и соответствующие ей треугольники.

Пример 1.11. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. По правилу треугольников

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = \\ = 2 + 2 - 1 - 1 + 4 - 1 = 5. \qquad \square$$

1.1.4. Определители произвольного порядка

Определитель квадратной матрицы произвольного порядка n выражается через специальные определители порядка $n-1$, называемые минорами. Такой подход позволяет при вычислении определителя последовательно понижать его порядок до тех пор, пока не будут получены определители третьего или второго порядка, которые могут быть вычислены непосредственно.

Определение 1.26. *Минором M_{ij} элемента a_{ij}* квадратной матрицы A порядка n называется определитель квадратной матрицы $(n-1)$-го порядка, получаемой вычёркиванием в матрице A i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

Определение 1.27. *Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij}* квадратной матрицы A называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Пример 1.12. Минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{23} для квадратной матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

вычисляются по формулам:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}.$$

Определение 1.28. *Определителем квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n* называется сумма произведений элементов первой строки матрицы A на их алгебраические дополнения:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}. \tag{1.4}$$

Замечание 1.8. Определение 1.28 согласуется с определениями, введёнными ранее, в том смысле, что, как несложно проверить, применительно к определителям второго и третьего порядка формула (1.4) даёт такой же результат, как и рассмотренные ранее формулы (1.2) и (1.3).

Пример 1.13. Вычислить определитель из примера 1.3 с помощью формулы (1.4).

Р е ш е н и е. Имеем:

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{1} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(2-1) + 1(4-1) + 1(2-1) = 1 + 3 + 1 = 5.$$

Как мы и предполагали, результат оказался тем же. □

Замечание 1.9. Вводя понятие определителя произвольного порядка по формуле (1.4), мы могли создать у читателя впечатление, что первая строка определителя играет особую, исключительную роль. Приводимая ниже теорема Лапласа утверждает, что это не так и все строки и столбцы определителя равнозначны. Нам пришлось выбрать один конкретный ряд, чтобы избежать двусмысленной формулировки и придать ей как можно более простой вид.

Теорема 1.1 (Лапласа). *Определитель равен сумме произведений элементов любого ряда на их алгебраические дополнения.*

Итак, для вычисления определителя его можно раскладывать по элементам не только первой строки, но и любой другой строки или столбца. Результат всегда будет одинаковым.

Пример 1.14. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определитель из примера 1.11, раскладывая его по третьему столбцу.

Р е ш е н и е. Согласно теореме Лапласа

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \boxed{1} \\ 2 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 1 & \boxed{2} \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(2-1) - 1(1+1) + 2(1+2) = 1 - 2 + 6 = 5.$$

Результат, естественно, оказался в точности таким же, как в примерах 1.11 и 1.13. □

Теорема Лапласа может быть использована для вычисления определителей четвёртого и более высоких порядков.

Пример 1.15. Вычислить $\det A$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -7 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Один из элементов первой строки матрицы A равен нулю, что освобождает нас от на-

хождения соответствующего минора. Для сокращения вычислений знаки алгебраических дополнений будем находить в уме:

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{5} & \boxed{-7} \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\Big(6\cdot 1\cdot 1 + 4\cdot(-2)\cdot 2 + 2\cdot(-3)\cdot 1 - \\ - 2\cdot 1\cdot 1 - (-3)\cdot 4\cdot 1 - 2\cdot(-2)\cdot 6\Big) + \\ + 5\Big(2\cdot(-3)\cdot 1 + 6\cdot(-2)\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 1 - \\ - 2\cdot(-3)\cdot 1 - 1\cdot 6\cdot 1 - 2\cdot(-2)\cdot 2\Big) + \\ + 7\Big(2\cdot(-3)\cdot 2 + 6\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 4 - \\ - 2\cdot(-3)\cdot 4 - 1\cdot 6\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 2\Big) =$$

$$= 1(6 - 16 - 6 - 2 + 12 + 24) + 5(-6 - 24 + 2 + 6 - 6 + 8) + \\ + 7(-12 + 12 + 8 + 24 - 12 - 4) =$$

$$= 1\cdot 18 + 5(-20) + 7\cdot 16 = 18 - 100 + 112 = 30.$$

□

1.1.5. Свойства определителей

1. *При транспонировании матрицы её определитель не меняется, т.е.* $|A^T| = |A|$.

2. *При перестановке двух параллельных рядов знак определителя меняется на противоположный.*

3. *Общий множитель всех элементов любого ряда определителя можно вынести за знак определителя.*

Пример 1.16. Вынесем множитель k из второй строки определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4. *Определитель, содержащий нулевой ряд, равен нулю.*

5. *Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

6. *Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то этот определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.*

Пример 1.17. Применим рассмотренное свойство к первой строке следующего определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & a_{13}+b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. *Определитель, два параллельных ряда которого одинаковы или пропорциональны, равен нулю.*

8. *Определитель не изменяется, если к элементам одного из его рядов прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на одно и то же число.*

Пример 1.18. В определителе третьего порядка прибавим ко второму столбцу первый, умноженный на некоторое число k:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

9. *Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей*:

$$|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|.$$

10 **(теорема аннулирования).** *Сумма произведений элементов любого ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого ряда равна нулю.*

1.1.6. Элементарные преобразования

Как мы уже могли заметить, решая пример 1.15, нахождение определителя четвёртого и бóльших порядков требует значительных вычислительных затрат. Рассмотрим способ повышения вычислительной эффективности этой процедуры.

Определение 1.29. Будем называть *элементарными преобразованиями матриц*

1) перестановку местами двух параллельных рядов;
2) умножение всех элементов ряда матрицы на число k, отличное от нуля;
3) добавление ко всем элементам любого ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Определение 1.30. Две матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. При этом пишут $A \sim B$.

Применяя свойства определителей, посмотрим, как влияют элементарные преобразования квадратной матрицы на значение её определителя. Первое из преобразований определения 1.29 по свойству 2 изменяет знак определителя, второе — по свойству 3 приводит к умножению значения определителя на число k, третье — по свойству 8 не влияет на значение определителя.

Подвергая квадратную матрицу порядка n элементарным преобразованиям, можно добиться того, чтобы в каком-либо из её рядов все элементы, кроме одного, обратились в нуль. Тогда, разложив определитель преобразованной матрицы по элементам такого ряда, мы сведём вычисление определителя порядка n к вычислению одного (а не n) определителя порядка $n-1$.

Пример 1.19. Применяя элементарные преобразования, вычислить определитель из примера 1.15.

Р е ш е н и е. Применяя элементарное преобразование 3, преобразуем данный определитель так, чтобы все элементы его первой строки, кроме элемента 1, который мы будем называть *разрешающим*, стали равны нулю. Для этого будем брать первый столбец и, домножая его на -5 и 7, добавлять к третьему и четвёртому столбцам соответственно. Выбор элемента 1 в качестве разрешающего обусловлен тем, что на

него без остатка делятся остальные элементы первой строки. Данный приём позволяет избежать дробей в вычислениях:

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{5} & \boxed{-7} \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -6 & 15 \\ 1 & -3 & -4 & 5 \\ 2 & 2 & -8 & 15 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & -6 & 15 \\ -3 & -4 & 5 \\ 2 & -8 & 15 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка вычислим аналогичным способом. Начнём с того, что вынесем за знак определителя множитель 3 из первой строки, а также множители 2 и 5 из второго и третьего столбцов:

$$|A| = 3 \cdot 2 \cdot 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & \boxed{1} \\ -3 & -2 & \boxed{1} \\ 2 & -4 & \boxed{3} \end{vmatrix} = 30 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & \boxed{1} \\ 11 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 30 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -30(5 \cdot 2 - 11 \cdot 1) = -30(-1) = 30.$$

Как и следовало ожидать, результат оказался таким же, как в примере 1.15, причём выкладки существенно сократились. □

1.1.7. Обратная матрица

Определение 1.31. Пусть A — квадратная матрица. Матрица A^{-1} называется *обратной* для A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E — единичная матрица.

Теорема 1.2. *Если для квадратной матрицы A существует обратная, то она единственная.*

[Доказательство]

Определение 1.32. Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если её определитель не равен нулю: $\det A \neq 0$. В противном случае, когда $\det A = 0$, матрица называется *вырожденной*.

Определение 1.33. Матрица A^*, транспонированная к матрице, составленной из алгебраических дополнений квадратной матрицы A, называется *присоединённой к матрице A*.

Пример 1.20. Выпишем квадратную матрицу третьего порядка A и её присоединённую A^*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Теорема 1.3. *Для квадратной матрицы A существует обратная тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная. При этом*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*, \tag{1.6}$$

где A^* — присоединённая матрица. [Доказательство]

Невырожденные матрицы обладают следующими свойствами:

1) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$;

2) $(A^{-1})^{-1} = A$;

3) $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$;

4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

5) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Теорема 1.3 позволяет сформулировать приведённый ниже *алгоритм нахождения обратной матрицы* для квадратной матрицы A.

1. Вычисляем определитель $|A|$. Если $|A| = 0$, то матрица A вырожденная и обратная A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, т.е. матрица A невырожденная, то продолжаем вычисления.
2. Находим алгебраические дополнения для всех элементов матрицы A.
3. Строим присоединённую матрицу A^*.
4. Выписываем обратную матрицу A^{-1} по формуле (1.6).

Пример 1.21. Найти матрицу, обратную к $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. 1. Данная матрица уже рассматривалась в примере 1.3. Там мы нашли, что $|A| = 5 \neq 0$. Значит, матрица A невырожденная и существует обратная.

2. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-1) = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(4-1) = -3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(2-1) = 1.$$

Аналогично получаем:

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

3. Выписываем присоединённую матрицу:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. По формуле (1.6) выписываем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку. По определению обратной матрицы, перемножив матрицы A и A^{-1}, мы должны получить единичную матрицу E. Убедимся, что так оно и есть:

$$AA^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1+3+1 & 3+(-1)+(-2) & (-2)+(-1)+3 \\ 2+(-3)+1 & 6+1+(-2) & (-4)+1+3 \\ 1+(-3)+2 & 3+1+(-4) & (-2)+1+6 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \quad \square$$

Замечание 1.10. Для квадратной матрицы второго порядка присоединённая матрица находится по следующему простому правилу: элементы главной диагонали меняются местами, а элементы побочной диагонали умножаются на -1. Это позволяет для любой невырожденной квадратной матрицы A второго порядка быстро находить обратную матрицу A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

1.1.8. Матричные уравнения

Определение 1.34. Уравнение, где неизвестной является матрица, называется *матричным уравнением*.

Матричные уравнения можно решать с помощью обратной матрицы. Различают следующие виды матричных уравнений:

$$AX = B, \quad XA = B, \quad AXC = B. \tag{1.8}$$

Здесь X — неизвестная матрица. Все матрицы в левой части уравнения должны быть согласованными. С обеих сторон от знака «=» должны быть матрицы одинаковых размеров.

Теорема 1.4. *Если матрицы A и C квадратные и невырожденные, то матричные уравнения (1.8) имеют единственные решения, которые могут быть найдены по формулам:*

$$X = A^{-1}B, \quad X = BA^{-1}, \quad X = A^{-1}BC^{-1}.$$

[Доказательство]

Пример 1.22. Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Запишем данное уравнение в следующем виде:

$$XA = B, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти A^{-1}, воспользуемся представлением (1.7) обратной матрицы второго порядка:

$$A^{-1} = \frac{1}{5 \cdot 1 - 0(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда по теореме 1.4

$$X = BA^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -15 & -10 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка

$$XA = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15+6 & 0-2 \\ 15-3 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} = B$$

убеждает нас в верности полученного результата. □

1.1.9. Ранг матрицы

Определение 1.35. Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$. Для $1 \leqslant k \leqslant \min\{m, n\}$ *минорами порядка* k *матрицы* A называются определители, которые состоят из элементов матрицы A, стоящих на пересечении любых k строк и k столбцов матрицы A.

Определение 1.36. Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A называется *рангом матрицы* A и обозначается $\operatorname{rank} A$.

Определение 1.37. Отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу матрицы, называется *базисным*.

Пример 1.23. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Эта матрицы имеет шесть миноров порядка 1 (её элементы). У неё есть три минора порядка 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -9. \tag{1.9}$$

Очевидно, что миноров порядка 3 и выше у матрицы A нет.

Матрица A содержит минор второго порядка, отличный от нуля, например второй из миноров (1.9). Это максимально возможный порядок миноров. Следовательно, $\operatorname{rank} A = 2$. Базисных, т.е. отличных от нуля, миноров порядка 2 в данном случае два: второй и третий из миноров (1.9).

Свойства ранга матрицы

1. *Для матрицы A размера $m \times n$ её ранг* $\operatorname{rank} A \leqslant \min\{m, n\}$.
2. *Ранг матрицы не меняется при транспонировании.*

3. *Ранг матрицы не меняется при вычёркивании нулевого ряда.*
4. *Ранг матрицы не меняется в результате элементарных преобразований.*
5. *Ранг ступенчатой матрицы равен числу её строк.*

Доказательства этих утверждений легко выводятся из свойств определителей.

Для нахождения ранга матрицы можно, следуя определению, перебирать миноры матрицы[1]. Мы же обратим внимание на весьма эффективный *метод элементарных преобразований*, основанный на рассмотренных свойствах ранга матрицы. Суть этого метода в том, что матрица приводится к ступенчатому виду путём проведения элементарных преобразований и вычёркивания нулевых рядов.

Пример 1.24. Найти методом элементарных преобразований ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 8 & -2 \\ 7 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Выберем в матрице A элемент 1 в качестве разрешающего и занулим с его помощью другие элементы второго столбца:

$$\begin{pmatrix} 11 & \boxed{3} & 8 & -2 \\ 7 & \boxed{2} & 3 & 3 \\ 4 & \boxed{1} & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 & 13 \\ -1 & 0 & -7 & 13 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Переписывая третью строку, содержащую разрешающий элемент без изменений, проделаем аналогичную процедуру с первыми двумя строками:

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & -7 & 13 \\ \boxed{-1} & 0 & -7 & 13 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 & 13 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

[1] Отметим, что метод окаймления миноров, с которым можно ознакомиться в учебнике А.Г. Куроша «Курс высшей алгебры» [15], позволяет существенно сократить количество вычисляемых миноров.

Приведение матрицы A к ступенчатому виду завершилось вычёркиванием нулевой второй строки.

Полученная ступенчатая матрица имеет две строки, поэтому $\operatorname{rank} A = 2$. Определитель, составленный из двух первых столбцов ступенчатой матрицы, не равен нулю. Значит, в качестве базисного минора матрицы A можно взять соответствующий минор

$$\begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix},$$

стоящий на пересечении строк с номерами 1 и 3 и столбцов с номерами 1 и 2 матрицы A. □

1.2. Системы линейных алгебраических уравнений

1.2.1. Основные понятия
1.2.2. Матричный метод
1.2.3. Метод Крамера
1.2.4. Метод Гаусса
1.2.5. Критерий Кронекера — Капелли
1.2.6. Экономическая модель Леонтьева

1.2.1. Основные понятия

Определение 1.38. *Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными* (СЛАУ) называется система уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.10}$$

Числа a_{ij} называются *коэффициентами* при неизвестных, а b_i — *свободными членами* уравнений системы.

Определение 1.39. Системе линейных уравнений (1.10) ставят в соответствие матрицу и два вектора-столбца:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

называемые соответственно *основной матрицей*, *вектором неизвестных* и *вектором свободных членов*. *Расширенной матрицей* называется матрица

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

получаемая присоединением к основной матрице вектора-столбца свободных членов.

Система (1.10) может быть переписана в так называемой *матричной форме*:

$$AX = B, \tag{1.11}$$

где A, X, B — соответственно основная матрица, вектор неизвестных и вектор свободных членов.

Определение 1.40. *Решением системы* (1.10) называется набор значений неизвестных

$$x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad \ldots, \quad x_n = c_n,$$

обращающих все уравнения системы в верные равенства. *Решить систему* — значит найти все её решения.

Определение 1.41. Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Определение 1.42. Совместная система называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой*, если она имеет более одного решения.

Определение 1.43. Каждое отдельное решение неопределённой системы называется *частным*. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Определение 1.44. Две системы называются *эквивалентными*, если совокупности их решений совпадают. В частности, любые две несовместные системы считаются эквивалентными.

Нетрудно убедиться в том, что, не нарушая эквивалентности, можно выполнять элементарные преобразования над строками (но не над столбцами) расширенной матрицы системы.

Определение 1.45. *Однородной* называется система линейных уравнений, свободные члены b_i уравнений которой равны нулю. В противном случае, т.е. когда хотя бы один из свободных членов b_i отличен от нуля, система называется *неоднородной*.

Однородная система всегда совместна, так как имеет по крайней мере одно *тривиальное*, или *нулевое*, *решение*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0. \tag{1.12}$$

1.2.2. Матричный метод

Предположим, что основная матрица A системы (1.10) квадратная и невырожденная. Тогда существует обратная матрица A^{-1}. Умножив левую и правую части системы в матричной форме (1.11) слева на A^{-1}, получим:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B, \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B, \quad EX = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B.$$

Единственность найденного решения X гарантируется единственностью обратной матрицы A^{-1}.

Определение 1.46. Метод решения системы линейных уравнений $AX = B$ с невырожденной квадратной матрицей A по формуле $X = A^{-1}B$ называется *матричным*.

Пример 1.25. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y + z = 6, \\ 2x + y + z = 2, \\ x + y + 2z = 1. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Выпишем основную матрицу и вектор свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу A мы уже рассматривали в примере 1.21. Там мы убедились, что она невырожденная, и нашли обратную

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Находим вектор неизвестных X матричным методом:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1\cdot 6 + 3\cdot 2 + (-2)\cdot 1 \\ (-3)\cdot 6 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 6 + (-2)\cdot 2 + 3\cdot 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 \\ -15 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$ — решение системы. Чтобы убедиться в его правильности, выполним проверку:

$$x - y + z = 2 - (-3) + 1 = 6,$$
$$2x + y + z = 2\cdot 2 + (-3) + 1 = 2,$$
$$x + y + 2z = 2 + (-3) + 2\cdot 1 = 1.$$

Как это и требуется, все уравнения системы обратились в верные равенства. □

Замечание 1.11. Матричный способ является весьма трудоёмким с вычислительной точки зрения, так как требует отыскания обратной матрицы, что влечёт за собой вычисление $n^2 + 1$ определителей, помимо последующей операции умножения.

1.2.3. Метод Крамера

Теорема 1.5. *Единственное решение системы линейных уравнений $AX = B$ с невырожденной квадратной матрицей $A = (a_{ij})$ можно получить по формулам:*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.13}$$

где $\Delta = \det A$ — определитель основной матрицы, а определители

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.14}$$

получаются из Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов. [Доказательство]

Определение 1.47. Формулы (1.13) называются *формулами Крамера*. Метод решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей по формулам Крамера называется *методом Крамера*.

Пример 1.26. Решить систему линейных уравнений из примера 1.25 методом Крамера.

Р е ш е н и е. Определитель основной матрицы системы в данном случае совпадает с определителем, рассмотренным в примере 1.11. Там мы нашли, что $\Delta = 5$. Вычисляем определители Δ_i:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - \\ - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 6 = \\ = 12 - 1 + 2 - 1 + 4 - 6 = 10,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 6\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 1 - \\ - 1\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 6\cdot 2 = \\ = 4 + 6 + 2 - 2 - 1 - 24 = -15,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 6 - \\ - 1\cdot 1\cdot 6 - 1\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot 1 = \\ = 1 - 2 + 12 - 6 - 2 + 2 = 5.$$

По формулам Крамера (1.13) находим:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-15}{5} = -3, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1. \qquad \square$$

Замечание 1.12. Метод Крамера требует отыскания определителя системы Δ и n определителей Δ_i. Это делает его, как и матричный метод, весьма трудоёмким.

1.2.4. Метод Гаусса

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений состоит в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований, выполняемых над строками расширенной матрицы системы.

Будучи универсальным и вычислительно эффективным, метод Гаусса чаще всего применяется на практике. Его принято представлять в виде двух этапов: прямого и обратного хода.

Прямой ход состоит в последовательном исключении неизвестных. Для определённости будем считать, что в системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}x_1} + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \boxed{a_{21}x_1} + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \boxed{a_{31}x_1} + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boxed{a_{m1}x_1} + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

коэффициент $a_{11} \neq 0$. Если это не так, то выберем из коэффициентов a_{i1} при переменной x_1 какой-либо ненулевой и поменяем местами содержащую его строку с первой. Такой ненулевой коэффициент обязательно найдётся, поскольку в противном случае неизвестная x_1 не входила бы в систему. Теперь исключим переменную x_1 из всех уравнений системы, кроме первого. Для этого будем умножать обе части первого уравнения поочерёдно на

$$-\frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \quad \ldots, \quad -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$$

и прибавлять получаемые результаты к соответствующим частям второго, третьего и всех остальных уравнений системы.

В процессе исключения неизвестных можно получить уравнения, в которых все коэффициенты при неизвестных равны нулю. Если среди таких уравнений найдётся хотя бы одно, свободный член которого не равен нулю, то система несовместна, поскольку рассматриваемое уравнение не может обратиться в верное

равенство ни при каких значениях неизвестных. В таком случае решение завершается. Те уравнения с нулевыми коэффициентами, свободные члены которых равны нулю, верны независимо от значений неизвестных и потому просто отбрасываются.

После исключения неизвестной x_1 и отбрасывания нулевых строк придём к эквивалентной системе, число строк l которой не больше числа строк m исходной системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \boxed{a_{22}^{(2)}x_2} + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \boxed{a_{32}^{(2)}x_2} + a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boxed{a_{k2}^{(2)}x_2} + a_{k3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{kn}^{(2)}x_n = b_k^{(2)}. \end{cases}$$

На этом этапе первое уравнение уже сыграло свою роль и в дальнейшем просто переписывается.

Если $k = 1$, т.е. в системе осталось единственное уравнение, то прямой ход завершается. В противном случае система содержит другие уравнения, среди коэффициентов при неизвестных которых обязательно есть ненулевые. Для определённости будем считать, что $a_{22}^{(2)} \neq 0$. Если это не так, то, меняя порядок следования неизвестных, поместим на эту позицию любой из ненулевых элементов второй строки.

Теперь посредством второго уравнения исключаем переменную x_2 из всех уравнений начиная с третьего. Для этого выполняем те же операции, что и при исключении неизвестной x_1. Далее последовательно исключаем остальные неизвестные.

Прямой ход завершается приведением системы к *ступенчатому виду*, т.е. к такой эквивалентной системе, основная матрица которой имеет ступенчатый вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2k}^{(2)}x_k + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ a_{33}^{(3)}x_3 + \ldots + a_{3k}^{(3)}x_k + \ldots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{rr}^{(r)}x_r + \ldots + a_{rn}^{(r)}x_n = b_r^{(r)}. \end{cases} \tag{1.15}$$

Завершающий этап метода Гаусса, когда решается ступенчатая система (1.15), называется *обратным ходом* и осуществляется строго в обратном порядке по сравнению с прямым ходом. Из последнего уравнения неизвестная x_r выражается через $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Это возможно, так как коэффициент $a_{rr}^{(r)}$ не равен нулю. Затем найденное значение x_r подставляется в предпоследнее уравнение системы, что позволяет выразить x_{r-1} через всё те же $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Здесь мы опять используем тот факт, что коэффициент $a_{r-1,r-1}^{(r-1)}$ не равен нулю. Продолжая этот процесс, выразим неизвестные $x_1, \ldots, x_r$, называемые *базисными*, через неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$, называемые *свободными*. Если в системе есть свободные неизвестные, то им можно придавать любые действительные значения, и потому система имеет бесконечно много решений.

Замечание 1.13. В качестве базисных можно, вообще говоря, выбирать различные наборы неизвестных. Однако очевидно, что количество базисных неизвестных в любом таком наборе будет равно r, т.е. рангу основной матрицы системы. Соответственно число свободных неизвестных всегда будет равно $n - r$.

Ступенчатая система (1.15), число уравнений r которой равно числу неизвестных n, называется *треугольной*. Треугольная система имеет единственное решение, так как не содержит свободных неизвестных.

Замечание 1.14. Как видно, совместная система уравнений имеет единственное решение при $r = n$ и бесконечно много решений при $r < n$.

Замечание 1.15. При записи систем линейных уравнений, решаемых методом Гаусса, для удобства восприятия переменные с одинаковыми номерами, как правило, выравнивают, располагая их на одной вертикальной линии.

Замечание 1.16. В качестве разрешающих вовсе не обязательно выбирать коэффициенты, стоящие на главной диагонали основной матрицы системы. Мы так поступали, чтобы придать рассуждениям простой и наглядный вид. Это замечание позволяет избегать перестановки строк системы и смены порядка следования неизвестных, а также объявлять разрешающими только наиболее удобные для проведения вычислений коэффициенты (см. пример 1.27).

Пример 1.27. Решить систему линейных уравнений из примера 1.25 методом Гаусса.

Р е ш е н и е. Выполняем прямой ход метода Гаусса:

$$\begin{cases} \boxed{x} - y + z = 6, \\ \boxed{2x} + y + z = 2, \\ \boxed{x} + y + 2z = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + z = 6, \\ 3y - \boxed{z} = -10, \\ 2y + \boxed{z} = -5, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + z = 6, \\ 5y = -15, \\ 2y + z = -5. \end{cases}$$

Полученная система ступенчатая, так как может быть приведена к виду (1.15) путём перестановки строк и смены порядка следования неизвестных. Поскольку число её уравнений равно числу неизвестных, она имеет треугольный вид, что гарантирует единственность решения.

Выполняем обратный ход:

$$y = \frac{-15}{5} = -3, \quad z = 5 - 2y = -5 - 2(-3) = 1,$$
$$x = 6 + y - z = 6 + (-3) - 1 = 2.$$

Итак, $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$. □

Замечание 1.17. Для сокращения записи и увеличения наглядности преобразования прямого хода метода Гаусса часто выполняют с коэффициентами расширенной матрицей системы.

Пример 1.28. Решить систему $\begin{cases} 3x_1 - 9x_2 + 10x_3 = -21, \\ -3x_1 + 6x_2 - 8x_3 = 12, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = -11, \\ 5x_1 - 11x_2 + 14x_3 = -23. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Будем оперировать с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \boxed{3} & -9 & 10 & -21 \\ \hline -3 & 6 & -8 & 12 \\ 2 & -5 & 6 & -11 \\ 5 & -11 & 14 & -23 \end{array}\right).$$

Ни в одном столбце этой матрицы нет элемента, на который делились бы нацело остальные элементы столбца. Именно такие элементы мы делали разрешающими во избежание дробей в вычислениях. Чтобы справиться с этой проблемой, домножим третью и четвёртую строки на 3. Тогда все элементы первого столбца окажутся кратными его первому элементу, который мы и выберем разрешающим:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \boxed{3} & -9 & 10 & -21 \\ \hline -3 & 6 & -8 & 12 \\ 6 & -15 & 18 & -33 \\ 15 & -33 & 42 & -69 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|ccc} 3 & -9 & 10 & -21 \\ \hline 0 & -3 & 2 & -9 \\ 0 & 3 & -2 & 9 \\ 0 & 12 & -8 & 36 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 3 & -9 & 10 & -21 \\ \hline 0 & \boxed{-3} & 2 & -9 \\ 0 & 3 & -2 & 9 \\ 0 & 3 & -2 & 9 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|ccc} 3 & -9 & 10 & -21 \\ \hline 0 & -3 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|ccc} 3 & -9 & 10 & -21 \\ \hline 0 & -3 & 2 & -9 \end{array}\right).$$

Отсюда получим:

$$x_2 = \frac{2}{3}x_3 + 3,$$

$$x_1 = 3x_2 - \frac{10}{3}x_3 - 7 = 3\left(\frac{2}{3}x_3 + 3\right) - \frac{10}{3}x_3 - 7 = -\frac{4}{3}x_3 + 2.$$

В данном случае неизвестные x_1 и x_2 — базисные, неизвестная x_3 — свободная. Положив $x_3 = 3\alpha$, где α — произвольное действительное число, получим общее решение:

$$x_1 = -4\alpha + 2, \quad x_2 = 2\alpha + 3, \quad x_3 = 3\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Придавая α произвольные значения, можно получить любое решение системы. Например, при $\alpha = 0$ получим частное решение $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$. □

1.2.5. Критерий Кронекера — Капелли

Часто бывает необязательно знать само решение системы линейных уравнений, а достаточно понимать, разрешима она в принципе или нет. Ответ на этот вопрос может дать приводимый ниже общий критерий.

Теорема 1.6 (критерий Кронекера — Капелли). *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу её расширенной матрицы:*

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

Если при этом ранг r равен числу неизвестных n, то система имеет единственное решение. Если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений, определяемых $n - r$ свободными неизвестными.

[Доказательство]

Применим критерий Кронекера — Капелли к однородным системам линейных уравнений.

Теорема 1.7. *Однородная система линейных уравнений с n неизвестными и основной матрицей A имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы меньше числа неизвестных, т.е.* $\operatorname{rank} A < n$.

[Доказательство]

Следствие 1.1. *Если число уравнений однородной системы меньше числа её неизвестных, то система имеет ненулевое решение.*

Следствие 1.2. *Если в однородной системе число уравнений равно числу неизвестных, то она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы системы равен нулю.*

[Доказательство]

Пример 1.29. Решить систему $\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Данная система однородная, поэтому для её решения будет достаточно привести с помощью элементарных преобразований строк к ступенчатому виду основную, а не расширенную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 8 & -2 \\ 7 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Это уже было сделано нами в задаче 1.24 при нахождении ранга матрицы A. Там мы пришли к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 & 13 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим:

$$x_1 = -7x_3 + 13x_4$$
$$x_2 = -4x_1 - 5x_3 + 5x_4 = -4(-7x_3+13x_4) - 5x_3 + 5x_4 = 23x_3 - 47x_4.$$

Переменные x_3 и x_4 свободные. Положив $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, получим общее решение:

$$x_1 = -7\alpha + 13\beta,\ x_2 = 23\alpha - 47\beta,\ x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

□

1.2.6. Экономическая модель Леонтьева

Предположим, что экономика страны насчитывает n отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идёт на внутрипроизводственное потребление данной отраслью и другими отраслями, а другая часть предназначена для целей конечного личного и общественного потребления, лежащего вне сферы материального производства.

Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени, например год. Введём следующие обозначения.

Определение 1.48. *Вектором валового выпуска* назовём вектор-столбец $X = (x_i)$, где x_i — общий, или валовой, объём продукции i-й отрасли.

Определение 1.49. *Вектором конечного продукта* назовём вектор-столбец $Y = (y_i)$, где y_i — объём конечного продукта i-й отрасли для непроизводственного потребления.

Определение 1.50. *Матрицей прямых затрат* назовём квадратную матрицу $A = (a_{ij})$, где a_{ij} — *коэффициенты прямых затрат*, показывающие затраты продукции i-й отрасли на производство единицы продукции j-й отрасли.

Так как валовой объём продукции i-й отрасли равен суммарному объёму её продукции, потребляемой всеми отраслями, и конечного продукта, то

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.16}$$

Определение 1.51. Уравнения (1.16) называются *соотношениями баланса* и задают *модель Леонтьева многоотраслевой экономики*.

Перепишем соотношения баланса (1.16) в виде системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right) = y_1, \\ x_2 - \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\right) = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n - \left(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n\right) = y_n. \end{cases}$$

Полученную систему преобразуем к матричному виду:

$$X - AX = Y, \quad EX - AX = Y, \quad (E - A)X = Y, \tag{1.17}$$

где E — единичная матрица.

Основная задача межотраслевого баланса состоит в отыскании такого валового объёма продукции для каждой из отраслей, который при известных прямых затратах обеспечивает заданный конечный продукт.

Из экономического смысла матрицы A и вектора Y следует, что все их элементы неотрицательны. В данном подпараграфе мы будем называть такие матрицы *неотрицательными*, а матрицы со строго положительными элементами — *положительными*. Очевидно, что вектор неизвестных X также должен быть неотрицательным. Сформулируем условия, обеспечивающие выполнение этого требования.

Определение 1.52. Неотрицательная матрица A называется *продуктивной*, если для любого неотрицательного вектора Y существует неотрицательное решение X системы (1.17). В этом случае и модель Леонтьева, определяемая матрицей A, также называется продуктивной.

Существует несколько критериев продуктивности матрицы прямых затрат. Приведём некоторые из них.

Теорема 1.8 (первый критерий продуктивности). *Если матрица A неотрицательная и для некоторого положительного вектора Y^* система (1.17) имеет неотрицательное решение X, то матрица A продуктивна.*

Из соотношения (1.17) в случае существования обратной матрицы $(E - A)^{-1}$ следует, что

$$X = (E - A)^{-1}Y.$$

Матрица $(E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*.

Следующая теорема даёт более эффективное условие продуктивности.

Теорема 1.9 (второй критерий продуктивности). *Неотрицательная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E-A)^{-1}$ существует и неотрицательна.*

Теорема 1.10 (третий критерий продуктивности). *Неотрицательная матрица A продуктивна, если сумма элементов любого её столбца или любой строки меньше единицы.*

Пример 1.30. Определите вектор X валового выпуска продукции трёх отраслей, если известны матрица прямых затрат A и вектор конечного продукта Y:

$$A=\begin{pmatrix}0{,}08 & 0{,}10 & 0{,}14\\ 0{,}03 & 0{,}04 & 0{,}09\\ 0{,}06 & 0{,}08 & 0{,}06\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}510\\405\\482\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Сразу отметим, что, согласно третьему критерию продуктивности, матрица A является продуктивной. Будем приводить к ступенчатому виду расширенную матрицу $(E-A|Y)$ системы (1.17):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}92 & -0{,}10 & -0{,}14 & 510\\ -0{,}03 & 0{,}96 & -0{,}09 & 405\\ -0{,}06 & -0{,}08 & 0{,}94 & 482\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{46} & -5 & -7 & 25\,500\\ \boxed{-1} & 32 & -3 & 13\,500\\ \boxed{-3} & -4 & 47 & 24\,100\end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1467} & -145 & 646\,500\\ -1 & 32 & -3 & 13\,500\\ 0 & \boxed{-100} & 56 & -16\,400\end{array}\right).$$

Домножим первую строку матрицы на 100, чтобы сделать второй её элемент кратным выбранному разрешающему элементу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{146700} & -14\,500 & 64\,650\,000\\ -1 & 32 & -3 & 13\,500\\ 0 & \boxed{-100} & 56 & -16\,400\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 67652 & 40\,591\,200\\ -1 & 32 & -3 & 13\,500\\ 0 & -100 & 56 & -16\,400\end{array}\right).$$

Отсюда получаем:

$$x_3 = 600, \quad x_2 = \frac{56x_3 + 16\,400}{100} = 500, \quad x_1 = 32x_2 - 3x_3 - 13\,500 = 700.$$

Итак, чтобы обеспечить конечный продукт Y, необходимо выпустить 700 единиц продукции первой отрасли, 500 — второй и 600 — третьей отрасли. □

1.3. Векторная алгебра

1.3.1. Векторы в пространстве
1.3.2. Алгебраическое описание вектора
1.3.3. Скалярное произведение векторов
1.3.4. n-мерное векторное пространство
1.3.5. Линейная зависимость векторов
1.3.6. Базис и ранг системы векторов
1.3.7. Базис пространства
1.3.8. Ортогональные системы векторов
1.3.9. Собственные векторы и собственные значения

1.3.1. Векторы в пространстве

Многие величины, например сила и скорость, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие величины называются *векторными*.

Определение 1.53. *Вектором* $\overrightarrow{AB}$ называется направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B. Определённый таким образом вектор называют ещё *связанным*.

Определение 1.54. *Длиной* или *модулем вектора* называется длина соответствующего направленного отрезка. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначается $|\overrightarrow{AB}|$.

Определение 1.55. Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* и обозначается $\mathbf{0}$.

Определение 1.56. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* или *ортом* и обозначается $\mathbf{e}$.

Определение 1.57. Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ могут быть *одинаково направлены*, иначе сонаправлены, или *противоположно направлены*, что соответственно обозначается $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ или $\overrightarrow{AB} \downuparrows \overrightarrow{CD}$.

Определение 1.58. Два вектора называются *равными*, если они имеют равные длины и сонаправлены.

Определение 1.59. *Свободным вектором* или *параллельным переносом* называется совокупность равных между собой векторов.

У свободного вектора нет определённых начальной и конечной точек, поэтому для его обозначения применяются строчные буквы латинского алфавита, например $\mathbf{a}$.

Определение 1.60. *Углом между векторами* называется наименьший угол, на который надо повернуть один из векторов, чтобы его направление совпадало с направлением второго. Для угла φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ вводится обозначение $\varphi = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$.

Ясно, что для всякого угла φ между векторами верно двойное неравенство $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Определение 1.61. Если $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \pi/2$, то говорят, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ *ортогональны*, и пишут $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Определение 1.62. *Произведением вектора* $\mathbf{a}$ *на число* k называется вектор $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$, длина которого $|\mathbf{b}| = |k||\mathbf{a}|$ и направление совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$, если $k > 0$, и противоположно ему, если $k < 0$ (рис. 1.4).

Замечание 1.18. Из определения 1.62 следует, что ненулевые векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда для некоторого числа k верно равенство $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$, причём при $k > 0$ векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ сонаправлены, при $k < 0$ — противоположно направлены.

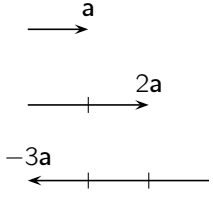

Рис. 1.4

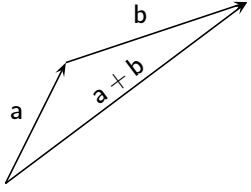

Рис. 1.5

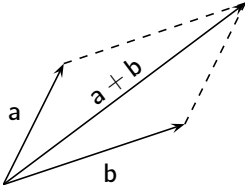

Рис. 1.6

Определение 1.63. *Противоположным вектором* $-\mathbf{a}$ называется произведение вектора $\mathbf{a}$ на число -1, т.е. $-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a}$.

Определение 1.64. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — любые два вектора. Поместим начало вектора $\mathbf{b}$ в конец вектора $\mathbf{a}$. Вектор, соединяющий начало вектора $\mathbf{a}$ с концом вектора $\mathbf{b}$, назовём *суммой векторов* $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и будем обозначать $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Это правило сложения векторов называют *правилом треугольника* (рис. 1.5).

Сумму двух векторов можно построить также по *правилу параллелограмма* (рис. 1.6). Сложить несколько векторов можно по *правилу ломаной*, которое является обобщением правила треугольника (рис. 1.7).

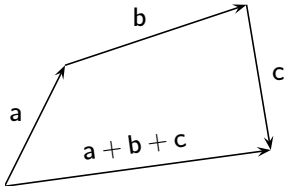

Рис. 1.7

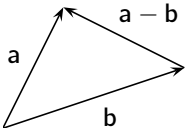

Рис. 1.8

Определение 1.65. *Разностью двух векторов* $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется сумма вектора $\mathbf{a}$ и вектора $-\mathbf{b}$, противоположного $\mathbf{b}$ (рис. 1.8).

Определение 1.66. *Линейными операциями над векторами* называются операции сложения и вычитания векторов и операция умножения вектора на число.

1.3.2. Алгебраическое описание вектора

Для алгебраического описания векторов их связывают с некоторой прямоугольной декартовой системой координат.

Определение 1.67. Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{a}$ на плоскости. Поместим его начало в начало выбранной прямоугольной декартовой системы координат. Тогда конец вектора $\mathbf{a}$ однозначно определит некоторую точку M плоскости, координаты x, y которой будем называть *координатами вектора* $\mathbf{a}$ (рис. 1.9).

Наоборот, задав произвольную точку плоскости $M(x, y)$, мы тем самым определим вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{OM}$ (рис. 1.9).

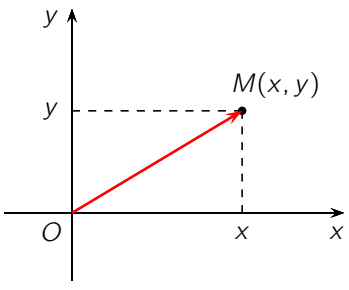

Рис. 1.9

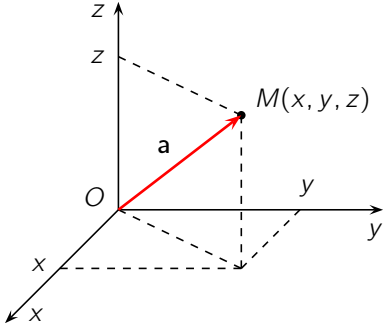

Рис. 1.10

Аналогично устанавливается взаимно однозначное соответствие векторов и точек пространства. В этом случае координатами вектора $\mathbf{a}$ считаются координаты x, y, z соответствующей точки M пространства. В дальнейшем мы сосредоточимся на рассмотрении пространственного случая.

Замечание 1.19. Мы установили взаимно однозначное соответствие точек трёхмерного пространства или плоскости и векторов. Это позволяет полностью отвлечься от геометрического смысла векторов и иметь дело лишь с координатами.

Согласно теореме Пифагора длина вектора $\mathbf{a}$ с координатами x, y, z (рис. 1.10) может быть найдена по формуле

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1.18}$$

Линейные операции над векторами сводятся к соответствующим линейным операциям над их координатами. А именно, верна следующая теорема.

Теорема 1.11. *Если $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и k — число, то*

$$k\boldsymbol{a} = (kx_1, ky_1, kz_1), \quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2). \tag{1.19}$$

Если даны две точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то вектор с началом в точке M_1 и концом в точке M_2

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = \\ = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Расстояние M_1M_2 между точками $M_1(x, y, z)$ и $M_2(x, y, z)$ пространства равно длине вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$M_1M_2 = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{1.20}$$

Теорема 1.12. *Ненулевые векторы $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны:*

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

[Доказательство]

Все перечисленные выше результаты верны и для векторов на плоскости. Например, расстояние между точками $M_1(x, y)$ и $M_2(x, y)$ может быть вычислено по формуле

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.21}$$

1.3.3. Скалярное произведение векторов

Определение 1.68. *Скалярным произведением двух векторов* называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначается $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ или просто $\mathbf{ab}$. Итак,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}). \tag{1.22}$$

Замечание 1.20. Ясно, что два ненулевых вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.

Следующая теорема позволяет выражать скалярное произведение двух векторов через их координаты.

Теорема 1.13. *Если* $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$ *и* $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$, *то*

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{1.23}$$

[Доказательство]

Скалярное произведение обладает следующими свойствами, которые легко выводятся из определения 1.68 либо координатного представления (1.23):

1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$;
2) $(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$;
3) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$;
4) $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$.

Скалярное произведение применяют для вычисления угла между векторами. В самом деле, по определению скалярного произведения (1.22) и представлениям через координаты скалярного произведения (1.23) и длины вектора (1.18)

$$\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \tag{1.24}$$

Скалярное произведение векторов на плоскости определяется так же и имеет такие же свойства. В частности, если $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$ и $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, то

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2, \quad \cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

1.3.4. n-мерное векторное пространство

Отвлекаясь от геометрической природы вектора, мы заменили его упорядоченной тройкой чисел — координатами. Оказывается, существуют объекты различной, а не только геометрической, природы, которые ведут себя, как векторы. Таким объектам можно поставить в соответствие упорядоченный набор действительных чисел, который позволит исследовать их теми же методами, что и векторы в пространстве.

Пример 1.31. Алгебраическому многочлену третьей степени

$$P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

можно поставить в соответствие упорядоченный набор (a_0, a_1, a_2, a_3) из четырёх чисел — его коэффициентов.

Пример 1.32. Каждой матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

размера 2×3 соответствует набор $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23})$, состоящий из шести чисел.

Пример 1.33. Если для производства изделий определённого вида используется пять ресурсов, то каждому изделию этого вида можно поставить в соответствие упорядоченный набор $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ чисел, показывающих, сколько единиц соответствующего ресурса требуется для производства изделия.

Рассмотренные примеры свидетельствуют о том, что для алгебраического описания объектов общего вида трёх координат может быть недостаточно. Это приводит к целесообразности обобщения понятия вектора на случай любой конечной упорядоченной совокупности действительных чисел. Такая абстракция избавляет от необходимости изучения алгебраических свойств объектов каждого типа в отдельности.

Определение 1.69. *n-мерным вектором* $\mathbf{x}$ назовём упорядоченную совокупность n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые будем называть *координатами вектора* $\mathbf{x}$.

Определение 1.70. *Линейные операции над n-векторами*

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

определяются как обобщение линейных операций (1.19) над векторами в пространстве в координатной форме:

$$\begin{aligned} k\mathbf{x} &= (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n), \\ \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y} &= (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n). \end{aligned}$$

Определение 1.71. Совокупность всех n-мерных векторов, для которых определены линейные операции, называется *n-мерным векторным пространством* и обозначается $\mathbb{R}^n$.

Линейные операции над векторами сводятся к операциям над их координатами, которые являются действительными числами, поэтому приводимые ниже законы, справедливые для действительных чисел, распространяются и на n-векторы. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $k, l \in \mathbb{R}$. Имеют место приведённые ниже свойства.

1 (коммутативность сложения). $x + y = y + x$.

2 (ассоциативность сложения). $(x + y) + z = x + (y + z)$.

3 (ассоциативность умножения на число). $k(lx) = (kl)x$.

4 (дистрибутивность сложения векторов). $k(x + y) = kx + ky$.

5 (дистрибутивность сложения чисел). $(k + l)x = kx + lx$.

6 (существование нулевого вектора). $\exists\, 0 \in \mathbb{R}^n\colon\ x + 0 = x$.

7 (существование противоположного вектора).

$$\exists\, (-x) \in \mathbb{R}^n\colon\ x + (-x) = 0.$$

8 (существование единицы при умножении на скаляр).

$$1x = x.$$

1.3.5. Линейная зависимость векторов

Рассмотрим систему, состоящую из k n-мерных векторов:

$$\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_k. \tag{1.25}$$

Определение 1.72. Вектор $\mathbf{a}$ называется *линейной комбинацией системы векторов* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, что

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{b}_k.$$

Определение 1.73. Система векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{b}_k = \mathbf{0}. \tag{1.26}$$

Определение 1.74. Система векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$, которая не является линейно зависимой, называется *линейно независимой*. Для линейно независимой системы равенство (1.26) возможно лишь в случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Теорема 1.14. *Если среди векторов системы (1.25) есть нулевой вектор, то эта система линейно зависима.* [Доказательство]

Теорема 1.15. *Если система (1.25) содержит линейно зависимую подсистему, то она сама линейно зависима.* [Доказательство]

Следствие 1.3. *Если система векторов (1.25) линейно независима, то и любая её подсистема линейно независима.* [Доказательство]

Теорема 1.16. *Для того чтобы система (1.25) была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из её векторов линейно выражался через остальные.* [Доказательство]

Теорема 1.17. *Если линейно независимая система (1.25) становится зависимой после добавления вектора $\mathbf{a}$, то последний линейно выражается через векторы системы (1.25).* [Доказательство]

Определение 1.75. Если вектор $\mathbf{a}$ является линейной комбинацией векторов линейно независимой системы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$, т.е.

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \ldots + a_k\mathbf{b}_k, \tag{1.27}$$

то числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называются *координатами вектора* $\boldsymbol{a}$ *в системе* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$.

Теорема 1.18. *Координаты вектора* $\boldsymbol{a}$ *в линейно независимой системе* (1.25) *определяются однозначно, т.е. разложение* (1.27) *единственно.* [Доказательство]

Определение 1.76. *Единичными векторами n-мерного пространства* назовём векторы

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0),\\
\mathbf{e}_3 &= (0, 0, 1, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{e}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Теорема 1.19. *Система единичных векторов* (1.28) *линейно независима.* [Доказательство]

Теорема 1.20. *Любой вектор* $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *n-мерного пространства является линейной комбинацией единичных векторов этого пространства, причём координаты вектора* $\boldsymbol{a}$ *в системе* (1.28) *совпадают с его координатами* $a_1, a_2, \ldots, a_n$. [Доказательство]

1.3.6. Базис и ранг системы векторов

Определение 1.77. *Базисом системы векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ называется содержащая максимально возможное количество векторов её линейно независимая подсистема.

Замечание 1.21. Система векторов может иметь несколько базисов, причём все они содержат одинаковое число векторов.

Определение 1.78. Число элементов базиса называется *рангом системы векторов*.

Определение 1.79. Пусть известны координаты системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ в линейно независимой системе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$:

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1k}), \quad \mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2k}), \ldots,$$
$$\mathbf{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mk}).$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} \end{pmatrix}, \tag{1.29}$$

составленная из этих координат, называется *матрицей системы векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ в системе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$.

Теорема 1.21. *Система векторов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, *имеющая матрицу* (1.29) *в линейно независимой системе* $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$, *линейно зависима тогда и только тогда, когда число* m *векторов этой системы больше ранга* r *матрицы* (1.29). [Доказательство]

Следствие 1.4. *Для того чтобы система из* k *векторов была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы её матрица в любой линейно независимой системе, состоящей из* k *векторов, была невырожденной.*

Следствие 1.5. *Система из m векторов, представимых в виде линейных комбинаций векторов k-элементной линейно независимой системы, линейно зависима, если $m > k$.*

Теорема 1.22. *Ранг системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ равен рангу r матрицы A этой системы в любой линейно независимой системе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$, причём в качестве базиса системы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ можно взять её подсистему, соответствующую произвольному базисному минору матрицы A.* [Доказательство]

Пример 1.34. Найти ранг и какой-либо базис системы векторов

$$\mathbf{a}_1 = (11, 3, 8, -2), \quad \mathbf{a}_2 = (7, 2, 3, 3), \quad \mathbf{a}_3 = (4, 1, 5, -5).$$

Р е ш е н и е. Матрица данной системы векторов в системе единичных векторов совпадает с матрицей A, рассмотренной в примере 1.24. Там мы нашли, что $\operatorname{rank} A = 2$ и в качестве базисного можно взять минор матрицы A, стоящий на пересечении строк 1 и 3 со столбцами 1 и 2. Тогда по теореме 1.22 ранг данной системы векторов равен 2, а в качестве базиса можно взять векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_3$. □

1.3.7. Базис пространства

Определение 1.80. *Базисом n-мерного векторного пространства* назовём любые n линейно независимых векторов этого пространства.

Теорема 1.23. *Любой вектор* $\mathbf{a}$ *n-мерного векторного пространства разлагается по любому базису этого пространства* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, *причём единственным образом.* [Доказательство]

Теорема 1.24. *Не существует линейно независимой системы* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ *с числом векторов* k, *меньшим* n, *по которой бы разлагался любой вектор n-мерного векторного пространства.*
[Доказательство]

Следствие 1.6. *Линейно независимая система* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$, *число векторов* k *которой меньше* n, *может быть дополнена до базиса всего n-мерного векторного пространства.* [Доказательство]

Замечание 1.22. На практике дополнять систему векторов до базиса удобнее всего с помощью единичных векторов.

Пример 1.35. Показать, что векторы

$$\mathbf{b}_1 = (1, 2, 1), \quad \mathbf{b}_2 = (-1, 1, 1), \quad \mathbf{b}_3 = (1, 1, 2)$$

образуют базис, и разложить вектор $\mathbf{a} = (6, 2, 1)$ по этому базису.

Р е ш е н и е. В примере 1.11 было найдено, что определитель матрицы A системы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ равен 5, т.е. матрица A невырожденная. Тогда по следствию 1.5 система $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ линейно независима и образует базис.

Найдём коэффициенты a_1, a_2 и a_3 разложения

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + a_3\mathbf{b}_3$$

вектора $\mathbf{a}$ по данному базису. Для этого приравняем левую и правую части разложения покоординатно. Получим систему линейных уравнений относительно неизвестных a_1, a_2 и a_3:

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 = 6, \\ 2a_1 + a_2 + a_3 = 2, \\ a_1 + a_2 + 2a_3 = 1, \end{cases}$$

Эта система решена в примере 1.27, где было найдено, что $a_1 = 2$, $a_2 = -3$, $a_3 = 1$. Выписываем искомое разложение:

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3. \qquad \square$$

Определение 1.81. Подмножество W пространства $\mathbb{R}^n$ будем называть *подпространством*, если для любых двух векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ из W и любого числа k векторы $k\mathbf{a}$ и $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ принадлежат W.

Определение 1.82. Любую максимальную линейно независимую систему векторов подпространства W будем называть *базисом этого подпространства*.

Для подпространства имеет место следующее утверждение, аналогичное теореме 1.23.

Теорема 1.25. *Любой вектор подпространства может быть разложен единственным образом по базису этого подпространства.*

Определение 1.83. Число векторов в базисе подпространства назовём *размерностью подпространства*.

Замечание 1.23. Очевидно, что размерность подпространства n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ не превосходит n.

Вектор неизвестных системы линейных уравнений по сути является n-мерным вектором. Это позволяет применять к решениям систем линейных уравнений теорию векторных пространств. Легко проверяется справедливость следующей теоремы.

Теорема 1.26. *Множество решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными образует подпространство векторного пространства $\mathbb{R}^n$.*

Определение 1.84. *Фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений* называется базис её подпространства решений.

В качестве следствия теоремы Кронекера — Капелли можно доказать следующий результат.

Теорема 1.27. *Если ранг r матрицы однородной системы линейных уравнений меньше числа n её переменных, то фундаментальная система решений содержит $n - r$ векторов.*

Пример 1.36. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для однородной системы уравнений из примера 1.29.

Р е ш е н и е. В примере 1.29 было найдено общее решение:

$$x_1 = -7\alpha + 13\beta,\ x_2 = 23\alpha - 47\beta,\ x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Чтобы получить фундаментальную систему решений, поочерёдно приравниваем нулю все свободные неизвестные, кроме одной, которой придаём какое-либо ненулевое значение, например 1. Такой приём гарантирует линейную независимость получаемых частных решений. В данном случае имеем два решения:

$$\mathbf{a} = (-7, 23, 1, 0), \quad \mathbf{b} = (13, -47, 0, 1).$$

Очевидно, что общее решение представимо в виде $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Фундаментальная система в данном случае содержит два решения, что полностью согласуется с теоремой 1.27. □

1.3.8. Ортогональные системы векторов

В трёхмерном пространстве скалярное произведение двух векторов определялось по формуле (1.22) через длины векторов и угол между ними. В n-мерном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ обычно поступают по-другому. Скалярное произведение вводят, отталкиваясь от координатного представления (1.23) векторов. Понятия модуля, или длины, а также угла между векторами определяются через скалярное произведение.

Определение 1.85. *Скалярным произведением n-мерных векторов* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется число, равное сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Определение 1.86. *Модулем n-мерного вектора* $\mathbf{x}$ называется корень квадратный из скалярного произведения этого вектора на самого себя:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

За основу понятия угла между векторами берётся формула (1.24) для нахождения угла между трёхмерными векторами через скалярное произведение.

Определение 1.87. *Косинус угла между n-мерными векторами* $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ определяется следующим образом:

$$\cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}}.$$

Замечание 1.24. Можно доказать, что $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$, и, таким образом, выражение, задающее косинус угла между векторами, как мы того и ожидаем, не превосходит по модулю единицы.

Определение 1.88. *Расстоянием M_1M_2 между точками*

$$M_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad M_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

называется длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$M_1M_2 = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$

Из определения скалярного произведения вытекает справедливость следующих его свойств:

1) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$;
2) $(k\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = k(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$;
3) $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$.

Определение 1.89. *Евклидово пространство* — это n-мерное векторное пространство, в котором задано скалярное произведение.

Определение 1.90. Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ n-мерного пространства назовём *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. если $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

Определение 1.91. Набор ненулевых взаимно ортогональных векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_k$ будем называть *ортогональной системой векторов*.

Замечание 1.25. Для ортогональной системы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_k$ справедливо, что $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = 0$, если $i \neq j$.

Пример 1.37. Простейшей ортогональной системой является система единичных векторов (1.28).

Теорема 1.28. *Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ представим в виде линейной комбинации векторов ортогональной системы $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, ..., $\boldsymbol{b}_k$:*

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{b}_1 + a_2\boldsymbol{b}_2 + \ldots + a_k\boldsymbol{b}_k.$$

Тогда коэффициенты a_1, a_2, ..., a_k этого разложения могут быть найдены по формулам:

$$a_i = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}_i}{|\boldsymbol{b}_i|^2}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{1.30}$$

[Доказательство]

Теорема 1.29. *Ортогональная система векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ линейно независима.* [Доказательство]

Следствие 1.7. *Ортогональная система, состоящая из n векторов, образует базис n-мерного векторного пространства.*

Определение 1.92. Базис, образованный ортогональной системой векторов, называется *ортогональным базисом*.

Определение 1.93. Ортогональный базис, длины векторов которого равны единице, называется *ортонормированным*.

Пример 1.38. Система единичных векторов (1.28) является ортонормированным базисом пространства $\mathbb{R}^n$. Частный случай этого базиса — базис $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ в $\mathbb{R}^3$.

Теорема 1.30. *Координаты вектора в ортонормированном базисе равны скалярным произведениям этого вектора на соответствующие базисные векторы.* [Доказательство]

Пример 1.39. Проверить, образует ли ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^3$ система векторов

$$\mathbf{b}_1 = \left(-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right), \quad \mathbf{b}_2 = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{2}{7}\right), \quad \mathbf{b}_3 = \left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right),$$

и найти разложение вектора $\mathbf{a} = (2, -3, 1)$ в этом базисе.

Р е ш е н и е. Вычисляем попарные скалярные произведения:

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = -\frac{6}{49} + \frac{18}{49} - \frac{12}{49} = 0, \quad \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_3 = -\frac{12}{49} - \frac{6}{49} + \frac{18}{49} = 0,$$
$$\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_3 = \frac{18}{49} - \frac{12}{49} - \frac{6}{49} = 0.$$

Итак, система ортогональная. Несложно убедиться, что длины всех векторов системы равны единице, поэтому система ортонормированная. Количество векторов в системе равно размерности пространства $\mathbb{R}^3$. Значит, данная система образует ортонормированный базис.

Координаты a_1, a_2, a_3 вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ найдём с помощью теоремы 1.30:

$$a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_1 = (2, -3, 1)\left(-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right) = -1,$$

$$a_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_2 = (2, -3, 1)\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{2}{7}\right) = -2,$$

$$a_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_3 = (2, -3, 1)\left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right) = 3.$$

□

1.3.9. Собственные векторы и собственные значения

Определение 1.94. Число λ называется *собственным значением квадратной матрицы* A, если существует такой ненулевой вектор-столбец X, для которого

$$AX = \lambda X. \tag{1.31}$$

При этом вектор-столбец X, удовлетворяющий равенству (1.31), называется *собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению λ*.

Преобразуем равенство (1.31):

$$AX = \lambda X, \quad AX = \lambda EX, \quad AX - \lambda EX = O,$$

где O — нуль-матрица. Отсюда выводим матричное равенство

$$(A - \lambda E)X = O, \tag{1.32}$$

в развёрнутом виде представляющее собой линейную однородную систему уравнений с вектором неизвестных X.

Определение 1.95. Определитель основной матрицы однородной системы (1.32)

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \tag{1.33}$$

называется *характеристическим многочленом матрицы* A.

Определение 1.96. Уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

получаемое приравниванием нулю характеристического многочлена матрицы A, называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами матрицы* A.

Теорема 1.31. *Число λ является собственным значением квадратной матрицы A тогда и только тогда, когда оно будет характеристическим числом этой матрицы.* [Доказательство]

Определение 1.97. Совокупность всех собственных значений квадратной матрицы A с учётом их кратности как корней характеристического уравнения называется *спектром матрицы* A.

Свойства собственных векторов

1. *Собственный вектор матрицы A соответствует единственному собственному значению.* [Доказательство]

2. *Множество собственных векторов, соответствующих одному собственному значению λ, является подпространством векторного пространства $\mathbb{R}^n$.* [Доказательство]

3. *Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.* [Доказательство]

Пример 1.40. Найти собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Выписываем характеристический многочлен (1.33):

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 \\ -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-4-\lambda) + 18 =$$
$$= \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

Имеем два собственных значения: $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 2$.

Находим собственный вектор X_1, соответствующий значению λ_1, как ненулевое решение однородной системы $(A - \lambda_1 E)X_1 = O$. Для решения этой системы приводим её основную матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 5-(-1) & 6 \\ -3 & -4-(-1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ \boxed{1} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Этой ступенчатой матрице соответствует уравнение $x + y = 0$. Его общее решение имеет вид $y = -x$, где x может принимать любое значение. В качестве ненулевого можно выбрать, например, частное решение $x = 1$, $y = -1$, определяющее собственный вектор $X_1 = (1, -1)$.

Аналогичным образом отыскиваем собственный вектор X_2, соответствующий значению λ_2, как ненулевое решение однородной системы $(A - \lambda_2 E)X_2 = O$:

$$\begin{pmatrix} 5-2 & 6 \\ -3 & -4-2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение этой системы имеет вид $x = -2y$, где $y \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что можно, например, принять $X_2 = (-2, 1)$. □

Глава 2

Аналитическая геометрия

2.1. Прямая на плоскости
2.2. Кривые второго порядка

2.1. Прямая на плоскости

2.1.1. Простейшие задачи
2.1.2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом
2.1.3. Составление уравнений прямых
2.1.4. Общее уравнение прямой
2.1.5. Уравнение прямой «в отрезках»
2.1.6. Угол между двумя прямыми
2.1.7. Условия параллельности и перпендикулярности
2.1.8. Расстояние от точки до прямой
2.1.9. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

2.1.1. Простейшие задачи

В основе аналитической геометрии лежит возможность однозначного описания точек с помощью упорядоченных наборов чисел, называемых *координатами*. Это позволяет активно применять алгебраические методы для решения геометрических задач.

Выберем на плоскости прямоугольную декартову систему координат. Как мы уже знаем из векторной алгебры (см. формулу (1.21)), расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ плоскости (рис. 2.1) может быть найдено следующим образом:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

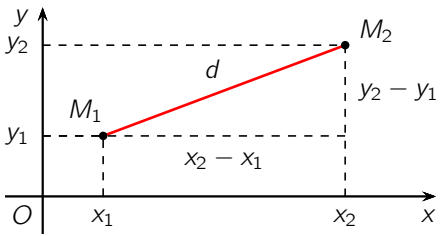

Рис. 2.1

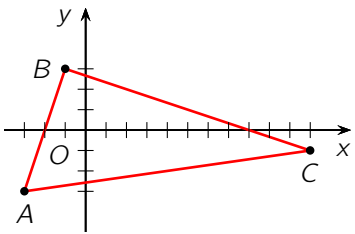

Рис. 2.2

Пример 2.1. Показать, что треугольник с вершинами $A(-3, -3)$, $B(-1, 3)$, $C(11, -1)$ (рис. 2.2) прямоугольный.

Р е ш е н и е. Найдём длины сторон треугольника:

$$AB = \sqrt{(-1+3)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{40},$$
$$BC = \sqrt{(11+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{160},$$
$$AC = \sqrt{(11+3)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{200}.$$

Поскольку

$$AB^2 + BC^2 = 40 + 160 = 200 = AC^2,$$

то сумма квадратов длин двух сторон треугольника равна квадрату длины третьей стороны. По известному из школьного курса математики утверждению, обратному теореме Пифагора, это значит, что треугольник ABC прямоугольный и сторона AC — гипотенуза. □

Считают, что что точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda > 0$, если $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$. Если точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ заданы своими координатами, то координаты точки $M(x, y)$ могут быть найдены по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{2.1}$$

В частности, при $\lambda = 1$ получаются формулы для координат *середины отрезка*:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{2.2}$$

Пример 2.2. Известны концы $A(2, -3)$ и $B(14, 3)$ отрезка AB. На этом отрезке находится точка C, расстояние от которой до A в 2 раза больше расстояния до B (рис. 2.3). Определить координаты точки C.

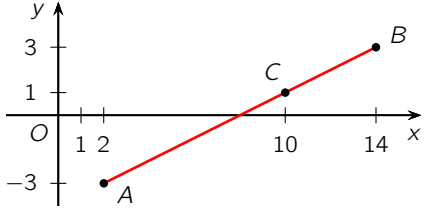

Рис. 2.3

Р е ш е н и е. Так как $AC = 2CB$, то $\lambda = \frac{AC}{CB} = 2$. По формуле (2.1)

$$x = \frac{2 + 2 \cdot 14}{1 + 2} = 10, \quad y = \frac{-3 + 2 \cdot 3}{1 + 2} = 1,$$

поэтому $C = (10, 1)$. □

Площадь S треугольника ABC с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|. \tag{2.3}$$

Пример 2.3. Найти площадь треугольника ABC с вершинами в точках $A(-2, -4)$, $B(2, 8)$, $C(10, 2)$.

Р е ш е н и е. По формуле (2.3)

$$S = \frac{1}{2}\left|(2+2)(2+4) - (10+2)(8+4)\right| = \frac{1}{2}\left|24 - 144\right| = 60 \text{ кв.ед.}$$ □

2.1.2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Любое уравнение с двумя неизвестными x и y, связывающее координаты точек на плоскости, определяет некоторое множество (геометрическое место) точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Наоборот, для часто встречающихся множеств на плоскости можно указать уравнение, которому удовлетворяют точки этого множества и только они.

Например, окружность состоит из точек, равноудалённых от некоторой точки, называемой центром, и, таким образом, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = 1$.

В основе классической геометрии Евклида лежат понятия *точки* и *прямой*. Эти базовые понятия не могут быть определены через более простые понятия. Свойства точек и прямых выражаются специальной системой аксиом, из которых путём строгих математических рассуждений выводится вся теория. Введя на плоскости прямоугольную декартову систему координат, мы дали алгебраическое описание всех точек плоскости. Оказывается, координаты позволяют дать исчерпывающее алгебраическое описание и прямым.

Рассмотрим некоторую прямую, не перпендикулярную оси Ox.

Определение 2.1. Назовем *углом наклона данной прямой к оси Ox* угол α, на который нужно повернуть ось Ox против хода часовой стрелки до совпадения с прямой.

Определение 2.2. Тангенс угла наклона прямой к оси Ox называют *угловым коэффициентом этой прямой* и обозначают буквой k:

$$k = \operatorname{tg}\alpha.$$

Из определения углового коэффициента, в частности, следует, что если $\alpha = 0$, т.е. прямая параллельна оси Ox, то $k = 0$. Если $\alpha = \pi/2$, т.е. прямая перпендикулярна оси Ox, то выражение $k = \operatorname{tg}\alpha$ не имеет смысла. Тогда говорят, что угловой коэффициент «обращается в бесконечность».

Выведем уравнение прямой, если известны её угловой коэффициент и величина отрезка OB, отсекаемого ею на оси Oy.

Пусть M — произвольная точка плоскости с координатами x и y. Если провести прямые BN и NM, параллельные осям, то образуется прямоугольный треугольник (рис. 2.4).

Точка M лежит на прямой тогда и только тогда, когда величины BN и NM удовлетворяют условию $\frac{NM}{BN} = \operatorname{tg}\alpha$. Но

$$NM = CM - CN = CM - OB = y - b, \quad BN = x.$$

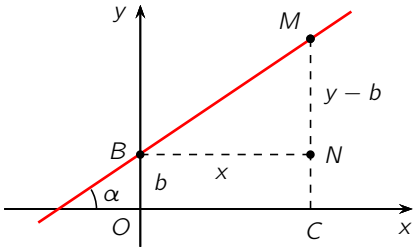

Рис. 2.4

Отсюда по определению углового коэффициента получаем, что точка M лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда её координаты удовлетворяют уравнению $\frac{y-b}{x} = k$, которое после преобразования примет вид

$$y = kx + b. \tag{2.4}$$

Определение 2.3. Уравнение (2.4) называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Если $k = 0$, то прямая параллельна оси Ox. Её уравнение имеет вид $y = b$.

Итак, любая прямая, не перпендикулярная оси Ox, имеет уравнение вида (2.4). Верно и обратное: любое уравнение вида (2.4) определяет прямую, которая имеет угловой коэффициент k и отсекает на оси Oy отрезок, величина которого равна b.

Пример 2.4. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок $b = 2$ и образующей с осью Ox угол $\alpha = \pi/3$.

Р е ш е н и е. Находим угловой коэффициент:

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Подставляя k и b в уравнение (2.4), получаем искомое уравнение прямой: $y = \sqrt{3}x + 2$, или $y - \sqrt{3}x - 2 = 0$. □

2.1.3. Составление уравнений прямых

Иногда возникает необходимость составить уравнение прямой, зная одну её точку $M_1(x_1, y_1)$ и угловой коэффициент k. Запишем уравнение прямой в виде (2.4), где b — пока неизвестное число. Так как прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (2.4): $y_1 = kx_1 + b$. Отсюда $b = y_1 - kx_1$.

Подставляя найденное значение b в уравнение (2.4), получаем искомое уравнение прямой:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{2.5}$$

Пример 2.5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1, 2)$ и образующей с осью Ox угол $\alpha = \pi/4$.

Р е ш е н и е. Находим угловой коэффициент: $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Подставляя координаты точки M и значение углового коэффициента k в уравнение (2.5), получаем искомое уравнение прямой:

$$y - 2 = 1(x - 1), \quad y - x - 1 = 0. \qquad \square$$

Составим уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Приняв в уравнении (2.5) точку $M(x, y)$ за $M_2(x_2, y_2)$, получим: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Таким образом, если $x_2 \neq x_1$, то для прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, угловой коэффициент

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.6}$$

Подставляя вычисленное значение k в уравнение (2.5), получаем искомое уравнение прямой:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Это уравнение, если $y_2 \neq y_1$, можно записать в виде

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.7}$$

Если $y_1 = y_2$, то уравнение искомой прямой имеет вид $y = y_1$. Такая прямая параллельна оси Ox. Если $x_1 = x_2$, то прямая, проходящая через точки M_1 и M_2, параллельна оси Oy. Её уравнение имеет вид $x = x_1$.

2.1.4. Общее уравнение прямой

Теорема 2.1. *В прямоугольной системе координат любая прямая задаётся уравнением первой степени*

$$Ax + By + C = 0. \tag{2.8}$$

И обратно, уравнение (2.8) при произвольных коэффициентах A, B, C (A и B одновременно не равны нулю) определяет некоторую прямую в прямоугольной системе координат Oxy. [Доказательство]

Так как все прямые и только они задаются уравнениями первого порядка, то естественно называть их *линиями* (*кривыми*) *первого порядка*.

Определение 2.4. Уравнение вида $Ax + By + C = 0$ называется *общим уравнением прямой* или *полным уравнением прямой*. При различных значениях A, B, C оно определяет всевозможные прямые.

Рассмотрим три частных случая, когда уравнение $Ax + By + C = 0$ является *неполным*, т.е. один из коэффициентов равен нулю:

1) $C = 0$; уравнение имеет вид $Ax + By = 0$ и определяет прямую, проходящую через начало координат;
2) $B = 0$ ($A \neq 0$); уравнение имеет вид $Ax + C = 0$ и определяет прямую, параллельную оси Oy. В частности, уравнение $x = 0$ определяет ось ординат;
3) $A = 0$ ($B \neq 0$); уравнение имеет вид $By + C = 0$ и определяет прямую, параллельную оси Ox. В частности, уравнение $y = 0$ определяет ось абсцисс.

2.1.5. Уравнение прямой «в отрезках»

Рассмотрим теперь уравнение $Ax + By + C = 0$ при условии, что ни один из коэффициентов A, B, C не равен нулю. Преобразуем его к виду

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Введя обозначения $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$, получим:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{2.9}$$

Определение 2.5. Уравнение (2.9) называется *уравнением прямой «в отрезках»*.

Числа a и b являются длинами отрезков, которые прямая отсекает на осях координат.

Пример 2.6. Прямая задана уравнением $2x - 3y + 6 = 0$. Составить для этой прямой уравнение «в отрезках» и построить прямую.

Р е ш е н и е. Для данной прямой уравнение «в отрезках» имеет вид

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1.$$

Чтобы построить эту прямую, отложим на осях координат Ox и Oy отрезки OM_1 величиной $a = -3$ и OM_2 величиной $b = 2$ и проведем прямую через точки M_1 и M_2 (рис. 2.5). □

Замечание 2.1. Рассмотренный пример показывает, что уравнение прямой в отрезках удобно использовать для геометрического построения прямой.

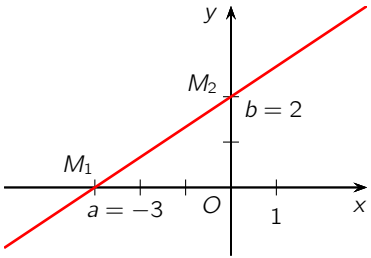

Рис. 2.5

2.1.6. Угол между двумя прямыми

Определение 2.6. *Углом между прямыми* L_1 и L_2 называется угол, на который надо повернуть прямую L_1 против хода часовой стрелки до её совпадения с прямой L_2. Угол между параллельными прямыми считается равным нулю.

Рассмотрим две прямые: L_1 и L_2. Пусть уравнение прямой L_1 имеет вид $y = k_1x + b_1$, где $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, а уравнение прямой L_2 — вид $y = k_2x + b_2$, где $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$, φ — угол между L_1 и L_2, $0 \leqslant \varphi < \pi$ (рис. 2.6).

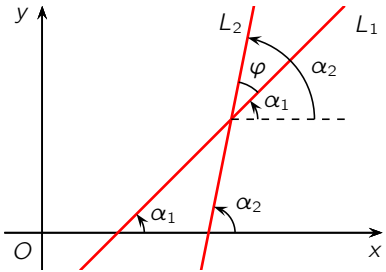

Рис. 2.6

Из геометрических соображений устанавливаем соотношение, связывающее углы α_1, α_2, φ:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi, \quad \varphi = \alpha_2 - \alpha_1,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2},$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{2.10}$$

Пример 2.7. Прямые заданы уравнениями

$$y = 3x + 2, \quad y = -2x + 3.$$

Найти угол между этими прямыми.

Р е ш е н и е. Имеем: $k_1 = 3$, $k_2 = -2$. По формуле (2.10)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2-3}{1+(-2)\cdot 3} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Таким образом, угол между данными прямыми равен $\pi/4$. □

2.1.7. Условия параллельности и перпендикулярности

Прямые L_1 и L_2 параллельны, когда угол между ними $\varphi = 0$ и $\operatorname{tg}\varphi = 0$. Это верно, если числитель правой части формулы (2.10) равен нулю, т.е. $k_2 - k_1 = 0$, откуда

$$k_1 = k_2. \tag{2.11}$$

Равенство угловых коэффициентов (2.11) называется *условием параллельности двух прямых*.
Прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, когда $\varphi = \pi/2$ и $\operatorname{ctg}\varphi = 0$. Из формулы (2.10) находим:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1}.$$

Значит, равенство $\operatorname{ctg}\varphi = 0$ выполняется, если $1 + k_1 k_2 = 0$, откуда

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{2.12}$$

Равенство (2.12) называется *условием перпендикулярности двух прямых*, которое состоит в том, что угловые коэффициенты прямых обратны по величине и противоположны по знаку.

Пример 2.8. Показать, что прямые $2x - 3y + 1 = 0$ и $6x - 9y + 2 = 0$ параллельны.

Р е ш е н и е. Приведем каждое из уравнений к виду уравнения с угловым коэффициентом:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}.$$

Угловые коэффициенты данных прямых равны: $k_1 = k_2 = 2/3$. Значит, прямые параллельны. □

2.1.8. Расстояние от точки до прямой

Расстоянием от точки до прямой будем, как всегда, называть длину перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Теорема 2.2. *Расстояние d от данной точки $M(x_0, y_0)$ до прямой L, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$, на плоскости определяется формулой*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.13}$$

Пример 2.9. Пусть прямая L задана уравнением $2x - 3y + 5 = 0$ и дана точка $M(1, 2)$. Найти расстояние d от точки M до прямой L.

Р е ш е н и е. По формуле (2.13) получаем:

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}. \qquad \square$$

2.1.9. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы следующими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (L_1), \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (L_2). \end{cases} \tag{2.14}$$

Все возможные взаимные расположения этих прямых могут быть описаны следующим образом:

1) если $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, то прямые пересекаются и их точка пересечения может быть получена как решение системы (2.14);
2) если $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, то
   а) при $A_1C_2 - A_2C_1 = 0$ и $B_1C_2 - B_2C_1 = 0$ прямые совпадают, т.е. оба уравнения (2.14) задают одну и ту же прямую;
   б) при $A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0$ либо $B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0$ прямые параллельны и различны.

Итак, две прямые на плоскости либо пересекаются в одной точке, либо совпадают, либо параллельны.

2.2. Кривые второго порядка

2.2.1. Окружность
2.2.2. Эллипс
2.2.3. Гипербола
2.2.4. Парабола
2.2.5. Кривые второго порядка со смещённым центром

2.2.1. Окружность

Определение 2.7. *Окружность* — это множество точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии $r > 0$, называемом *радиусом окружности*, от точки $C(x_0, y_0)$ — *центра* (рис. 2.7).

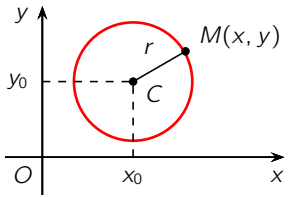

Рис. 2.7

Согласно формуле (1.21) для расстояния между двумя точками уравнение окружности может быть представлено в виде

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \tag{2.15}$$

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение (2.15) принимает вид

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Пример 2.10. Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ задаёт окружность. Найти её центр и радиус.

Р е ш е н и е. Сгруппируем все члены уравнения, содержащие x, а затем члены, содержащие y:

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) = 4.$$

Дополним выражения в скобках до полных квадратов:

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 2y + 1) - 1 = 4, \quad (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3^2.$$

Мы преобразовали исходное уравнение к виду (2.15), где $x_0 = 2$, $y_0 = -1$ и $r = 3$. Следовательно, это уравнение задаёт окружность, центр которой находится в точке $(2, -1)$, а радиус равен 3. □

2.2.2. Эллипс

Определение 2.8. *Эллипс* (рис. 2.8) — это геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a, b > 0, \tag{2.16}$$

называемому *каноническим уравнением эллипса*.

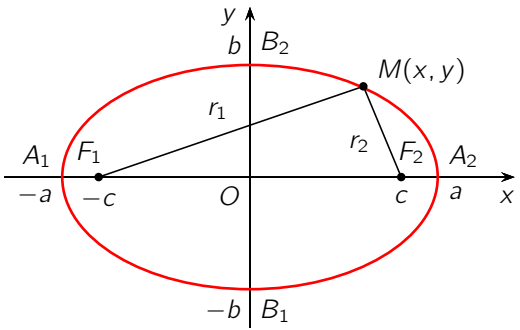

Рис. 2.8

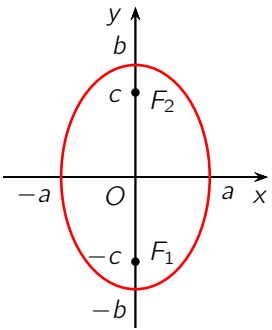

Рис. 2.9

Из определения следует, что эллипс:

1) симметричен относительно осей координат и начала координат;
2) целиком лежит внутри прямоугольника $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$.

Выполним построение эллипса. Для первой четверти, где координаты $x, y \geqslant 0$, выразим явно переменную y через x:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}, \quad y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2, \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Используя последнее уравнение, построим эллипс в первой четверти. Затем, симметрично отображая построенный фрагмент относительно осей и центра координат, получаем весь эллипс (рис. 2.8).

Определение 2.9. Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ (рис. 2.8), принадлежащие эллипсу, называются *вершинами эллипса*.

Определение 2.10. Начало координат $O(0,0)$ (рис. 2.8), играющее роль центра симметрии эллипса, называют *центром эллипса*.

Определение 2.11. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 (рис. 2.8), а также их длины $2a$ и $2b$ называют соответственно *большой* и *малой осями эллипса*.

Определение 2.12. Отрезки OA_2 и OB_2 (рис. 2.8), представляющие собой половины большой и малой осей, и их длины a и b называют соответственно *большой* и *малой полуосями эллипса*.

Далее для определённости будем считать, что $a \geqslant b$.

Определение 2.13. Положим

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

Так как $a \geqslant b > 0$, то $0 \leqslant c < a$. Точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ (рис. 2.8) называют *фокусами эллипса*.

Если $a < b$, то уравнение (2.16) задаёт эллипс, большая полуось которого равна b и лежит на оси Oy, а малая равна a и лежит на оси Ox. Фокусы такого эллипса расположены в точках $F_1(0,-c)$ и $F_2(0,c)$, где $c^2 = b^2 - a^2$ (рис. 2.9).

Определение 2.14. Расстояния r_1 и r_2 (см. рис. 2.8) от точки M эллипса до его фокусов F_1 и F_2 называются соответственно *левым* и *правым фокальными радиусами этой точки*.

Теорема 2.3. *Точка M плоскости принадлежит эллипсу (2.16) тогда и только тогда, когда сумма её фокальных радиусов равна $2a$:*

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{2.17}$$

[Доказательство]

Замечание 2.2. Утверждение теоремы 2.3 может использоваться в качестве определения эллипса.

Определение 2.15. Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется *эксцентриситетом*

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Так как $0 \leqslant c < a$, то $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Если, в частности, $a = b$, то $c = 0$ и $\varepsilon = 0$. В этом случае фокусы сливаются в одной точке — центре и эллипс деформируется в окружность, заданную уравнением $x^2 + y^2 = a^2$. По мере возрастания эксцентриситета от нуля до единицы увеличивается «сплющенность» эллипса.

Из равенств (Д.3) и определения эксцентриситета следует, что фокальные радиусы любой точки $M(x, y)$ эллипса могут быть найдены по формулам:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$

Пример 2.11. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ и $N\left(-2, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

Р е ш е н и е. Подставляя координаты точек M и N в каноническое уравнение (2.16), получаем систему уравнений для нахождения полуосей a и b:

$$\begin{cases} \dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{a^2} + \dfrac{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2}{b^2} = 1, \\ \dfrac{(-2)^2}{a^2} + \dfrac{\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2}{b^2} = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{25}{4a^2} + \dfrac{3}{8b^2} = 1, \\ \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{3}{5b^2} = 1. \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения системы на 8, а второго — на 5; затем вычтем второе уравнение из первого:

$$\begin{cases} \dfrac{50}{a^2} + \dfrac{3}{b^2} = 8, \\ \dfrac{20}{a^2} + \dfrac{3}{b^2} = 5, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{30}{a^2} = 3, \\ \dfrac{20}{a^2} + \dfrac{3}{b^2} = 5. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$a^2 = 10, \quad \frac{3}{b^2} = 5 - \frac{20}{a^2} = 5 - \frac{20}{10} = 3, \quad b^2 = 1.$$

Итак, искомое уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{10} + y^2 = 1$. □

2.2.3. Гипербола

Определение 2.16. *Гипербола* (рис. 2.10) — это геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a, b > 0, \tag{2.18}$$

называемому *каноническим уравнением гиперболы*.

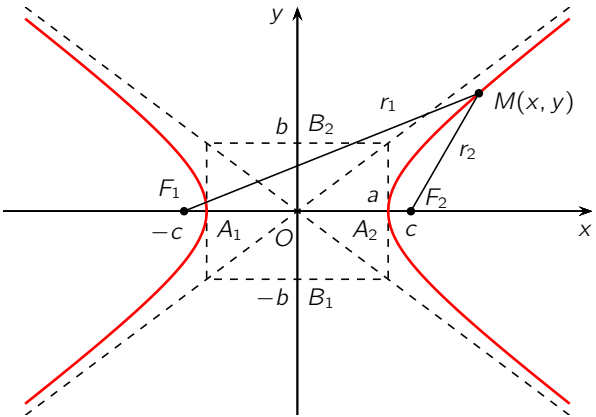

Рис. 2.10

Из канонического уравнения (2.18) следует, что гипербола:

1) симметрична относительно осей координат и начала координат;
2) не пересекает ось Oy;
3) лежит за пределами полосы $|x| < a$;
4) состоит из двух *ветвей*: левой для $x \leqslant -a$ и правой для $x \geqslant a$.

Построим гиперболу. Получим зависимость переменной y от x в первой четверти:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1, \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2, \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Теперь выполним построение в первой четверти и симметрично отобразим полученный фрагмент на всю систему координат (рис. 2.10).

Определение 2.17. Точки $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ (рис. 2.10) лежат на гиперболе и называются *вершинами гиперболы*.

Определение 2.18. Начало координат $O(0, 0)$ (рис. 2.10), выступающее в роли центра симметрии гиперболы, называют *центром гиперболы*.

Определение 2.19. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, где $B_1 = (0, -b)$ и $B_2 = (0, b)$ (рис. 2.10), а также их длины $2a$ и $2b$ называют соответственно *действительной* и *мнимой осями гиперболы*.

Определение 2.20. Отрезки OA_2 и OB_2 (рис. 2.10), представляющие собой половины действительной и мнимой осей, и их длины a и b называют соответственно *действительной* и *мнимой полуосями гиперболы*.

Определение 2.21. Положим

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ (рис. 2.10) называются *фокусами гиперболы*.

Ясно, что $a < c$, т.е. расстояние между фокусами больше действительной оси гиперболы.

Определение 2.22. Расстояния r_1 и r_2 (рис. 2.10) от точки M гиперболы до её фокусов F_1 и F_2 называются соответственно *левым* и *правым фокальными радиусами этой точки*.

Определение 2.23. Прямоугольник, образованный прямыми $x = -a$, $x = a$, $y = -b$ и $y = b$ (рис. 2.10), называется *основным прямоугольником гиперболы*.

Определение 2.24. Две прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ (рис. 2.10) называются *асимптотами гиперболы*.

Замечание 2.3. При удалении от начала координат гипербола как угодно близко подходит к своим асимптотам, не пересекая их. Построение гиперболы удобно начинать с изображения основного прямоугольника. Далее проводят асимптоты, которые являются диагоналями основного прямоугольника. После этого вычерчивание гиперболы не составляет труда (рис. 2.10).

Теорема 2.4. *Точка M плоскости принадлежит гиперболе (2.18) тогда и только тогда, когда абсолютная величина разности фокальных радиусов этой точки равна $2a$:*

$$|r_1 - r_2| = 2a. \tag{2.19}$$

[Доказательство]

Замечание 2.4. Утверждение теоремы 2.4 может быть использовано в качестве определения гиперболы.

Определение 2.25. *Эксцентриситетом гиперболы* называется число

$$\varepsilon = \frac{c}{a},$$

характеризующее её форму. Так как $c > a$, то $\varepsilon > 1$.

Понятие эксцентриситета позволяет переписать формулы (Д.5) и (Д.6) для фокальных радиусов точки M, лежащей соответственно на правой и левой ветвях гиперболы, следующим образом:

1) $r_1 = \varepsilon x + a$, $r_2 = \varepsilon x - a$ для правой ветви;
2) $r_1 = -\varepsilon x - a$, $r_2 = -\varepsilon x + a$ для левой ветви.

Определение 2.26. Если $a = b$, т.е. действительная и мнимая полуоси равны, то уравнение гиперболы принимает вид $x^2 - y^2 = a^2$. Такая гипербола называется *равнобочной*. Её асимптоты образуют прямой угол и являются биссектрисами координатных углов.

Определение 2.27. Уравнение

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \tag{2.20}$$

задаёт гиперболу, действительной и мнимой осями которой служат соответственно мнимая и действительная оси гиперболы (2.18). Гиперболы (2.18) и (2.20) имеют общие полуоси, асимптоты и основной прямоугольник и называются *сопряжёнными*.

На рис. 2.11 сопряженная гипербола изображена штриховой линией, её фокусы обозначены F_1' и F_2'.

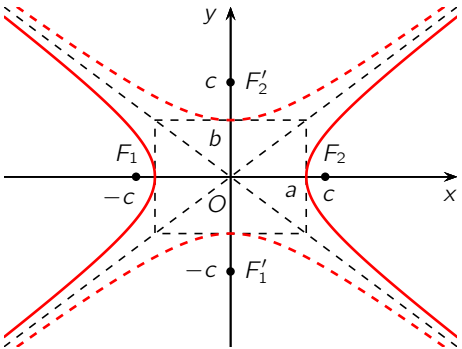

Рис. 2.11

Пример 2.12. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ и имеющей эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Р е ш е н и е. Согласно определению эксцентриситета

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{2}, \quad c = \sqrt{2}a, \quad c^2 = 2a^2.$$

Так как для всякой гиперболы верно равенство $c^2 = a^2 + b^2$, то в нашем случае $b^2 = c^2 - a^2 = 2a^2 - a^2 = a^2$, т.е. гипербола равнобочная.

Подставим координаты данной по условию точки M в каноническое уравнение (2.18):

$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{3}{a^2} - \frac{2}{a^2} = 1, \quad \frac{1}{a^2} = 1, \quad a^2 = 1.$$

Значит, уравнение искомой гиперболы имеет вид $x^2 - y^2 = 1$. □

2.2.4. Парабола

Определение 2.28. *Парабола* (рис. 2.12) — это геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$y^2 = 2px, \quad p > 0, \tag{2.21}$$

называемому *каноническим уравнением параболы*.

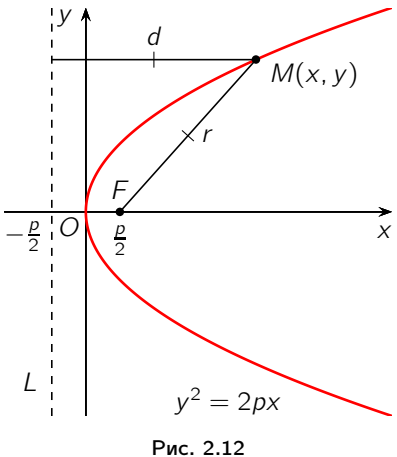

Рис. 2.12

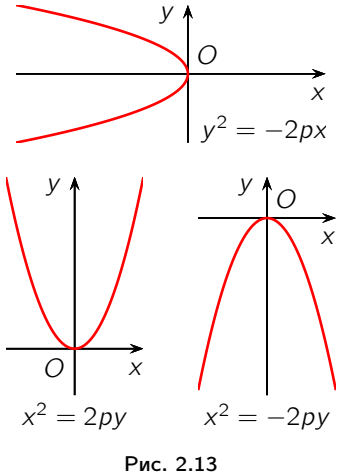

Рис. 2.13

Из определения следует, что парабола:

1) симметрична относительно оси Ox;
2) лежит в правой полуплоскости, т.е. $x \geqslant 0$;
3) проходит через начало координат.

Уравнение $y^2 = -2px$ задаёт параболу, симметричную параболе (2.21) относительно оси ординат. Уравнения $x^2 = 2py$ и $x^2 = -2py$ определяют «повёрнутые» параболы, чья ось симметрии совпадает с осью ординат (рис. 2.13).

Определение 2.29. Ось абсцисс, которая является осью симметрии параболы, называется *осью параболы*.

Определение 2.30. Начало координат $O(0,0)$ называется *вершиной параболы*.

Определение 2.31. Точка $F(\frac{p}{2}, 0)$ (см. рис. 2.12) называется *фокусом параболы*.

Определение 2.32. Прямая L, задаваемая уравнением $x = -\frac{p}{2}$ (см. рис. 2.12), называется *директрисой параболы*.

Определение 2.33. Расстояние от фокуса до директрисы, равное p, называется *параметром параболы*.

Определение 2.34. Для любой точки $M(x,y)$ параболы отрезок $r = MF$ (см. рис. 2.12) называется *фокальным радиусом параболы*.

Теорема 2.5. *Точка M плоскости принадлежит параболе тогда и только тогда, когда эта точка равноудалена от фокуса F и директрисы L.* [Доказательство]

Замечание 2.5. Утверждение теоремы 2.5 может использоваться в качестве определения параболы.

Так как для точек $M(x,y)$ параболы (2.21) $x \geqslant 0$, то из теоремы 2.5 следует, что фокальный радиус таких точек

$$r = d = \left|x + \frac{p}{2}\right| = x + \frac{p}{2}.$$

Пример 2.13. Составить уравнение симметричной относительно оси Ox параболы с вершиной в начале координат, если длина некоторой хорды этой параболы, перпендикулярной оси Ox, равна 16, а расстояние этой хорды от вершины равно 4.

Р е ш е н и е. Из условия следует, что точка $M(4,8)$ лежит на параболе (рис. 2.14). Подставим координаты M в каноническое уравнение параболы (2.21): $8^2 = 2p \cdot 4$, $2p = 64/4 = 16$.

Зная параметр, выписываем искомое уравнение: $y^2 = 16x$. □

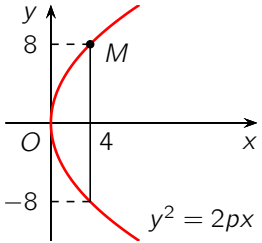

Рис. 2.14

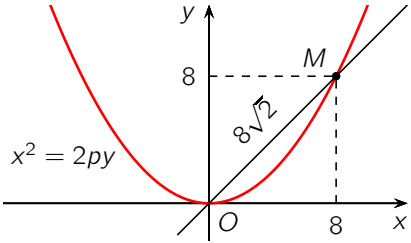

Рис. 2.15

Пример 2.14. Составить уравнение симметричной относительно оси Oy параболы с вершиной в начале координат, если известно, что эта парабола отсекает на биссектрисе первого и третьего координатных углов хорду длиной $8\sqrt{2}$.

Р е ш е н и е. Из условия следует, что на параболе лежит точка $M(8, 8)$ (рис. 2.15). Подставляем координаты точки M в каноническое уравнение $x^2 = 2py$ данной параболы: $8^2 = 2p \cdot 8$, $2p = 8$.

Итак, искомое уравнение имеет вид $x^2 = 8y$. □

2.2.5. Кривые второго порядка со смещённым центром

Центр эллипса и гиперболы, а также вершина параболы могут быть помещены в любую точку $C(x_0, y_0)$ плоскости. При этом канонические уравнения соответствующих кривых преобразуются к следующему виду:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$
$$(y-y_0)^2=2p\,(x-x_0)\,.$$

Например, эллипс с центром в точке $C(3,2)$ и полуосями $a=2$ и $b=1$ (рис. 2.16) имеет уравнение

$$\frac{(x-3)^2}{4}+(y-2)^2=1.$$

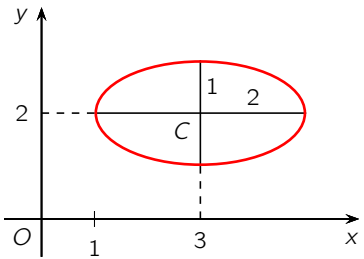

Рис. 2.16

Пример 2.15. Установить вид линии второго порядка, заданной уравнением $9x^2-4y^2+18x+8y-31=0$.

Р е ш е н и е. Выделим в данном уравнении полные квадраты по каждой из переменных:

$$9(x^2+2x+1)-9-4(y^2-2y+1)+4-31=0,$$
$$9(x+1)^2-4(y-1)^2=36, \quad \frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{9}=1.$$

Мы получили каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $C(-1,1)$ и полуосями $a=2$ и $b=3$. □

Пример 2.16. Установить вид линии второго порядка, заданной уравнением $x^2-4x-4y=0$.

Р е ш е н и е. Выделим в заданном уравнении полный квадрат по переменной x:

$$(x^2-4x+4)-4-4y=0, \quad (x-2)^2=4y+4, \quad (x-2)^2=4(y+1).$$

Мы получили каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $C(2,-1)$ и параметром $p=2$. □

Глава 3

Предел последовательности и функции

3.1. Числовая последовательность
3.2. Функциональная зависимость
3.3. Предел функции. Два замечательных предела
3.4. Непрерывные функции

3.1. Числовая последовательность

3.1.1. Понятие числовой последовательности
3.1.2. Предел последовательности
3.1.3. Бесконечно малые последовательности
3.1.4. Бесконечно большие последовательности
3.1.5. Сходящиеся последовательности
3.1.6. Предельный переход в неравенствах
3.1.7. Монотонные последовательности
3.1.8. Непрерывное начисление процентов

3.1.1. Понятие числовой последовательности

Определение 3.1. Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x_n, то говорят, что определена *числовая последовательность*. Числа x_n, $n \in \mathbb{N}$, называют *элементами* или *членами последовательности*. Для числовой последовательности мы будем использовать следующие обозначения:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots, \quad \{x_n\}, \quad x_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Последовательности встречались в средней школе. Например, *бесконечная геометрическая прогрессия* $1,\ q,\ q^2,\ \ldots,\ q^n,\ \ldots,\ |q| < 1$, является числовой последовательностью.

Определение 3.2. Последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n / y_n\}$ называются соответственно *суммой, разностью, произведением* и *частным* двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ (для частного $y_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$).

Определение 3.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant M$. В противном случае она называется *неограниченной*.

Переформулируем это определение на языке кванторов. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leqslant M.$$

Ясно, что последовательность является неограниченной, если для любого $M > 0$ найдётся такое число $n \in \mathbb{N}$, для которого $|x_n| > M$. На языке кванторов это можно записать следующим образом:

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \quad |x_n| > M.$$

Определение 3.4. *Окрестностью точки* называется любой интервал, содержащий эту точку; *ε-окрестностью точки $x = a$* называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Геометрической смысл ограниченной последовательности состоит в том, что все члены последовательности находятся в некоторой окрестности (M-окрестности) точки $x = 0$ (рис. 3.1).

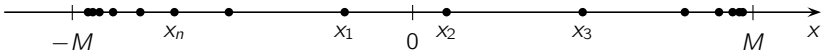

Рис. 3.1

Пример 3.1. Последовательность

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{n-1}}{n},\ \ldots$$

ограничена, так как для всякого $n \in \mathbb{N}$ верно, что $|x_n| = \dfrac{1}{n} \leqslant 1$.

Пример 3.2. Последовательность

$$x_n = \begin{cases} n, & \text{если } n \text{ нечётное,} \\ 1/n, & \text{если } n \text{ чётное,} \end{cases}$$

является неограниченной: её элементы могут принимать значения, бóльшие любого наперёд заданного числа $M > 0$.

Определение 3.5. Последовательность x_n называется *постоянной*, если

$$\exists\, a \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad x_n = a,$$

т.е. все элементы последовательности равны некоторому числу a.

Например, последовательность $1, 1, \ldots, 1, \ldots$ является постоянной. Здесь для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $x_n = 1$.

3.1.2. Предел последовательности

Изучение предела последовательности начнём с примера.

Пример 3.3. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{n-1}{n}.$$

Из рис. 3.2, где изображены первые несколько элементов данной последовательности, видно, что они приближаются к значению $a = 1$. Для первых пяти элементов оценим степень этой близости:

$$|x_1 - 1| = 1, \quad |x_2 - 1| = \frac{1}{2}, \quad |x_3 - 1| = \frac{1}{3}, \quad |x_4 - 1| = \frac{1}{4}, \quad |x_5 - 1| = \frac{1}{5}.$$

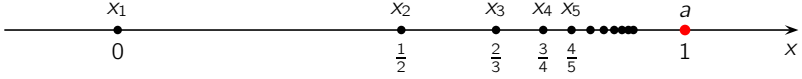

Рис. 3.2

Итак, видно, что по мере возрастания номера n элемент последовательности $\{x_n\}$ неограниченно приближается к единице. В таком случае говорят, что число 1 является пределом последовательности $\{x_n\}$.

Получив наглядное представление о сути предельного перехода, можно перейти к математически строгому определению.

Определение 3.6. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n > N_\varepsilon$ имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. На языке кванторов это записывается так:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_\varepsilon \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Для обозначения предела используется выражение

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

На основании рис. 3.2 мы уже сделали вывод, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Этому факту можно дать и строгое математическое доказательство, пользуясь введённым ранее определением предела последовательности (сделайте это самостоятельно).

Геометрический смысл предела последовательности состоит в том, что в любой ε-окрестности точки a находятся все члены последовательности начиная с некоторого номера N_ε, зависящего, вообще говоря, от ε (рис. 3.3).

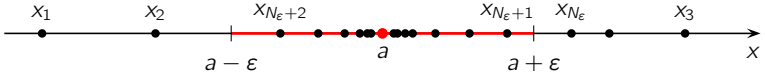

Рис. 3.3

Пример 3.4. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

Р е ш е н и е. Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим модуль разности между n-м членом последовательности и числом $1/2$:

$$\left|\frac{n}{2n-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-(2n-1)}{2(2n-1)}\right| = \frac{1}{2(2n-1)}.$$

В соответствии с определением предела последовательности мы должны указать номер N_ε такой, что для всякого $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2(2n-1)} < \varepsilon.$$

Для отыскания номера N_ε решим это неравенство относительно n:

$$2(2n-1) > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon}+1\right).$$

Отсюда следует, что можно положить

$$N_\varepsilon = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon}+1\right)\right],$$

где запись $[x]$ означает целую часть числа x. □

3.1.3. Бесконечно малые последовательности

Определение 3.7. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой* (БМП), если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

В соответствии с определением предела последовательности последовательность x_n является бесконечно малой тогда и только тогда, когда для любого положительного числа ε существует номер N_ε такой, что для любого $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$, т.е.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_\varepsilon \quad |x_n| < \varepsilon.$$

Пример 3.5. Последовательность $x_n = 1/n$ бесконечно малая, или, что то же самое, её предел равен нулю.

Геометрический смысл БМП можно сформулировать так: для любой ε-окрестности точки $x = 0$ существует номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такой, что все члены последовательности начиная с $(N_\varepsilon + 1)$-го принадлежат этой ε-окрестности (рис. 3.3, $a = 0$).

Свойства бесконечно малых последовательностей

1. *Сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть БМП.* [Доказательство]
2. *Бесконечно малая последовательность является ограниченной.* [Доказательство]
3. *Произведение бесконечно малой последовательности и ограниченной последовательности есть БМП.* [Доказательство]
4. *Произведение конечного числа БМП есть БМП.* [Доказательство]
5. *Если БМП $\{x_n\}$ имеет постоянное значение a, т.е. для любого $n \in \mathbb{N}$ верно, что $x_n = a$, то $a = 0$.* [Доказательство]

3.1.4. Бесконечно большие последовательности

Определение 3.8. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой* (ББП), если для всякого $A > 0$ существует номер $N_A \in \mathbb{N}$ такой, что для любого $n > N_A$ верно неравенство $|x_n| > A$, т.е.

$$\forall\, A > 0 \quad \exists\, N_A \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_A \quad |x_n| > A.$$

В таком случае пишут:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Если дополнительно известно, что последовательность $\{x_n\}$ для достаточно больших n сохраняет знак, т.е.

$$\forall\, A > 0 \quad \exists\, N_A \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_A \quad x_n > A \quad \Big(x_n < -A\Big),$$

то к символу бесконечности «∞» добавляют соответствующий знак:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \Big(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\Big).$$

Примерами бесконечно больших являются последовательности

$$x_n = \ln n, \quad x_n = -\sqrt{n}, \quad x_n = (-2)^n.$$

Свойства бесконечно больших последовательностей

1. *ББП — неограниченная последовательность.*

Замечание 3.1. Обратное, вообще говоря, не верно. Неограниченная последовательность может не быть ББП, в чём убеждает пример 3.2.

2. *Произведение двух ББП есть ББП.*
3. *Сумма ББП и ограниченной последовательности есть ББП.*
4. *ББП не может являться постоянной последовательностью.*

Замечание 3.2. Сумма двух ББП не обязательно является ББП. Например, последовательности $x_n = n$ и $y_n = -n$ бесконечно большие. Однако сумма $x_n + y_n = 0$ бесконечно большой не является.

Следующая теорема иллюстрирует связь между БМП и ББП.

Теорема 3.1. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *есть ББП и все её члены отличны от нуля, то* $\{1/x_n\}$ *есть БМП; и обратно, если* $\{x_n\}$ *— БМП, все члены которой отличны от нуля, то* $\{1/x_n\}$ *— ББП.*

[Доказательство]

3.1.5. Сходящиеся последовательности

Определение 3.9. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а последовательность, не имеющая предела, — *расходящейся*. Если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к a.

Простейшим примером сходящейся последовательности является БМП, а расходящейся — ББП.

Пример 3.6. Последовательность $x_n = (-1)^n$ расходится.

Р е ш е н и е. Выберем произвольное число a и покажем, что оно не может быть пределом данной последовательности. Положим $\varepsilon = 1/2$. Тогда в ε-окрестность точки a не войдёт хотя бы одно из чисел 1 и -1. Следовательно, за пределами этой окрестности будут лежать элементы данной последовательности со сколь угодно большими номерами. Доказываемое утверждение следует теперь из геометрического смысла предела последовательности. □

Свойства сходящихся последовательностей

1. *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела своим пределом число a, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{x_n - a\}$ была БМП.* [Доказательство]

2. *Сходящаяся последовательность имеет только один предел.* [Доказательство]

3. *Сходящаяся последовательность ограничена.* [Доказательство]

Замечание 3.3. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Это следует из очевидной ограниченности последовательности, рассмотренной в примере 3.6.

4. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда*

а) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$; *б)* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ *(при условии, что* $b \neq 0$*).*

[Доказательство]

Пример 3.7. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n+1}{n^2-1}$.

Р е ш е н и е. При $n \to \infty$ числитель и знаменатель стремятся к бесконечности (являются ББП). Следовательно, непосредственно применить свойство о пределе частного нельзя. Поэтому необходимо преобразовать общий член этой последовательности, разделив числитель и знаменатель на n^2 (на n в максимальной степени). Получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{2+0+0}{1-0} = 2. \qquad \square$$

3.1.6. Предельный переход в неравенствах

Теорема 3.2. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

и начиная с некоторого номера $x_n \geqslant b$, то $a \geqslant b$. [Доказательство]

Замечание 3.4. Из того, что все элементы сходящейся к a последовательности x_n строго больше b, вообще говоря, не следует строгое неравенство $a > b$. Например, для всякого $n \in \mathbb{N}$ верно, что $1/n > 0$, однако

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Следствие 3.1. *Если элементы сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ начиная с некоторого номера удовлетворяют неравенству $x_n \leqslant y_n$, то и их пределы удовлетворяют неравенству*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n.$$

[Доказательство]

С помощью данного следствия можно доказать приведённую ниже теорему.

Теорема 3.3 (о сжатой последовательности). *Пусть даны три последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ и начиная с некоторого номера выполняется двойное неравенство $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ имеют один и тот же предел a, то последовательность $\{y_n\}$ также имеет предел a.*

Следующую теорему попробуйте доказать самостоятельно.

Теорема 3.4 (о сохранении знака). *Если последовательность x_n сходится к положительному числу a, то найдётся такой номер $N_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N_0$ окажется $x_n > 0$.*

3.1.7. Монотонные последовательности

Определение 3.10. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, если для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \leqslant x_{n+1}$, и *убывающей*, если для $n \in \mathbb{N}$ верно, что $x_{n+1} \leqslant x_n$.

Определение 3.11. Возрастающая и убывающая последовательности называются *монотонными*.

Определение 3.12. Если для всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $x_n < x_{n+1}$, то последовательность $\{x_n\}$ называется *строго возрастающей*; если же для $n \in \mathbb{N}$ верно, что $x_{n+1} < x_n$, — то *строго убывающей*.

Определение 3.13. Строго возрастающие и строго убывающие последовательности называются *строго монотонными*.

Пример 3.8. Последовательность

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n},\ \ldots$$

строго возрастающая и ограниченная. Очевидно, что она сходится, причём

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Пример 3.9. Последовательность $2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$ строго возрастающая неограниченная. Она является ББП.

Пример 3.10. Последовательность

$$1,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \ldots,\ \sin\frac{n}{n+1}\pi,\ \ldots$$

строго убывающая ограниченная, причём

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{n}{n+1}\pi = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n+1} = 0.$$

Пример 3.11. Последовательность 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, ..., $[n/2]$, ... (напомним, что квадратные скобки обозначают целую часть числа) — возрастающая, но не строго возрастающая ББП.

Оказывается, что все монотонные ограниченные последовательности обладают общим свойством — они сходятся.

Теорема 3.5. *Монотонная ограниченная последовательность сходится.*

Таким образом, ограниченность монотонной последовательности является необходимым и достаточным условием сходимости.

Замечание 3.5. Всякая монотонная последовательность является либо сходящейся, либо бесконечно большой (обоснуйте это самостоятельно). Однако не всякая сходящаяся последовательность является монотонной. В этом можно убедиться на примере 3.1 бесконечно малой, а значит, и сходящейся, но не монотонной последовательности.

Рассмотрим важный пример монотонной ограниченной последовательности.

Теорема 3.6. *Последовательность*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{3.1}$$

сходится. [Доказательство]

Определение 3.14. Предел последовательности (3.1), существующий в силу теоремы 3.6, обозначается буквой e и называется *постоянной Эйлера*:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{3.2}$$

Число e известно как основание натуральных логарифмов. Из соотношений (Д.8) и (Д.9) следует, что $2 < e < 3$. Можно доказать, что число e является иррациональным, $e = 2{,}7182\ldots$ Это число играет существенную роль в математике и её приложениях.

3.1.8. Непрерывное начисление процентов

В банковской системе, как правило, практикуются дискретные проценты по вкладам. Если начальная сумма вклада составляла S_0 денежных единиц, p — годовая процентная ставка, представленная в виде десятичной дроби, и проценты начисляются один раз в год, то каждый год вклад будет увеличиваться в $1+p$ раз. Таким образом, через t лет сумма вклада составит

$$S = S_0(1+p)^t.$$

Если проценты начисляются не один, а n раз в году, то при сохранении годовой процентной ставки p сумма вклада каждый раз будет увеличиваться в $1+\frac{p}{n}$ раз. По прошествии t лет таких увеличений произойдёт tn и сумма вклада составит

$$S = S_0\left(1+\frac{p}{n}\right)^{tn}. \tag{3.3}$$

Некоторые сложные экономические процессы по своей природе подразумевают столь частое начисление процентов, что его можно считать непрерывным. Для таких процессов количество n начислений в год принимает очень большие значения, которые можно условно считать близкими к бесконечности. Поэтому сумму вклада S в момент времени t в таких случаях можно определить, если в формуле (3.3) перейти к пределу при $n \to \infty$. Предположим, что процентная ставка $p = 1$, т.е. вклад удваивается каждый год[1], и $t \in \mathbb{N}$. По свойству 4 сходящихся последовательностей и определению числа e (3.2)

$$S = \lim_{n\to\infty} S_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^{tn} = S_0\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{t} = S_0 e^t.$$

Можно доказать, что для произвольной процентной ставки p и любого, не обязательно целого, времени $t > 0$

$$S = S_0 e^{pt}. \tag{3.4}$$

Соотношение (3.4) определяет закон *непрерывного начисления процентов*. Процентная ставка p при непрерывном начислении процентов называется *силой роста*.

[1] Разумеется, не стоит рассчитывать на такие проценты в реальной жизни.

Отметим, что, чем чаще начисляются проценты, тем быстрее растёт вклад. Данный факт объясняется дополнительной прибавкой сложных процентов, т.е. процентов от процентов. При фиксированной годовой ставке p вклад растёт быстрее всего, если проценты начисляются непрерывно.

Поясним сказанное на примере.

Пример 3.12. Предположим, что начальный вклад $S_0 = 1$, процентная ставка $p = 1$ и проценты начисляются n раз в год. Вычислим по формуле (3.3) размер вклада через год для некоторых значений n:

$$n = 1: \quad S = (1+1)^1 = 2; \qquad n = 10: \quad S = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2{,}594;$$

$$n = 100: \quad S = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2{,}705;$$

$$n = 1000: \quad S = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx 2{,}717.$$

В случае непрерывного начисления процентов через год вклад вырастет максимально и, согласно (3.4), составит $S = e^1 = e \approx 2{,}718$.

3.2. Функциональная зависимость

3.2.1. Понятие функции
3.2.2. Способы задания функции
3.2.3. Понятия обратной и сложной функций
3.2.4. Элементарные функции
3.2.5. Основные характеристики функций
3.2.6. Построение графиков функций
3.2.7. Функциональная зависимость в экономике

3.2.1. Понятие функции

При изучении явлений природы, физических, экономических и других процессов часто встречаются с совокупностью переменных величин, которые связаны между собой так, что значения одних величин полностью определяют значения других. Например, площадь S круга однозначно определяется значением его радиуса с помощью формулы $S = \pi r^2$.

Определение 3.15. Пусть X и Y — два произвольных множества (рис. 3.4). Если каждому элементу x из множества X по некоторому правилу f поставлен в соответствие единственный элемент y из множества Y, то говорят, что задана *функция* f. Функцию f, как правило, обозначают $y = f(x)$ или $f : X \to Y$. При этом x называется *независимой переменной* или *аргументом функции*, y — *зависимой переменной* или *значением функции*. Множество X называется *областью определения* или *областью существования функции* f и обозначается $D(f)$. Множество всех значений, принимаемых функцией f, когда аргумент x пробегает всю область определения X, называется *множеством значений функции* f и обозначается $E(f)$:

$$E(f) = \left\{ y \in Y \;\middle|\; y = f(x), x \in X \right\}.$$

Очевидно, что множество значений функции $E(f)$ содержится в множестве Y. При этом Y может также содержать элементы, не входящие в $E(f)$ (рис. 3.4).

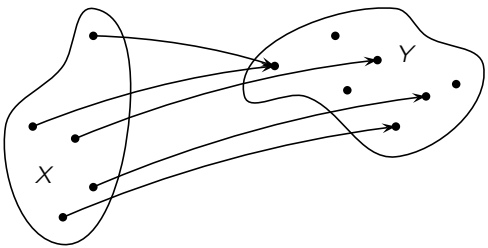

Рис. 3.4

Определение 3.16. Если $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$, т.е. X и Y являются числовыми множествами, то функция $f : X \to Y$ называется *числовой*.

Пример 3.13. Функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ определена на отрезке $[-1, 1]$, т.е. областью определения является множество $X = [-1, 1]$. Множеством значений функции в данном случае является отрезок $[0, 1]$, или $Y = [0, 1]$.

Определение 3.17. Функция, все значения которой равны между собой, называется *постоянной*. Постоянную функцию часто обозначают так же, как и то единственное значение, которое она принимает.

Определение 3.18. *Графиком функции* называется множество всех точек плоскости вида $\big(x; f(x)\big)$, т.е. координаты x и y точек графика связаны соотношением $y = f(x)$.

Например, графиком функции $y = x^2$ является парабола. Естественно, что графиком функции не обязательно является «сплошная» кривая. В частности, графиком функции $y = n!$ будет бесконечное множество изолированных точек (нарисуйте!).

Пример 3.14. Найти $f(2)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f(-x)$, если $f(x) = 1 + x + x^2$.

Р е ш е н и е. Очевидно, что $f(2) = 1 + 2 + 2^2 = 7$. Если вместо независимой переменной подставить выражение $1/x$, то получим:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1 + x + x^2}{x^2}.$$

Аналогично $f(-x) = 1 + (-x) + (-x)^2 = 1 - x + x^2$. □

Пример 3.15. Определить область существования функции

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

Р е ш е н и е. В этом случае подкоренное выражение должно быть неотрицательно: $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$. Решив это неравенство, получим, что областью определения является множество $D = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$. □

3.2.2. Способы задания функции

Чтобы задать функцию, требуется указать правило: как по каждому значению аргумента x находить соответствующее значение функции $y = f(x)$.

Мы рассмотрим четыре наиболее распространённых способа задания функции: аналитический, неявный, табличный и графический.

Аналитический способ

Если зависимость между переменными выражена с помощью формул, то говорят, что функция задана *аналитически*. Формула, задающая функцию, указывает совокупность действий, которые нужно выполнить в определённом порядке, чтобы получить соответствующее значение функции.

Пример 3.16. Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x-1}$. Она определена на промежутке $[1, +\infty)$. Чтобы вычислить значение функции для всех $x \in [1, +\infty)$, необходимо из значения аргумента x вычесть единицу и извлечь из полученного числа квадратный корень. Множеством значений является промежуток $[0, +\infty)$. График функции — множество всех точек плоскости $(x, \sqrt{x-1})$, где переменная x пробегает область определения $[1, +\infty)$ (рис. 3.5).

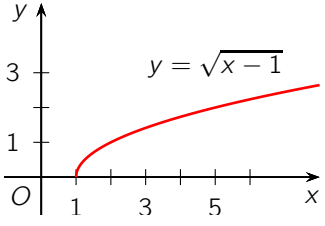

Рис. 3.5

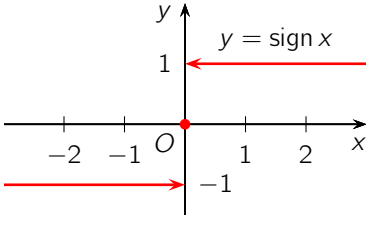

Рис. 3.6

Пример 3.17. Пусть

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (0, +\infty), \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x \in (-\infty, 0). \end{cases} \tag{3.5}$$

Данная функция выражена с помощью нескольких формул. Областью её определения является вся числовая прямая, множество значений состоит из трёх элементов: -1, 0, 1. График изображен на рис. 3.6. Эту функцию обозначают

$$y = \operatorname{sign} x.$$

Неявный способ

Предположим, что значения двух переменных x и y связаны между собой некоторым уравнением, например:

$$y - x^2 = 0, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x^3 + y^3 = 3xy, \quad (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

Тогда каждому значению переменной x можно поставить в соответствие множество решений Y_x такого уравнения относительно переменной y. Полученное соответствие, вообще говоря, не является функцией. В самом деле, для каких-то значений x множество Y_x может оказаться пустым, а для других x оно может содержать два или более элемента. Однако, накладывая определённые ограничения на выбор переменных x и y, часто удаётся добиться, чтобы для всех значений x из выбранного диапазона множество Y_x содержало ровно один элемент. В таких случаях можно говорить о том, что определена функция y переменной x. Описанный способ задания функции называемая *неявным*.

Пример 3.18. Уравнение $y - x^2 = 0$ легко решается относительно переменной y. Для всякого $x \in \mathbb{R}$ существует единственное решение $y = x^2$, которое является функцией, заданной аналитически.

Вообще, всякая аналитически заданная функция $y = f(x)$ может быть представлена в виде уравнения $y - f(x) = 0$.

Пример 3.19. Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задаёт окружность единичного радиуса с центром в начале

координат (рис. 3.7). Для значений аргумента x, лежащих за пределами отрезка $[-1, 1]$, данное уравнение не имеет решений. Если $x \in (-1, 1)$, то решений два:

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

И только для двух значений аргумента: $x = -1$ и $x = 1$ — существует единственное решение $y = 0$.

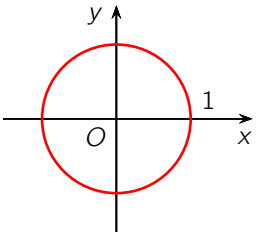

Рис. 3.7

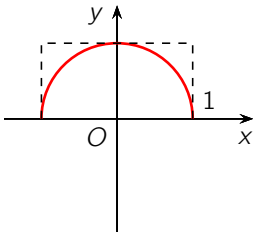

Рис. 3.8

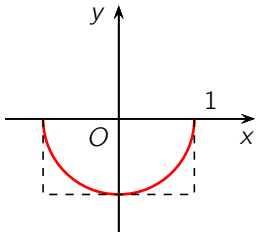

Рис. 3.9

Таким образом, не накладывая ограничений на переменные x и y, мы не можем утверждать, что данное уравнение задаёт функцию.

В данном случае построение таких ограничений не составляет труда. Мы можем, например, выбирать только те решения (x, y) уравнения окружности, которые принадлежат прямоугольнику $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ (рис. 3.8). Тогда всякому значению аргумента x соответствует единственное значение функции $y = \sqrt{1 - x^2}$. Если мы будем выбирать решения из прямоугольника $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$ (рис. 3.9), то получим функцию $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Эти две различные функции задаются неявно одним и тем же уравнением.

Для уравнения окружности нам удалось *явно* выразить переменную y через x. Такие простые уравнения — скорее исключение, чем правило. Очень часто ни одна из переменных уравнения, неявно задающего функцию, не может быть выражена через другую. Свойства таких функций могут быть исследованы исключительно по определяющим их уравнениям.

Табличный способ

Предположим, что нас интересует зависимость расхода топлива от скорости движения легкового автомобиля определённой марки. В инструкции к автомобилю имеется табл. 3.1.

Таблица 3.1

Скорость движения, км/ч	70	80	90	100	110	120
Расход топлива, л на 100 км	6,6	6,3	6,1	6,4	7,0	8,0

Из таблицы видно, что расход топлива изменяется в зависимости от скорости движения автомобиля. Если каждому значению скорости, записанному в первой строке таблицы, поставить в соответствие количество литров топлива, указанное во второй строке и в этом столбце, то получим функцию, заданную *таблично*. Областью определения этой функции является множество из 6 чисел, стоящих в первой строке. Множеством значений является также совокупность из 6 чисел второй строки.

С помощью таблицы часто задают функции, значения которых вычислить сложно. Например, широко известны таблицы тригонометрических функций, показательной и логарифмической функций и т.д.

Имеются способы перехода от функций, которые заданы таблично, к функциям, заданным аналитически. Такую процедуру можно проделать, как правило, лишь приближённо.

Графический способ

В данном случае предполагается, что задан график функции $y = f(x)$ (рис. 3.10).

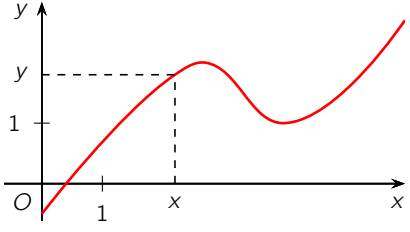

Рис. 3.10

Для того чтобы по некоторому значению аргумента x найти соответствующее значение функции, нужно построить на оси Ox точку x, затем провести из этой точки перпендикуляр к оси Ox, найти точку его

пересечения с графиком и определить длину этого перпендикуляра. Значение функции будет равно этому числу с соответствующим знаком. Такой способ задания функции называется *графическим*.

Примерами графического изображения могут быть записи самопишущих приборов (барографы, осциллографы и т.д.).

3.2.3. Понятия обратной и сложной функций

Определение 3.19. Пусть дана функция $f : X \to Y$. Если каждому $y \in Y$ соответствует единственное значение $x \in X$, для которого $y = f(x)$ (рис. 3.11), то задана функция $\varphi : Y \to X$ такая, что $x = \varphi(y)$. Эта функция называется *обратной* к функции $f(x)$ и записывается в виде

$$x = \varphi(y) = f^{-1}(y).$$

Поскольку функция $f(x)$ является обратной к $f^{-1}(x)$, то функции $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ называют ещё *взаимно обратными*.

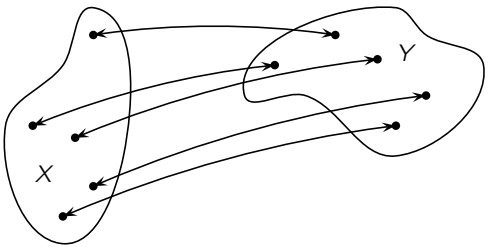

Рис. 3.11

Для нахождения обратной функции $y = f^{-1}(x)$ следует решить уравнение $y = f(x)$ относительно переменной x.

Пример 3.20. Для функции $y = 2x$ существует обратная $x = \dfrac{y}{2}$.

Пример 3.21. Для функции $y = x^2$, заданной на отрезке $[0, 1]$, существует обратная функция $x = \sqrt{y}$. Однако в случае, когда функция $y = x^2$ задана на отрезке $[-1, 1]$, обратной функции не существует, поскольку одному значению y может соответствовать несколько значений x. Например, $y = 1$ соответствуют $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Предположим, что для функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. Пусть множеством значений функции f является отрезок $[c, d]$. Тогда этот отрезок является областью определения обратной функции f^{-1}, а отрезок $[a, b]$ — множеством её значений. Графики функции $y = f(x)$ и обратной к ней $x = f^{-1}(y)$ будут совпадать, если в первом случае аргумент откладывать вдоль оси Ox, а во втором — вдоль оси Oy (рис. 3.12).

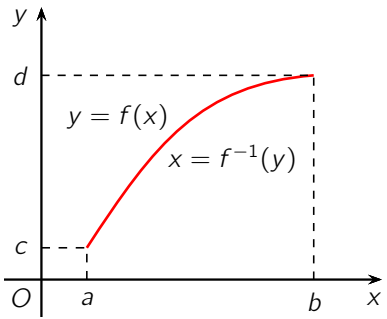

Рис. 3.12

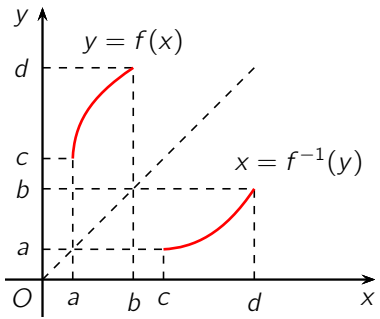

Рис. 3.13

Если же условиться и в случае функции f, и в случае обратной функции f^{-1} независимую переменную обозначать x, а зависимую — y, то для получения графика функции $y = f^{-1}(x)$ из графика $y = f(x)$ нужно первый график зеркально отобразить относительно биссектрисы I и III четвертей координатной плоскости (рис. 3.13).

Определение 3.20. Пусть заданы функции $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ (рис. 3.14). Функция $\varphi : X \to Z$, определяемая по формуле $\varphi(x) = g(f(x))$, называется *сложной функцией* или *суперпозицией функций* $y = f(x)$ и $z = g(y)$.

Пример 3.22. Функция $z = \sqrt{\cos x}$ является сложной функцией, а именно суперпозицией тригонометрической функции $y = \cos x$ и степенной $z = y^{1/2}$.

Пример 3.23. Функция $y = e^{2x+1}$ также является сложной функцией, представимой как суперпозиция линейной функции $t = 2x + 1$ и показательной $y = e^t$.

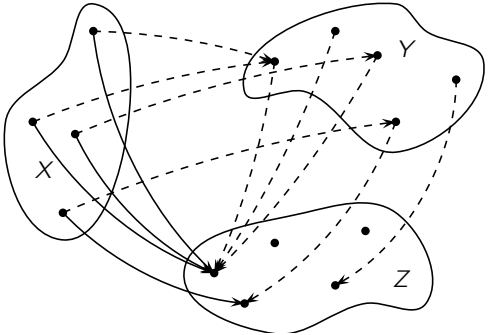

Рис. 3.14

Пример 3.24. Для функции $y = \ln \frac{x}{2}$ найти обратную.

Р е ш е н и е. Очевидно, что данная функция определена на промежутке $(0, \infty)$. Множеством её значений является $\mathbb{R}$. С помощью потенцирования находим $e^y = \frac{x}{2}$. Значит, $x = 2e^y$ является обратной функцией к функции $y = \ln \frac{x}{2}$. Функция $x = 2e^y$ определена на $\mathbb{R}$, множеством её значений является промежуток $(0, +\infty)$. □

Пример 3.25. Представить сложную функцию $y = \arcsin 3^x$ в виде суперпозиции соответствующих функций.

Р е ш е н и е. Данная сложная функция является суперпозицией степенной функции $u = 3^x$ и обратной тригонометрической функции $y = \arcsin u$. □

3.2.4. Элементарные функции

Значительную роль в математике и её приложениях играет небольшой набор функций, которые принято называть *основными элементарными функциями*. Перечислим их.

1. Простейшей является постоянная функция $y = C$.
2. *Степенная функция* имеет вид $y = x^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Примеры степенных функций с различными показателями приведены на рис. 3.15–3.20.

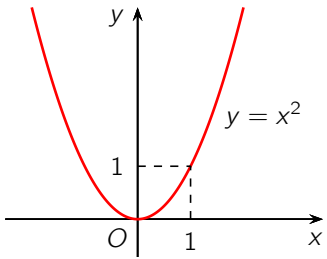

Рис. 3.15

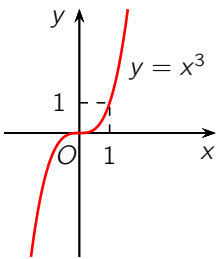

Рис. 3.16

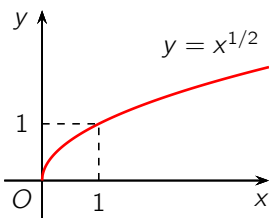

Рис. 3.17

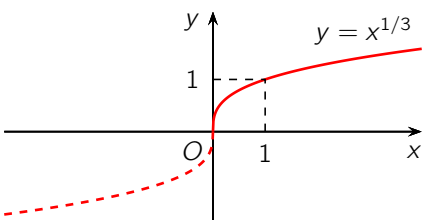

Рис. 3.18

3. *Показательная функция* имеет вид $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. На рис. 3.21 и 3.22 представлен график показательной функции в случаях, когда $a > 1$ и когда $0 < a < 1$.

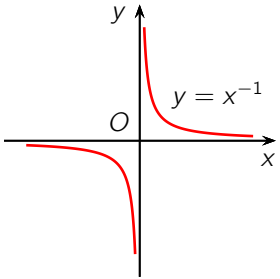

Рис. 3.19

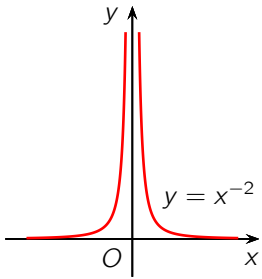

Рис. 3.20

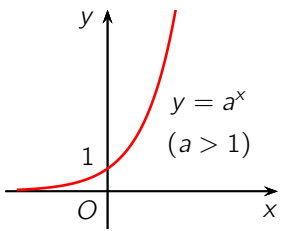

Рис. 3.21

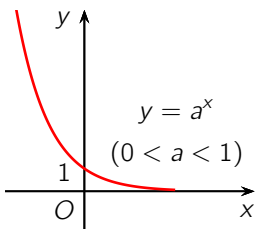

Рис. 3.22

4. *Логарифмическая функция* $y = \log_a x$ задана для $a > 0$, $a \neq 1$. Её графики для случаев $a > 1$ и $0 < a < 1$ изображены на рис. 3.23 и 3.24.

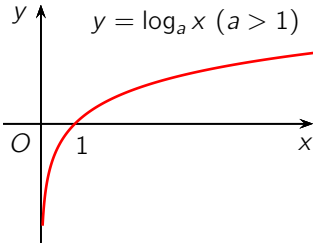

Рис. 3.23

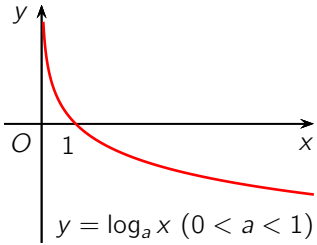

Рис. 3.24

5. *Тригонометрическими* называются функции $y = \sin x$ (*синус*, рис. 3.25), $y = \cos x$ (*косинус*, рис. 3.26), $y = \operatorname{tg} x$ (*тангенс*, рис. 3.27) и $y = \operatorname{ctg} x$ (*котангенс*, рис. 3.28).

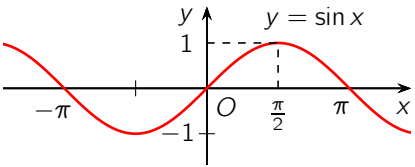

Рис. 3.25

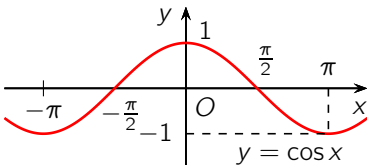

Рис. 3.26

6. *Обратными тригонометрическими* называются функции $y = \arcsin x$ (*арксинус*, рис. 3.29), $y = \arccos x$ (*арккосинус*, рис. 3.30), $y = \operatorname{arctg} x$ (*арктангенс*, рис. 3.31) и $y = \operatorname{arcctg} x$ (*арккотангенс*, рис. 3.32), обратные к соответствующим тригонометрическим функциям.

Определение 3.21. Функция, составленная из основных элементарных функций с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и суперпозиции, называется *элементарной функцией*.

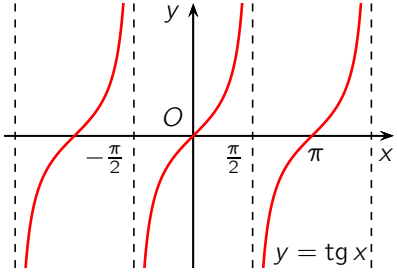

Рис. 3.27

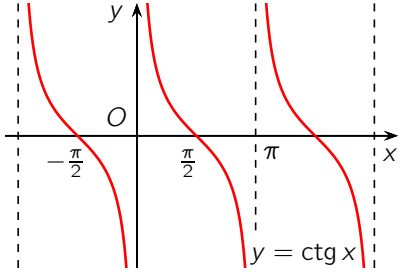

Рис. 3.28

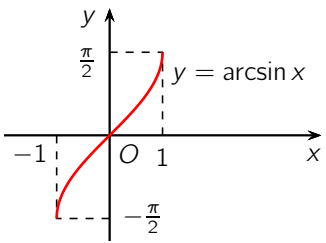

Рис. 3.29

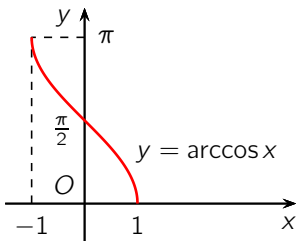

Рис. 3.30

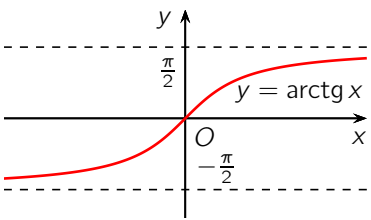

Рис. 3.31

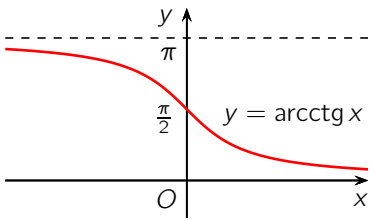

Рис. 3.32

Пример 3.26. Следующие функции являются элементарными:

$$y = \frac{\sin x}{x},\ y = \sqrt{1-x^2},\ y = 2^{-x^2},\ y = |x| = \sqrt{x^2},\ y = x^x = e^{x \ln x}.$$

Определение 3.22. Простейшими элементарными функциями являются *целая рациональная функция*, или *алгебраический многочлен*

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

а также *дробная рациональная функция*

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Множество целых и дробных рациональных функций образует класс *рациональных функций*.

Определение 3.23. Функции, не являющиеся элементарными, называются *неэлементарными*.

Пример 3.27. Функция $y = \operatorname{sign} x$ (см. рис. 3.6) является неэлементарной.

Наше внимание будет сосредоточено преимущественно на элементарных функциях.

3.2.5. Основные характеристики функций

Определение 3.24. Функция $f : X \to Y$, заданная на симметричном относительно начала координат множестве X, называется *чётной*, если для всех $x \in X$ верно, что $f(-x) = f(x)$, и *нечётной*, если для всех $x \in X$ имеет место равенство $f(-x) = -f(x)$.

График чётной функции симметричен относительно оси Oy, а нечётной — относительно начала координат. Примером чётной является функция $y = x^2$ (см. рис. 3.15), нечётной — $y = x^3$ (см. рис. 3.16). Функция $y = 2^x$ (см. рис. 3.21) имеет общий вид, т.е. не является ни чётной, ни нечётной.

Определение 3.25. Функция $f : X \to Y$ называется *возрастающей* (*убывающей*) *на множестве* $A \subset X$, если для любых $x_1, x_2 \in A$ из того, что $x_1 < x_2$, следует неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$.

Определение 3.26. Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*.

Определение 3.27. Функция $f : X \to Y$ называется *строго возрастающей* (*строго убывающей*) *на множестве* $A \subset X$, если для любых $x_1, x_2 \in A$ из того, что $x_1 < x_2$, следует строгое неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Определение 3.28. Строго возрастающие и строго убывающие функции называются *строго монотонными*.

Определение 3.29. Интервалы, на которых функция монотонна, называются *интервалами монотонности* этой функции.

Пример 3.28. Функция $y = x^2$ (см. рис. 3.15) монотонно убывает на интервале $(-\infty, 0]$ и возрастает на интервале $[0, +\infty)$, но не является монотонной на всей числовой оси. В данном случае $(-\infty, 0]$ — интервал убывания, $[0, +\infty)$ — интервал возрастания.

Определение 3.30. Функция $f : X \to Y$ называется *ограниченной*, если

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, x \in X \quad |f(x)| \leqslant M.$$

В противном случае, т.е. когда

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, x \in X \quad |f(x)| > M,$$

функция f называется *неограниченной*.

Пример 3.29. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ (см. рис. 3.31) является ограниченной на $\mathbb{R}$, так как для всякого $x \in \mathbb{R}$ верно неравенство $|\operatorname{arctg} x| \leqslant \pi/2$.

Пример 3.30. Функция $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 3.27) является неограниченной на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, так как не существует числа $M > 0$ такого, чтобы для всех $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ имела место оценка $|\operatorname{tg} x| \leqslant M$.

Определение 3.31. Функция $f : X \to Y$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для всякого $x \in X$ значение $x+T$ также принадлежит области определения X и $f(x+T) = f(x)$. При этом число T называют *периодом функции*. Наименьший положительный период называют *основным периодом*.

Пример 3.31. Периодическими являются все тригонометрические функции, например, $y = \sin x$ (см. рис. 3.25). В качестве её периода могут выступать числа $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$, ... Основной период всегда единственный. В данном случае он равен 2π.

3.2.6. Построение графиков функций

Зная графики основных элементарных функций, научимся строить графики более сложных функций с помощью линейных преобразований.

Пусть задана функция $y = f(x)$ и её график известен (рис. 3.33).

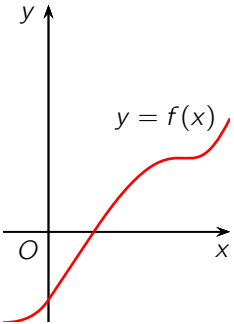

Рис. 3.33

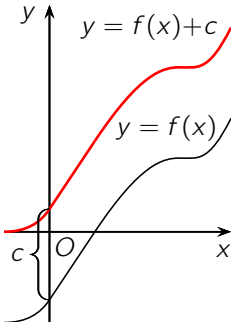

Рис. 3.34

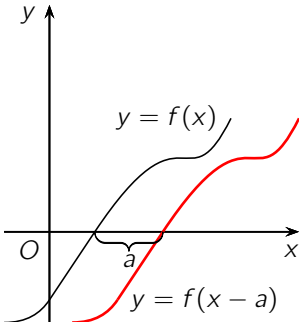

Рис. 3.35

График функции $y = f(x) + c$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса последнего вдоль оси Oy на величину, равную c (рис. 3.34).

График функции $y = f(x - a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью сдвига последнего вдоль оси Ox на величину, равную a (рис. 3.35).

График функции $y = kf(x)$, где $k > 0$, получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в k раз вдоль оси Oy (при $k < 1$ — сжатием). Если $k < 0$, то график функции $y = kf(x)$ получается из графика функции $y = -kf(x)$ зеркальным отображением относительно оси Ox (рис. 3.36).

График функции $y = f(kx)$, где $k > 0$, получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением (при $0 < k < 1$) или сжатием (при $k > 1$) вдоль оси Ox. При $k < 0$ нужно зеркально отобразить график функции $y = f(-kx)$ относительно оси Oy.

Остановимся ещё на одном часто встречающемся преобразовании графиков функций. Чтобы получить график функции $y = |f(x)|$, нужно участки графика функции $y = f(x)$, лежащие выше оси Ox, оставить

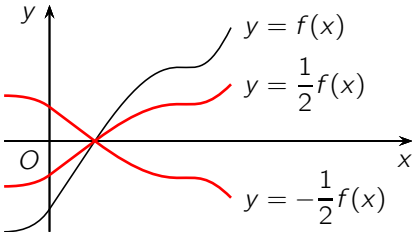

Рис. 3.36

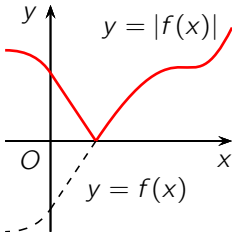

Рис. 3.37

без изменений, а участки графика, лежащие ниже оси Ox, зеркально отобразить относительно этой оси (рис. 3.37).

Пример 3.32. Построить график функции $y = |1 + (x-1)^3|$.

Р е ш е н и е. В качестве исходного возьмём график функции $y = x^3$ (рис. 3.38). С помощью сдвига на величину $a = 1$ вправо вдоль оси Ox получим график функции $y = (x-1)^3$ (рис. 3.39). Если сделать перенос полученного графика вдоль оси Oy на одну единицу вверх, то получим график функции $y = 1 + (x-1)^3$ (рис. 3.40). Наконец, зеркально отобразив ту часть графика, которая расположена ниже оси Ox, получим график функции $y = |1 + (x-1)^3|$ (рис. 3.41). □

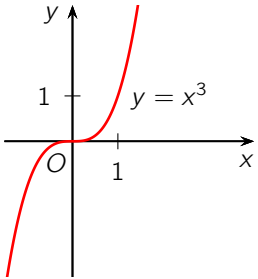

Рис. 3.38

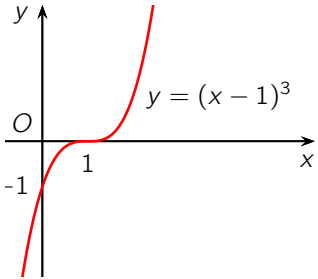

Рис. 3.39

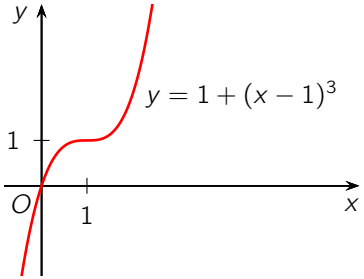

Рис. 3.40

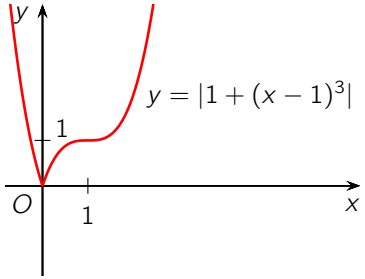

Рис. 3.41

3.2.7. Функциональная зависимость в экономике

Применение математического аппарата в экономических исследованиях способно принести большую пользу. Но прежде чем применить математические методы, исследователь должен составить *математическую модель* прикладной задачи. Такой математической моделью может, например, стать описание какого-либо экономического процесса в виде математической функции. Рассмотрим важнейшие функциональные зависимости, используемые в экономике.

Определение 3.32. *Функция издержек* $C = C(q)$ выражает зависимость издержек производства C от объёма выпуска q.

Пример 3.33. Если функция издержек некоторого производства задаётся формулой $C = 100\sqrt{q}$, то при объёме выпуска 25 единиц издержки составят

$$C = 100\sqrt{25} = 500 \text{ ден. ед.}$$

Определение 3.33. *Функция выручки* $R = R(q)$ задаёт зависимость выручки R от объёма выпуска q.

Пример 3.34. Если продано q единиц товара по цене p за каждую единицу, то выручка $R = pq$.

Определение 3.34. *Функция прибыли* $P = P(q)$ — это зависимость прибыли P от объёма выпуска q.

Прибыль равна разности выручки и издержек:

$$P(q) = R(q) - C(q).$$

Определение 3.35. *Точка безубыточности* — это такой объём выпуска q, при котором издержки равны выручке: $C(q) = R(q)$.

Очевидно, что при достижении объёмом выпуска точки безубыточности прибыль становится равной нулю.

Определение 3.36. *Функции спроса и предложения* $D = D(p)$ и $S = S(p)$ задают зависимость спроса и предложения от цены товара p (рис. 3.42).

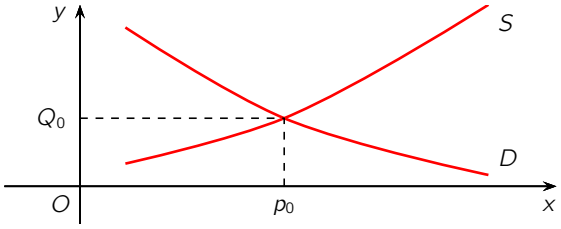

Рис. 3.42

Естественно, что по мере увеличения цены предложение растет, а спрос падает.

Определение 3.37. *Точка рыночного равновесия* (p_0, Q_0) — это точка пересечения линий спроса и предложения (рис. 3.42). При этом цена p_0 называется *равновесной ценой*, а объём продаж Q_0 — *равновесным объёмом продаж*.

Определение 3.38. *Производственная функция* выражает зависимость результатов производства от обусловливающих его факторов.

Определение 3.39. *Функция полезности* $u(x)$ даёт субъективную числовую оценку полезности некоторого действия.

3.3. Предел функции. Два замечательных предела

3.3.1. Предел функции по Гейне
3.3.2. Предел функции по Коши
3.3.3. Односторонние пределы
3.3.4. Бесконечно малые функции
3.3.5. Бесконечно большие функции
3.3.6. Свойства предела функции
3.3.7. Замечательные пределы
3.3.8. Эквивалентные бесконечно малые функции

3.3.1. Предел функции по Гейне

Определение 3.40. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $x = a$, за исключением, быть может, самой точки a. Возьмём последовательность точек $\{x_n\}$ из этой окрестности, сходящуюся к точке a. Значения функции в точках последовательности, в свою очередь, образуют последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ (рис. 3.43).

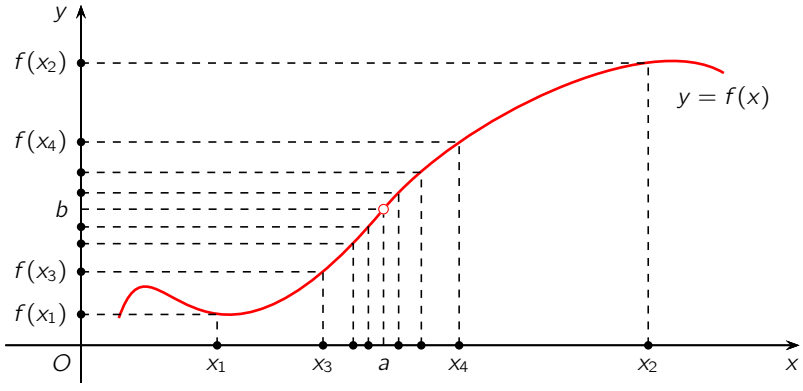

Рис. 3.43

Число b называется *пределом функции f в точке $x = a$* (или при $x \to a$), если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a и такой, что $x_n \neq a$ для всех $n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Другими словами, число b называется *пределом функции f в точке $x = a$*, если

$$\forall \{x_n\},\ x_n \neq a\ (n \in \mathbb{N}),\ \lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

Данное определение называется определением *предела функции по Гейне* или *на языке последовательностей*.

Предел функции f в точке $x = a$ обозначается следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Определение 3.41. Число b называется *пределом функции f при $x \to \infty$* (или *на бесконечности*), если для любой ББП $\{x_n\}$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b. Для обозначения предела функции на бесконечности применяется запись

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b.$$

Пример 3.35. Постоянная функция $f(x) = C$ в каждой точке имеет предел. Действительно, пусть $a \in \mathbb{R}$ и $\{x_n\}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к a. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ верно, что $f(x_n) = C$. В этом случае последовательность $\{f(x_n)\}$ будет иметь своим пределом число C.

Пример 3.36. Функция

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$$

определена всюду на $\mathbb{R}$, за исключением точки $x = 0$ (рис. 3.44). Выясним, существует ли предел этой функции в точке $x = 0$. С этой целью рассмотрим две последовательности.

Пусть первую последовательность составляют числа $x_n > 0$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, такие, что $\sin \frac{\pi}{x_n} = 1$, т.е.

$$\frac{\pi}{x_n} = (4n+1)\frac{\pi}{2}, \quad x_n = \frac{2}{4n+1}.$$

Очевидно, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке $x = 0$, а соответствующая последовательность значений функции будет состоять из единиц и иметь своим пределом число 1.

Теперь возьмём другую последовательность значений аргумента $\{y_n\}$, где $y_n > 0$ и $n \in \mathbb{N}$, такую, что $\sin \frac{\pi}{y_n} = 0$, т.е.

$$\frac{\pi}{y_n} = n\pi, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что в этом случае последовательность значений аргумента $\{y_n\}$ сходится к нулю, а соответствующая последовательность значения функции $\{\sin \frac{\pi}{y_n}\}$ также сходится к нулю.

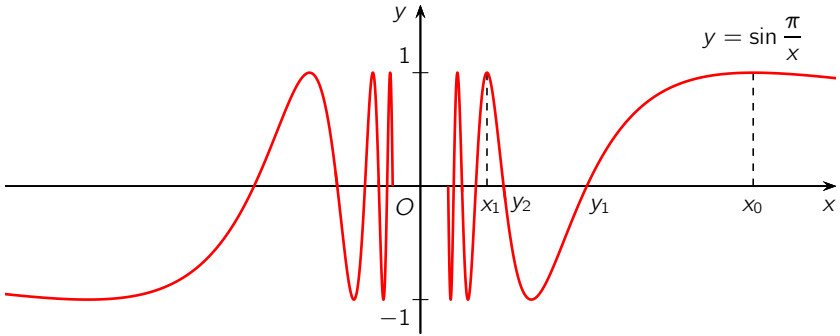

Рис. 3.44

Таким образом, в первом случае последовательность значений функции сходится к единице, а во втором — к нулю. Это означает, что у функции $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ в точке $x = 0$ предел не существует. Данный факт хорошо иллюстрируется графиком рассматриваемой функции (рис. 3.44).

3.3.2. Предел функции по Коши

Дадим теперь определение предела функции по Коши, эквивалентное рассмотренному выше определению по Гейне. Два или более определения принято называть *эквивалентными*, если выполнение любого из них влечёт выполнение любого другого.

Определение 3.42. Число b называется *пределом функции f в точке $x = a$*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует положительное число δ такое, что для всякого x, удовлетворяющего условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Другими словами, число b называется *пределом функции f в точке $x = a$*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Данное определение называется определением *предела функции по Коши* или *на языке $\varepsilon - \delta$*.

Доказательство эквивалентности определений предела функции по Гейне и по Коши мы опустим.
Определение предела функции по Коши можно переформулировать в следующем виде.

Определение 3.43. Число b называется *пределом функции f в точке $x = a$*, если для любой ε-окрестности точки b найдется такая δ-окрестность точки a, что для всех $x \neq a$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки b.

Определение 3.43 называется *определением предела функции на языке окрестностей* и выражает *геометрический смысл предела функции* (рис. 3.45).

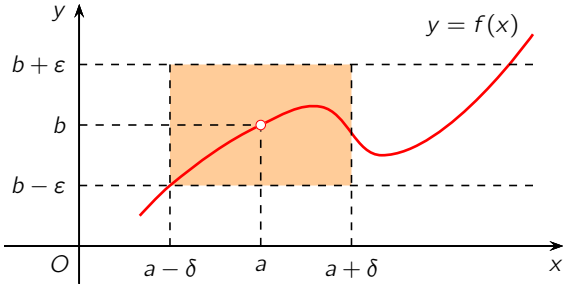

Рис. 3.45

3.3.3. Односторонние пределы

Определение 3.44. Число c называется *правым пределом функции* f *в точке* $x = a$, если для любой сходящейся к a последовательности $\{y_n\}$, члены которой больше a, соответствующая последовательность $\{f(y_n)\}$ сходится к c (рис. 3.46). Символически это записывается следующим образом:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = c.$$

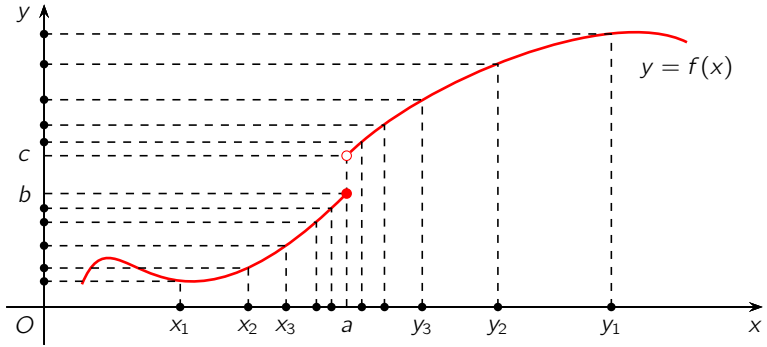

Рис. 3.46

Аналогично определяется левый предел.

Определение 3.45. Число b называется *левым пределом функции* f *в точке* $x = a$, если (рис. 3.46)

$$\forall \{x_n\},\ x_n < a\ (n \in \mathbb{N}),\ \lim_{n \to \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = b.$$

В этом случае применяется обозначение $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$.

Если $a = 0$, то используются следующие сокращения:

$$\lim_{x \to +0} f(x), \quad \lim_{x \to -0} f(x).$$

Определение 3.46. Правый и левый пределы функции в точке называются *односторонними*.

Определение 3.47. Число b называется *пределом функции f при $x \to +\infty$*, если для любой такой ББП $\{x_n\}$, что $x_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Аналогично определяется *предел функции при $x \to -\infty$*. Для записи таких пределов применяются обозначения:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

Сформулируем эти определения на языке $\varepsilon - \delta$. Число b называется *правым (левым) пределом функции f в точке $x = a$*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x,\ a < x < a + \delta\ (a - \delta < x < a), \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Пример 3.37. Функция $y = \operatorname{sign} x$ (см. рис. 3.6) имеет односторонние пределы в точке $x = 0$. Очевидно, что

$$\lim_{x\to+0} \operatorname{sign} x = 1, \qquad \lim_{x\to-0} \operatorname{sign} x = -1.$$

Следующая теорема устанавливает связь между односторонними пределами и пределом функции.

Теорема 3.7. *Для того чтобы функция f имела предел в точке $x = a$, необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны односторонние пределы. В этом случае предел функции равен односторонним пределам:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x).$$

3.3.4. Бесконечно малые функции

Определение 3.48. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой при $x \to a$* (БМФ), если

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

Согласно определению предела функции по Коши функция $\alpha(x)$ является *бесконечно малой при $x \to a$* тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Замечание 3.6. Обратим внимание на необходимость указания точки, в которой функция является бесконечно малой. Например, функция $y = x^2$ является бесконечно малой при $x \to 0$, но не является бесконечно малой при $x \to 1$. В самом деле,

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0, \quad \lim_{x \to 1} x^2 = 1.$$

Свойства БМФ

1. *Сумма любого конечного числа БМФ есть БМФ.* [Доказательство]
2. *Бесконечно малая функция при $x \to a$ является ограниченной в некоторой окрестности точки a.* [Доказательство]
3. *Произведение бесконечно малой функции при $x \to a$ и функции, ограниченной в некоторой окрестности точки a, есть бесконечно малая функция при $x \to a$.* [Доказательство]
4. *Произведение конечного числа БМФ есть БМФ.* [Доказательство]
5. *Произведение БМФ на постоянную есть БМФ.* [Доказательство]

3.3.5. Бесконечно большие функции

Определение 3.49. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой при $x \to a$* (ББФ), если для любого числа $A > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > A$, т.е.

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x,\ 0 < |x-a| < \delta, \quad |f(x)| > A.$$

В этом случае применяется обозначение

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Если известно, что при $0 < |x-a| < \delta$ функция $f(x)$ принимает только положительные (отрицательные) значения, то данное обозначение может быть дополнено путём указания знака бесконечности:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \left(\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \right).$$

Замечание 3.7. Не следует забывать указывать точку, в которой функция является бесконечно большой. Например, функция $y = 1/(x-2)$ является бесконечно большой при $x \to 2$, но не является бесконечно большой при $x \to 1$.

Свойства бесконечно больших функций

1. *ББФ при $x \to a$ не ограничена ни в какой окрестности точки $x = a$.*
2. *Произведение ББФ при $x \to a$ и функции, имеющей ненулевой предел при $x \to a$, есть ББФ при $x \to a$.*
3. *Частное ББФ при $x \to a$ и функции, имеющей предел при $x \to a$, есть ББФ при $x \to a$.*
4. *Произведение двух ББФ при $x \to a$ есть ББФ при $x \to a$.*
5. *Сумма ББФ при $x \to a$ и ограниченной в некоторой окрестности точки a функции есть ББФ при $x \to a$.*

Связь между БМФ и ББФ характеризует следующая теорема.

Теорема 3.8. *Если $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$, причём $\alpha(x) \neq 0$ при $x \neq a$, то $1/\alpha(x)$ — ББФ при $x \to a$. И обратно, если $f(x)$ — ББФ при $x \to a$, то $1/f(x)$ — БМФ при $x \to a$.* [Доказательство]

3.3.6. Свойства предела функции

При исследовании свойств предела функции мы будем пользоваться рассмотренными ранее свойствами БМФ.

1. *Функция $f(x)$ имеет предел b при $x \to a$ тогда и только тогда, когда разность $\alpha(x) = f(x) - b$ является БМФ при $x \to a$.* [Доказательство]

2. *Если у функции $f(x)$ есть предел при $x \to a$, то этот предел единственный.* [Доказательство]

3. *Функция, имеющая предел при $x \to a$, ограничена в некоторой окрестности точки a.* [Доказательство]

4. *Произведение функции, имеющей предел при $x \to a$, на БМФ при $x \to a$ есть БМФ при $x \to a$.* [Доказательство]

5. *Если функция $f(x)$ имеет отличный от нуля предел при $x \to a$, то функция $1/f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки a.* [Доказательство]

6. *Отношение БМФ при $x \to a$ и функции, имеющей отличный от нуля предел при $x \to a$, есть БМФ при $x \to a$.* [Доказательство]

7. *Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$. Тогда:*

а) $\lim\limits_{x\to a}\Big(f(x) + g(x)\Big) = b + c$; *б)* $\lim\limits_{x\to a}\Big(f(x) - g(x)\Big) = b - c$;

в) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = bc$;

г) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ *(при условии, что $c \neq 0$).*

[Доказательство]

8 (о пределе промежуточной функции). *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ определены в некоторой окрестности точки $x = a$, кроме, быть может, самой точки a, и удовлетворяют неравенствам*

$$f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g(x).$$

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$. [Доказательство]

Пример 3.38. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x+2}$.

Р е ш е н и е. Здесь можно применить свойство 7:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 0}(x+2)} = \frac{\left(\lim\limits_{x\to 0} x\right)^2 + \lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} x + \lim\limits_{x\to 0} 2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

Пример 3.39. Найти $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$.

Р е ш е н и е. Очевидно, что

$$\lim_{x\to 1}(x-1) = 0.$$

Поэтому свойство предела частного здесь применить нельзя. Заметим также, что и

$$\lim_{x\to 1}(x^3-1) = 0.$$

Значит, нельзя применить теорему 3.8 о том, что функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой. Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2+x+1, \quad x \neq 1.$$

Так как при рассмотрении предела функции в точке $x = 1$ её аргумент не принимает значения, равного единице, то

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3. \qquad \square$$

3.3.7. Замечательные пределы

Теорема 3.9. *Справедливо равенство*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{3.6}$$

[Доказательство]

Определение 3.50. Равенство (3.6) называется *первым замечательным пределом*.

Следующие соотношения являются следствиями первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$$

Теорема 3.10. *Справедливо равенство*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \tag{3.7}$$

Определение 3.51. Равенство (3.7), представляющее собой обобщение уже известного предела (3.2), называется *вторым замечательным пределом*.

Часто встречаются следствия второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e, \tag{3.8}$$

а также

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k,\quad k>0. \tag{3.9}$$

В частности,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Пример 3.40. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

Р е ш е н и е. *Первый способ*. Чтобы воспользоваться первым замечательным пределом, в выражении под знаком предела выполним замену переменной, полагая $3x = t$, $x = t/3$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{t}{3}} = 3\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 3.$$

Второй способ. Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3 = 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 3\cdot 1 = 3. \qquad \square$$

Пример 3.41. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

Р е ш е н и е. Здесь удобно использовать замену $2x = t$, чтобы свести этот предел к следствию второго замечательного предела (3.8). Действительно, в этом случае имеем, что если $x \to 0$, то $t \to 0$. Значит,

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e^2. \qquad \square$$

3.3.8. Эквивалентные бесконечно малые функции

С целью сравнения значений двух бесконечно малых при $x \to a$ функций в окрестности точки a вводится следующее определение.

Определение 3.52. Две бесконечно малые при $x \to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными в окрестности точки a*, если

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

В этом случае пишут, что $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$.

Таблицей эквивалентностей называется приведённый ниже список часто встречаемых пар эквивалентных БМФ. Если $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to x_0$, то при $x \to x_0$

1) $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$;
2) $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$;
3) $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$;
4) $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$;
5) $\log_a\big(1 + \alpha(x)\big) \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$;
6) $\ln\big(1 + \alpha(x)\big) \sim \alpha(x)$;
7) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$;
8) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;
9) $\big(1 + \alpha(x)\big)^k - 1 \sim k\alpha(x)$;
10) $\sqrt{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{2}$.

Замечание 3.8. Из таблицы эквивалентностей следует, что функции $f(x) = \sin x$ и $g(x) = x$ являются эквивалентными в окрестности точки $x = 0$, т.е. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$. Иначе говоря, значения многочлена $g(x) = x$ в окрестности точки $x = 0$ мало отличаются от значений функции $f(x) = \sin x$; или можно сказать, что многочлен $g(x) = x$ приближает функцию $f(x) = \sin x$ в окрестности точки $x = 0$ (рис. 3.47).

Пример 3.42. Показать, что $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.

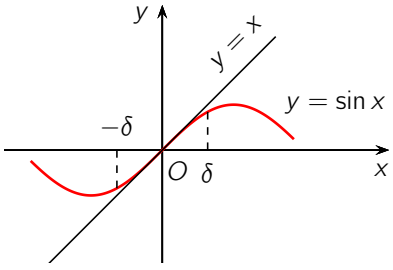

Рис. 3.47

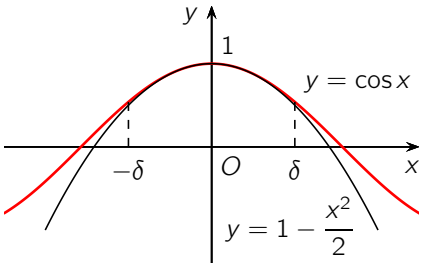

Рис. 3.48

Р е ш е н и е. В самом деле,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1.$$

Значит, функция $\cos x$ приближается многочленом $1-x^2/2$ в окрестности точки $x=0$ (рис. 3.48). □

Следующие две теоремы существенно упрощают вычисление некоторых пределов.

Теорема 3.11. *Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — эквивалентные БМФ при $x\to a$, а функция $f(x)$ имеет предел при $x\to a$, то*

$$\alpha(x)f(x)\sim\beta(x)f(x),\quad x\to a.$$

Теорема 3.12. *Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если любую из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.*

Пример 3.43. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ (ср. с примером 3.40).

Р е ш е н и е. Функция $\alpha(x)=3x$ бесконечно малая при $x\to 0$. Согласно таблице эквивалентностей отсюда следует, что $\sin 3x\sim 3x$ при $x\to 0$. Тогда по теореме 3.12

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3.$$

□

3.4. Непрерывные функции

3.4.1. Непрерывность функции в точке
3.4.2. Теоремы о непрерывных в точке функциях
3.4.3. Точки разрыва и их классификация
3.4.4. Непрерывность элементарных функций
3.4.5. Раскрытие неопределённостей
3.4.6. Теоремы о непрерывных на отрезке функциях

3.4.1. Непрерывность функции в точке

Из всего множества функций целесообразно выделить функции, обладающие свойством непрерывности. Грубо говоря, функция непрерывна, если её график представляет собой сплошную линию, т.е. не имеет разрывов. Непрерывные функции обладают рядом интересных свойств.

Определение 3.53. Функция f, определённая в некоторой окрестности точки $x = a$, включая саму точку a, называется *непрерывной в точке a*, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \tag{3.10}$$

т.е. предел функции и её значение в точке a равны.

Пример 3.44. Функция $y = \operatorname{sign} x$ (см. рис. 3.6) является непрерывной для всех $x \neq 0$. В точке $x = 0$ она не является непрерывной, так как в соответствии с теоремой 3.7 и задачей 3.37 в этой точке не существует её предела.

Определение 3.54. Функция f называется *непрерывной справа в точке a* (рис. 3.49), если

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a),$$

и *непрерывной слева в точке a* (рис. 3.50), если

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a).$$

Пример 3.45. Рассмотрим функцию $f(x) = [x]$, задающую целую часть числа x (рис. 3.51). В точке $a = 2$ для этой функции

$$f(2) = 2, \qquad \lim_{x\to 2+0} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2-0} f(x) = 1.$$

Итак, функция $f(x)$ непрерывна справа в точке $a = 2$, но не является непрерывной слева и непрерывной в обычном смысле в этой точке.

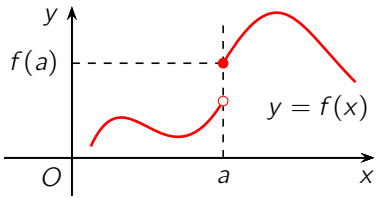

Рис. 3.49

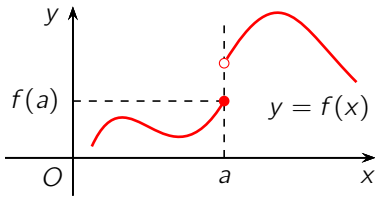

Рис. 3.50

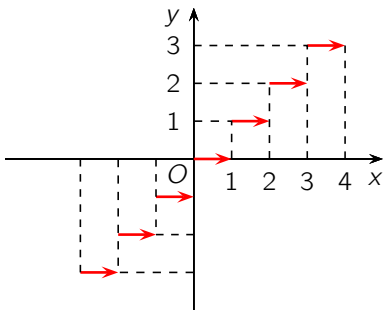

Рис. 3.51

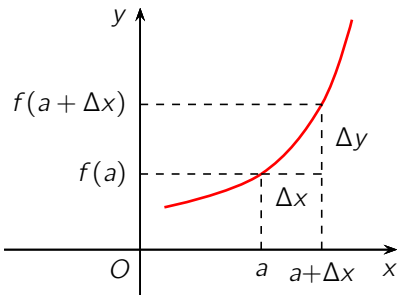

Рис. 3.52

Теорема 3.13. *Для того чтобы функция f была непрерывной в точке a, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывной в этой точке справа и слева.*

Данная теорема является по существу переформулированной теоремой 3.7 об односторонних пределах. Приведем ещё одно определение непрерывной в точке функции. Если учесть, что соотношения $x \to a$ и $(x - a) \to 0$ равносильны, то получим, что условие (3.10) непрерывности функции f в точке a запишется в виде

$$\lim_{x-a\to 0}\Big(f(x) - f(a)\Big) = 0. \tag{3.11}$$

Определение 3.55. Разность $x - a$ называется *приращением аргумента x в точке a* и обозначается Δx, а разность $f(x) - f(a)$ называется *приращением функции f в точке a* и обозначается Δy:

$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = f(x) - f(a),$$

иначе $x = a + \Delta x$, $y = f(a) + \Delta y$.

Теперь условие (3.11) можно записать так:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Тогда новое определение непрерывности функции в точке будет следующим.

Определение 3.56. Функция f называется *непрерывной в точке a*, если её приращение в этой точке есть БМФ, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Данное определение выражает *геометрический смысл непрерывной в точке функции* (рис. 3.52).

3.4.2. Теоремы о непрерывных в точке функциях

Рассмотрим для начала алгебраические свойства непрерывных в точке функций.

Теорема 3.14. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x = a$. Тогда функции*

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \ g(a) \neq 0,$$

также непрерывны в точке a. [Доказательство]

Теорема 3.15 (о непрерывности сложной функции). *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $z = g(y)$ непрерывна в точке y_0, где $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0. Иными словами, суперпозиция непрерывных функций есть функция непрерывная.* [Доказательство]

Теорема 3.16 (о непрерывности обратной функции). *Пусть функция $f : X \to Y$ непрерывна в точке $x_0 \in X$. Тогда, если для функции f существует обратная функция $f^{-1} : Y \to X$, она непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$.*

3.4.3. Точки разрыва и их классификация

Определение 3.57. *Точками разрыва функции f* называются те точки, в которых функция f не является непрерывной.

В зависимости от своего характера разрывы допускают следующую классификацию.

Определение 3.58. Точка разрыва a функции $f(x)$ называется:

1) *точкой разрыва первого рода*, если в ней существуют левосторонний и правосторонний пределы функции $f(x)$, причём если они:
   а) равны, т.е.
   $$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x),$$
   то a называется *точкой устранимого разрыва*;
   б) различны, т.е.
   $$\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x),$$
   то a называется *точкой конечного разрыва*, а модуль разности левостороннего и правостороннего пределов
   $$h = \left| \lim_{x\to a-0} f(x) - \lim_{x\to a+0} f(x) \right|$$
   называется *скачком функции $f(x)$ в точке a*;
2) *точкой разрыва второго рода*, если она не является точкой разрыва первого рода, т.е. если в ней не существует хотя бы один из односторонних пределов.

В точках устранимого разрыва в силу равенства односторонних пределов существует двусторонний предел, доопределив функцию значением которого, можно сделать её непрерывной, т.е. «устранить» разрыв.

Замечание 3.9. Обратим внимание на то, что разрывная в точке $x = a$ функция может быть и не определена в этой точке.

Пример 3.46. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Её график, называемый *мексиканской шляпой*, изображён на рис. 3.53.

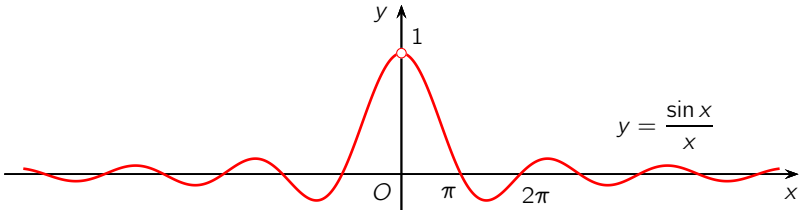

Рис. 3.53

Функция $f(x)$ не задана и, следовательно, терпит разрыв в нуле. По формуле (3.6) предел $f(x)$ в нуле равен единице, поэтому точка $a = 0$ является точкой устранимого разрыва. В самом деле, доопределив $f(x)$ в нуле *по непрерывности*, т.е. положив

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

мы ликвидируем разрыв.

Пример 3.47. Функция $y = \operatorname{sign} x$ (см. рис. 3.6) в точке $a = 0$ имеет конечный разрыв, так как левый и правый пределы здесь существуют и различны. Они равны соответственно -1 и 1, поэтому скачок $h = |-1-1| = 2$.

Пример 3.48. Конечный разрыв со скачком $h = 1$ во всех целочисленных точках терпит функция $y = [x]$ (см. рис. 3.51).

Пример 3.49. Функция $y = 1/x$ (см. рис. 3.19) в точке $a = 0$ имеет разрыв второго рода, так как односторонние пределы в данном случае бесконечны. По той же причине точки $a_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, являются точками разрыва второго рода для функции $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 3.27).

Пример 3.50. Функция $y = \sin \frac{\pi}{x}$ (см. рис. 3.44) в точке $a = 0$ терпит разрыв второго рода, поскольку её односторонние пределы в этой точке не существуют.

Замечание 3.10. Проходя точку разрыва при вычерчивании графика, нам приходится отрывать карандаш от бумаги.

3.4.4. Непрерывность элементарных функций

Интересно, являются ли элементарные функции непрерывными? Рассмотрим вначале *простейшие элементарные функции*.

Постоянная функция $f(x) = c$ является непрерывной в каждой точке числовой прямой. Действительно, для любого $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} f(x) = c = f(a).$$

Непрерывной на всей числовой прямой является и функция $f(x) = x$. Действительно, для всех $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

Отсюда по теореме 3.14 получим, что степенная функция $f(x) = x^n$ для $n \in \mathbb{N}$ непрерывна на $\mathbb{R}$, так как x^n есть произведение n непрерывных функций $f(x) = x$. Следовательно, по той же теореме 3.14 многочлен

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

есть функция, непрерывная на $\mathbb{R}$.

Рациональная функция $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, где p и q — многочлены, есть также непрерывная функция всюду на $\mathbb{R}$, за исключением тех точек, в которых знаменатель $q(x)$ обращается в нуль.

Можно доказать, что степенная функция $f(x) = x^a$ является непрерывной на всей своей области определения для любых $a \in \mathbb{R}$, а не только для натуральных показателей.

Теорема 3.17. *Тригонометрические функции* $\sin x$ *и* $\cos x$ *являются непрерывными на* $\mathbb{R}$.

[Доказательство]

Следствие 3.2. *Тригонометрическая функция* $\operatorname{tg} x$ *является непрерывной во всех точках, где* $\cos x \neq 0$, *т.е.* $x \neq \pi/2 + \pi n$ *для* $n \in \mathbb{Z}$, *а функция* $\operatorname{ctg} x$ *— во всех точках, где* $\sin x \neq 0$, *т.е.* $x \neq \pi n$ *для* $n \in \mathbb{Z}$.

Можно доказать, что функции $f(x) = a^x$ и $f(x) = \log_a x$ для $0 < a \neq 1$ также являются непрерывными в области своего существования: первая — на $\mathbb{R}$, вторая — на $(0, +\infty)$.

Теорема 3.18. *Если известно, что*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{x\to a} g(x) = c,$$

причём a и b не равны нулю одновременно, то

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = b^c.$$

[Доказательство]

Исходя из определения элементарных функций, теоремы 3.14 об алгебраических свойствах непрерывных функций, теоремы 3.15 о непрерывности сложной функции и теоремы 3.16 о непрерывности обратной функции, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3.19 (о непрерывности элементарных функций). *Любая элементарная функция непрерывна во всех точках области своего существования.*

Пример 3.51. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \frac{\sin x}{|x|}.$$

Р е ш е н и е. Пусть $x > 0$. Тогда $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Эта функция непрерывна как частное двух непрерывных функций. Если же $x < 0$, то функция $f(x) = -\frac{\sin x}{x}$ также непрерывна на промежутке $(-\infty, 0)$ по той же причине. Осталось исследовать функцию в точке $x = 0$. Имеем:

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} \left(-\frac{\sin x}{x}\right) = -1.$$

Итак, левый и правый пределы существуют и различны. Следовательно, в точке $x = 0$ функция f имеет разрыв первого рода. □

Пример 3.52. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

Р е ш е н и е. По теореме 3.19 о непрерывности элементарных функций данная функция непрерывна на своей области определения, т.е. всюду на числовой оси, кроме точки $x = 0$. Исследуем функцию $f(x)$ в этой точке:

$$\lim_{x \to -0} e^{\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x \to +0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Таким образом, $x = 0$ — точка разрыва второго рода. □

3.4.5. Раскрытие неопределённостей

Теорема 3.19 утверждает, что всякая элементарная функция непрерывна во всех точках своей области определения. Следовательно, для отыскания предела элементарной функции в точке, принадлежащей её области определения, достаточно найти значение этой функции в данной точке. Если же точка не принадлежит области определения, то формальное вычисление значения функции в ней может привести к выражениям вида

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad \infty-\infty, \quad 1^{\infty}, \quad 0^{0}, \quad \infty^{0},$$

называемым *неопределённостями*.

В случае, когда в некоторой точке имеет место неопределённость любого из перечисленных типов, мы не можем сказать ничего определённого о пределе функции в этой точке. Предел может существовать, а может и не существовать. В первом случае он может принимать любые значения, а во втором — функция может быть бесконечно большой, а может и не быть. Столкнувшись с неопределённостью, следует попытаться преобразовать функцию таким образом, чтобы неопределённость исчезла, т.е. *раскрыть неопределённость*.

Пример 3.53. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5+x^2}-3}{x^2-4}$.

Р е ш е н и е. Подставляя в числитель и знаменатель дроби значение $x=2$, обнаруживаем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Значит, выражение под знаком предела следует преобразовать. Числитель содержит радикал. В этом случае частное удобно умножить и разделить на «сопряжённое» выражение $\sqrt{5+x^2}+3$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5+x^2}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{5+x^2}\right)^2-3^2}{(x^2-4)\left(\sqrt{5+x^2}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{5+x^2-9}{(x^2-4)\left(\sqrt{5+x^2}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x^2-4)\left(\sqrt{5+x^2}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{5+x^2}+3}.$$

Мы раскрыли неопределённость, так как пришли к пределу от элементарной функции в точке $x = 2$, принадлежащей области определения этой функции. Чтобы найти такой предел, достаточно вычислить значение функции при $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{5+x^2}+3} = \frac{1}{\sqrt{5+2^2}+3} = \frac{1}{6}. \qquad \square$$

Пример 3.54. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{99x^2+x+1}{x^2+99}$.

Р е ш е н и е. Числитель и знаменатель данной дроби при $x \to \infty$ являются ББФ, и, таким образом, имеет место неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Преобразуем функцию, стоящую под знаком предела. Разделим числитель и знаменатель на x в наибольшей степени, в данном случае на x^2. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{99x^2+x+1}{x^2+99} = \lim_{x\to\infty} \frac{99+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{99}{x^2}} = \frac{99}{1} = 99.$$

Итак, раскрыв неопределённость, мы смогли применить свойство предела частного. $\square$

Пример 3.55. Найти $\lim\limits_{x\to\pi} (x-\pi)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость вида $0\cdot\infty$. Такие неопределённости часто удаётся привести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\pi} (x-\pi)\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \lim_{x\to\pi} (x-\pi)\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}} = \lim_{x\to\pi} \sin\frac{x}{2}\,\frac{x-\pi}{\cos\left(\dfrac{x-\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\pi} \sin\frac{x}{2} \lim_{x\to\pi} \frac{x-\pi}{-\sin\dfrac{x-\pi}{2}} = -\lim_{x\to\pi} \frac{x-\pi}{\sin\dfrac{x-\pi}{2}}.$$

Функция $\alpha(x) = (x-\pi)/2$ бесконечно малая при $x \to \pi$. Тогда в соответствии с таблицей эквивалентностей (см. п. 3.3.8) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$, и по теореме 3.12

$$\lim_{x\to\pi}(x-\pi)\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\frac{x-\pi}{2}} = -\lim_{x\to\pi}2 = -2. \qquad \square$$

Пример 3.56. Найти $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

Р е ш е н и е. Каждая из двух дробей представляет собой функцию, обратную бесконечно малой. По теореме 3.8 такие функции являются бесконечно большими. Значит, мы имеем дело с неопределённостью вида $\infty - \infty$. Приведём дроби к общему знаменателю и осуществим вычитание:

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9}\right) = \lim_{x\to3}\left(\frac{x+3}{(x-3)(x+3)} - \frac{6}{(x-3)(x+3)}\right) =$$
$$= \lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to3}\frac{1}{x+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}. \qquad \square$$

Пример 3.57. Найти предел $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Р е ш е н и е. Мы столкнулись с неопределённостью вида 1^∞, для раскрытия которой выражение под знаком предела, как правило, пытаются привести к представлению (3.8) второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0}\Big(1+(\cos x-1)\Big)^{\frac{1}{x^2}} =$$
$$= \lim_{x\to0}\Big(1+(\cos x-1)\Big)^{\frac{1}{\cos x-1}\frac{\cos x-1}{x^2}} =$$
$$= \lim_{x\to0}\left(\Big(1+(\cos x-1)\Big)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{\cos x-1}{x^2}}.$$

По теореме 3.18

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \left(\lim_{x\to 0}\Big(1+(\cos x-1)\Big)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}.$$

Функция $\alpha(x)=\cos x-1$ — бесконечно малая при $x\to 0$, поэтому в основании степени стоит второй замечательный предел (3.8), равный e. Чтобы вычислить предел в показателе, воспользуемся примером 3.42, где было установлено, что $1-\cos x\sim x^2/2$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$ □

Для раскрытия неопределённостей вида 0^0 и ∞^0 чаще всего применяют правило Лопиталя, с которым мы ознакомимся позже.

3.4.6. Теоремы о непрерывных на отрезке функциях

Определение 3.59. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a, b), непрерывна справа в точке $x = a$ и непрерывна слева в точке $x = b$.

Теорема 3.20 (об устойчивости знака непрерывной функции). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) \neq 0$. Тогда существует δ-окрестность точки a такая, что в этой окрестности функция f имеет тот же знак, что и $f(a)$.* [Доказательство]

Геометрический смысл теоремы об устойчивости знака состоит в том, что если функция f непрерывна в точке a и отлична в ней от нуля, то некоторая часть графика этой функции, проходящая через точку $(a, f(a))$, не пересекает ось Ox (рис. 3.54).

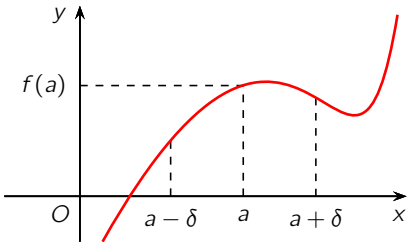

Рис. 3.54

Теорема 3.21 (Больцано — Коши, первая). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка имеет значения разных знаков. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, в которой $f(c) = 0$.*

Геометрический смысл первой теоремы Больцано — Коши также очевиден. Поскольку функция f непрерывна на отрезке, то её график состоит из одного сплошного куска. Эта кривая соединяет точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, одна из которых лежит ниже оси Ox, вторая — выше оси Ox (рис. 3.55). Следовательно, на оси Ox существует точка c, в которой график пересекает эту ось.

Первую теорему Больцано — Коши легко обобщить.

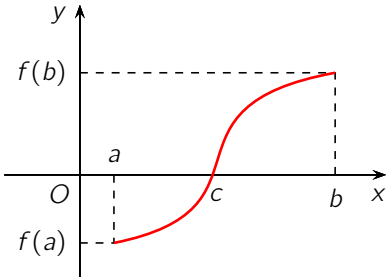

Рис. 3.55

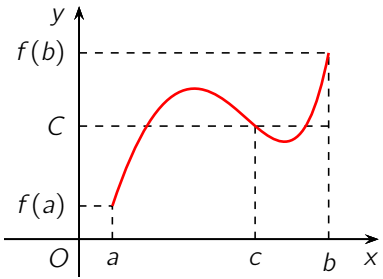

Рис. 3.56

Теорема 3.22 (Больцано — Коши, вторая). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, причём $f(a) \neq f(b)$. Тогда если C — любое число, лежащее строго между $f(a)$ и $f(b)$, то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = C$.* [Доказательство]

Другими словами, теорема 3.22 утверждает, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция принимает любое свое промежуточное значение.

Геометрический смысл второй теоремы Больцано — Коши проиллюстрирован рис. 3.56.

Теорема 3.23 (Вейерштрасса, первая). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Иначе говоря, если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Отметим, что если в первой теореме Вейерштрасса вместо отрезка $[a, b]$ рассматривать интервал (a, b) или какой-либо полуинтервал, то функция $f(x)$ может оказаться и неограниченной. Например, функция $f(x) = 1/x$ непрерывна на полуинтервале $(0, 1]$, но не ограничена на нём.

Теорема 3.24 (Вейерштрасса, вторая). *Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f достигает в некоторых точках этого отрезка своих максимума и минимума.*

Из второй теоремы Вейерштрасса, в частности, следует, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.

Глава 4

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

4.1. Производная функции
4.2. Дифференцируемость функции
4.3. Правило Лопиталя. Понятие о формуле Тейлора
4.4. Исследование функции с помощью производной

4.1. Производная функции

4.1.1. Понятие производной
4.1.2. Геометрический смысл производной
4.1.3. Физический смысл производной
4.1.4. Правила дифференцирования
4.1.5. Таблица производных основных элементарных функций. Производная сложной и обратной функций
4.1.6. Логарифмическая производная
4.1.7. Производная неявной функции
4.1.8. Производные высших порядков
4.1.9. Применение производной в экономике

4.1.1. Понятие производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в окрестности точки $x = a$. Если независимой переменной x придать приращение Δx в этой точке, то функция получит соответствующее приращение

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

По определению непрерывной функции, если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$.

Если же мы хотим получить представление о том, как быстро изменяется значение функции при изменении независимой переменной в окрестности точки $x = a$, то должны сравнить каким-либо образом приращение аргумента Δx и приращение функции Δy. С целью более глубокого изучения функции, исследования скорости изменения ее значений вводится понятие производной — одно из важнейших понятий математики.

Определение 4.1. *Производной функции $y = f(x)$ в точке $x = a$* называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Для обозначения производной используются символы:

$$f'(a), \qquad y'(a), \qquad \frac{dy}{dx}.$$

Таким образом, по определению

$$f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}. \tag{4.1}$$

Операцию нахождения производной называют *дифференцированием*.

Если функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке $x \in X$, то производную можно рассматривать как функцию переменной x на X.

Рассмотрим нахождение производной функции, пользуясь определением.

Пример 4.1. Найти производную функции $f(x) = x^2 + 2x + 2$ в точке $x = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Р е ш е н и е. Придадим приращение Δx аргументу в точке $x = a$. Найдем соответствующее приращение Δy функции $y = f(x)$:

$$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a) = ((a+\Delta x)^2 + 2(a+\Delta x) + 2) - (a^2 + 2a + 2) = \\ = 2a\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\Delta x = (2a + 2 + \Delta x)\Delta x.$$

Теперь воспользуемся формулой (4.1):

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2a+2+\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} (2a + 2 + \Delta x) = 2(a+1).$$

Таким образом, $f'(a) = 2(a+1)$, $a \in \mathbb{R}$. □

Пример 4.2. Найти производную функции $f(x) = |x-1|$ в точке $x = 1$.

Р е ш е н и е. Исходя из определения производной, рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|1+\Delta x - 1| - |1-1|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Очевидно, что в этом случае существуют односторонние пределы

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1,$$

не равные между собой. Таким образом, производная функции $f(x) = |x-1|$ в точке $x = 1$ не существует.

Учитывая, что существуют вышеуказанные односторонние пределы, в этом случае говорят, что у рассматриваемой функции существуют односторонние производные в точке $x = 1$ (правая и левая соответственно). □

Выясним связь между существованием производной в точке и непрерывностью функции.

Теорема 4.1. *Если функция $y = f(x)$ в точке x имеет производную $f'(x)$, то она непрерывна в этой точке.* [Доказательство]

Обратное утверждение неверно. Функция может быть непрерывной в точке, но не иметь в ней производной. Это видно на примере 4.2. Функция $y = |x - 1|$ в точке $x = 1$ непрерывна, но не имеет в ней производной.

4.1.2. Геометрический смысл производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b). Предположим, что кривая AB является графиком этой функции (рис. 4.1). Пусть $M(x_0, f(x_0))$ — какая-либо точка графика. Придадим аргументу приращение Δx в точке x_0. Соответствующую точку на графике обозначим $P(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.

Через точки M и P проведем прямую и назовем ее *секущей*. Если точку P устремить по кривой AB к точке M, то положение секущей будет, вообще говоря, изменяться.

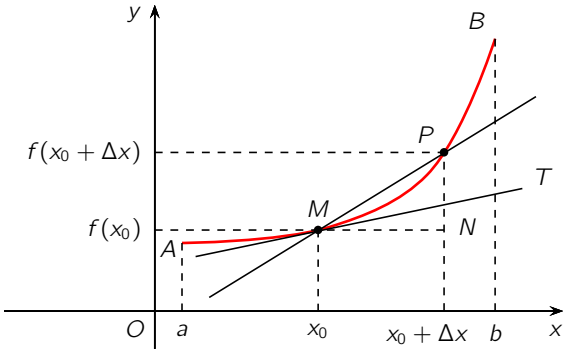

Рис. 4.1

Определение 4.2. *Касательной к кривой в точке M* называется предельное положение (если оно существует) секущей MP, когда точка P неограниченно приближается к точке M.

Обозначим через α угол между касательной MT и осью Ox (или, что то же самое, между касательной MT и прямой MN, рис. 4.1), а через φ — угол между секущей MP и осью Ox, т.е. α — угол наклона касательной MT к оси Ox, а φ — угол наклона секущей MP к оси Ox. Очевидно, что

$$\lim_{P \to M} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha.$$

Поскольку $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{NP}{MN}$, то будем иметь, что

$$\lim_{P\to M} \frac{NP}{MN} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Но из рис. 4.1 видно, что

$$NP = f(x_0+\Delta x) - f(x_0), \quad MN = (x_0+\Delta x) - x_0 = \Delta x.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha,$$

или $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ есть тангенс угла наклона касательной к ее графику в точке $(x_0, f(x_0))$. Другими словами, $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $M(x_0, y_0)$.

Теперь, учитывая уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом (2.5), несложно получить уравнение касательной:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{4.2}$$

Прямая, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ и перпендикулярная касательной, называется *нормалью* к графику в этой точке.

Учитывая условие перпендикулярности двух прямых (2.12), можем записать уравнение нормали:

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) \tag{4.3}$$

при условии $f'(x_0) \neq 0$. Если же $f'(x_0) = 0$, то нормалью будет прямая $x = x_0$.

Пример 4.3. Найти уравнение касательной и нормали к графику функции $y = 2x + 3x^{-2}$ в точке $(1, 5)$.

Р е ш е н и е. Полагаем $x_0 = 1$. Очевидно, что $y(1) = 5$. Найдем угловой коэффициент касательной:

$$y' = 2 - 6x^{-3}, \quad y'(1) = 2 - 6 = -4.$$

Теперь воспользуемся формулой (4.2) и запишем уравнение касательной в точке $(1, 5)$:

$$y - 5 = (-4)(x - 1), \quad y - 5 = -4x + 4, \quad y = -4x + 9.$$

Уравнение нормали будет иметь следующий вид:

$$y - 5 = \frac{1}{4}(x - 1), \quad y = \frac{1}{4}x + 4{,}8.$$

□

4.1.3. Физический смысл производной

Пусть некоторая материальная точка M движется прямолинейно и задан закон ее движения $s = s(t)$, т.е. известно расстояние $s(t)$ от точки M до некоторой начальной точки отсчета в каждый момент времени t. К моменту времени t_0 точка пройдет расстояние $s(t_0)$, а к моменту времени $t_0 + \Delta t$ — расстояние $s(t_0 + \Delta t)$. За промежуток времени Δt точка M пройдет расстояние $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$.

Отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ можно рассматривать как среднюю скорость движения на промежутке времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$. Чем меньше промежуток времени Δt, тем точнее соответствующая средняя скорость будет характеризовать движение точки в момент времени t_0. Поэтому предел средней скорости движения при $\Delta t \to 0$ называют *скоростью* (или *мгновенной скоростью*) *движения точки M в момент времени t_0* и обозначают $v(t_0)$, т.е.

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Но выражение справа есть $s'(t_0)$. Таким образом, $v(t_0) = s'(t_0)$, т.е. скорость движения в момент времени t_0 есть производная от пройденного расстояния по времени.

Понятие скорости, заимствованное из механики, удобно использовать и при изучении производной функции. Какую бы зависимость ни отражала функция $y = f(x)$, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть средняя скорость изменения зависимой переменной y относительно аргумента x на заданном промежутке, а $y'(x)$ есть скорость изменения y в точке x.

4.1.4. Правила дифференцирования

Теорема 4.2. *Если функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ в точке x имеют производные, то сумма, разность, произведение и частное этих функций также имеют производную в этой точке (частное при условии, что $v(x) \neq 0$) и справедливы следующие формулы:*

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \tag{4.4}$$

$$(uv)' = u'v + v'u, \tag{4.5}$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}. \tag{4.6}$$

Доказательство. Вначале покажем, что $(u+v)' = u' + v'$. Воспользуемся определением производной:

$$\begin{aligned}(u+v)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)) - (u(x) + v(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u' + v'.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}(u-v)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x) - v(x+\Delta x)) - (u(x) - v(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} - \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u' - v'.\end{aligned}$$

Для вывода формулы нахождения производной произведения поступим следующим образом:

$$\begin{aligned}(uv)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right) = \\ &= u'v+v'u.\end{aligned}$$

Теперь найдем производную функции $1/v$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{v}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{v(x+\Delta x)}-\frac{1}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)-v(x+\Delta x)}{\Delta x\, v(x+\Delta x)\, v(x)} = \\ &= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{v(x+\Delta x)\, v(x)} = \\ &= -v'(x)\,\frac{1}{v^2(x)} = -\frac{v'}{v^2}.\end{aligned}$$

Осталось получить формулу для производной частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u\cdot\frac{1}{v}\right)' = u'\,\frac{1}{v}+u\left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'}{v}-\frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

□

4.1.5. Таблица производных основных элементарных функций. Производная сложной и обратной функций

1. $(C)' = 0$, C — const.

   Доказательство. Пусть $f(x) = C$. Тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0.$$

□

2. $(\sin x)' = \cos x$.

   Доказательство. Имеем:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Первый предел вычислили исходя из первого замечательного предела, второй — исходя из непрерывности функции $\cos x$. □

3. $(\cos x)' = -\sin x$.

   Доказательство. Поступим так же, как и при выводе формулы 2:

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -1 \cdot \sin x = -\sin x.$$

□

4. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Доказательство. На основании формул 2, 3 и правила дифференцирования частного (4.6) имеем:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \\ = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

□

5. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Доказательство. Поступим так же, как и при выводе формулы для производной $\operatorname{tg} x$:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} = \\ = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x}.$$

□

6. $(a^x)' = a^x \ln a$.

Доказательство. Воспользуемся определением производной (4.1), следствием из второго замечательного предела и непрерывностью функции a^x. Тогда

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

□

7. $(e^x)' = e^x$.

Доказательство. Положив $a = e$ в формуле 6, получим:

$$(e^x)' = e^x \ln e = e^x.$$

□

Теорема 4.3. *Если функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, имеет производную в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в соответствующей точке y_0, $y_0 = f(x_0)$, причем*

$$(f^{-1}(y_0))' = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. По теореме 3.16 обратная функция $x = f^{-1}(y)$ существует, является монотонной и непрерывной в некоторой окрестности точки y_0. Придадим аргументу y некоторое приращение $\Delta y \neq 0$ в этой точке. Соответствующее приращение Δx в силу строгой монотонности тоже будет отличным от нуля. Следовательно,

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y/\Delta x},$$

причем если $\Delta y \to 0$, то и $\Delta x \to 0$. Перейдем к пределу в этом равенстве. Будем иметь:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta y/\Delta x)}$$

или $\big(f^{-1}(y_0)\big)' = \dfrac{1}{f'(x_0)}$. □

8. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Доказательство. Логарифмическую функцию $y = \log_a x$ можно рассматривать как обратную показательной функции $x = a^y$. Поэтому, применив теорему 4.3, получим:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$ □

9. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Доказательство. Полагая $a = e$ в формуле 8, получим:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}.$$

□

10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Доказательство. Функция $y = \arcsin x$ является обратной для функции $x = \sin y$. Поэтому в силу теоремы 4.3

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Корень взят со знаком «+», так как

$$y = \arcsin x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

поэтому $\cos y > 0$. □

11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Доказательство. Функция $y = \arccos x$ является обратной для функции $x = \cos y$. Поэтому в силу теоремы 4.3

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Корень взят со знаком «+», так как

$$y = \arccos x \in (0, \pi),$$

поэтому $\sin y > 0$. □

12. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Доказательство. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является обратной для функции $x = \operatorname{tg} y$. Поэтому в силу теоремы 4.3

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$ □

13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Доказательство. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ является обратной для функции $x = \operatorname{ctg} y$. Поэтому в силу теоремы 4.3

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$ □

Теорема 4.4. *Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y = f(u)$ — в соответствующей точке u_0, $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную в точке x_0, и справедлива следующая формула:*

$$y'(x_0) = f'(u_0)\,\varphi'(x_0). \tag{4.7}$$

Доказательство. По определению производной (4.1)

$$f'(u_0) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u_0+\Delta u) - f(u_0)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f(u_0)}{\Delta u}.$$

На основании свойства 1 предела функции можно записать:

$$\frac{\Delta f(u_0)}{\Delta u} = f'(u_0) + \alpha(\Delta u), \qquad \Delta u \neq 0,$$

где $\alpha(\Delta u)$ есть БМФ при $\Delta u \to 0$. Следовательно,

$$\Delta f(u_0) = f'(u_0)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u.$$

Последняя формула верна и при $\Delta u = 0$. Разделив обе части этого равенства на Δx, получим:

$$\frac{\Delta f(u_0)}{\Delta x} = f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Теперь перейдем к пределу, когда $\Delta x \to 0$. Заметив, что и $\Delta u \to 0$, будем иметь:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(u_0)}{\Delta x} = f'(u_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\left(\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right).$$

Остается учесть, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(u_0)}{\Delta x} = \Big(f\big(\varphi(x_0)\big)\Big)', \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x_0),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = 0\cdot\varphi'(x_0) = 0,$$

и получим формулу (4.7). □

14. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Доказательство. Преобразуем исходную функцию:

$$x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha\ln x}.$$

Тогда, применив теорему 4.4 и правила 7, 9, получим:

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha\ln x}\right)' = e^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)' = e^{\alpha\ln x}\,\alpha\,\frac{1}{x} = x^\alpha\,\alpha\,\frac{1}{x} = \alpha\,x^{\alpha-1}.$$ □

Таким образом, найдены производные всех простейших элементарных функций. Выпишем их в виде так называемой *таблицы основных производных* (считаем u некоторой функцией, зависящей от x, т.е. $u = u(x)$):

1) $(C)' = 0$;

2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}\, u'$ $(\alpha \neq 0)$,
$(x)' = 1$,
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$,
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$;

3) $(a^x)' = a^x \ln a$, $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ $(a > 0,\ a \neq 1)$;

4) $(e^x)' = e^x$, $(e^u)' = e^u\, u'$;

5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$;

6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$;

7) $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

8) $(\cos x)' = -\sin x$, $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

9) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;

10) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$;

11) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

12) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

13) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$;

14) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

Формулы из таблицы производных, правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного и правило дифференцирования сложной функции выражают основные принципы дифференцирования функции. С их помощью можно найти производную любой элементарной функции.

Пример 4.4. Найти производную функции $y = \cos x + x \operatorname{arctg} x + 2$.

Р е ш е н и е. Вначале применим правило дифференцирования суммы (4.4):

$$y' = (\cos x)' + (x \operatorname{arctg} x)' + (2)'.$$

Затем воспользуемся таблицей производных и правилом дифференцирования произведения (4.5):

$$y' = -\sin x + (x)' \operatorname{arctg} x + x(\operatorname{arctg} x)' + 0 = -\sin x + \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}. \qquad \square$$

Пример 4.5. Найти производную функции $y = \sin(2x+1)$.

Р е ш е н и е. Данная функция является сложной,

$$y = \sin u, \quad u = 2x + 1.$$

Обе эти функции имеют производные, и по правилу дифференцирования сложной функции (4.7) находим:

$$y' = (\sin u)'(2x+1)' = \cos u \cdot 2 = 2\cos(2x+1). \qquad \square$$

4.1.6. Логарифмическая производная

Предположим, что $f(x) > 0$ для $x \in (a, b)$. Рассмотрим функцию $y = \ln f(x)$. Дифференцируем ее как сложную, $y = \ln u$, $u = f(x)$:

$$\big(\ln f(x)\big)' = (\ln u)' f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{4.8}$$

Производная от логарифма функции называется *логарифмической производной* этой функции, а последовательное применение операций логарифмирования, а затем дифференцирования — *логарифмическим дифференцированием*.

С помощью указанного метода найдем, например, производную показательно-степенной функции $y = (u(x))^{v(x)}$, где u, v — некоторые функции, имеющие в точке x производные, $u(x) > 0$. Применив формулу (4.8), получим:

$$\frac{y'}{y} = \Big(\ln \big(u(x)\big)^{v(x)}\Big)' = \Big(v(x) \ln u(x)\Big)'.$$

В правой части имеем производную произведения:

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Следовательно,

$$y' = \big(u(x)\big)^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}\right). \tag{4.9}$$

Пример 4.6. Найти производную функции $y = x^x$, $x > 0$.

Р е ш е н и е. Если положить $u = x$ и $v = x$, то можно применить формулу (4.9) и сразу записать производную. Мы же повторим рассуждения, использованные при выводе формулы (4.9). Прологарифмируем исходную функцию

$$\ln y = x \ln x.$$

Дифференцируя это равенство как тождество, т.е. дифференцируя обе его части, находим:

$$\frac{y'}{y} = (x \ln x)' = \ln x + 1.$$

Следовательно, $y' = x^x(1 + \ln x)$. □

4.1.7. Производная неявной функции

Пусть функция $y = y(x)$ задана неявно:

$$F(x, y) = 0.$$

Для нахождения производной y' будем дифференцировать обе части этого равенства, считая, что x — независимая переменная, а y — функция переменной x. Из полученного уравнения найдем y'. Проиллюстрируем этот метод на примере.

Пример 4.7. Найти производную функции y, заданной уравнением $y = \cos(x + 3y)$.

Р е ш е н и е. Дифференцируем обе части уравнения:

$$y' = -\sin(x + 3y)(x + 3y)', \quad y' = -\sin(x + 3y)(1 + 3y').$$

Решаем полученное уравнение относительно y':

$$y' + 3\sin(x + 3y)y' = -\sin(x + 3y), \quad y' = \frac{-\sin(x + 3y)}{1 + 3\sin(x + 3y)}.$$

□

4.1.8. Производные высших порядков

Пусть функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке $x \in (a, b)$. Тогда на промежутке (a, b) будет определена функция $f'(x)$, и тоже можно говорить о ее производной.

Назовем $f'(x)$ *производной первого порядка* функции $f(x)$.

Определение 4.3. *Производной второго порядка* функции $f(x)$ называется производная от функции $f'(x)$, если она существует. Ее обозначают

$$y'', \quad f''(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Производную от второй производной называют *производной третьего порядка* функции $f(x)$ и обозначают

$$y''', \quad f'''(x), \quad \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Определение 4.4. *Производной n-го порядка* функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка, если она существует. Производная n-го порядка обозначается

$$y^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Производные высших порядков широко применяются, в частности, в физике. Выясним, например, физический смысл второй производной.

Пусть материальная точка движется прямолинейно и пройденный ею путь описывается уравнением $s = s(t)$, где t — время. Как известно (см. п. 4.1.3), первая производная от пути по времени есть мгновенная скорость движения точки в момент времени t, $v(t) = s'(t)$. Тогда вторая производная от пути по времени равна скорости изменения функции скорости $v(t)$. А это есть ускорение $a(t)$ материальной точки в момент времени t. Таким образом, вторая производная от пути по времени есть ускорение, т.е.

$$a(t) = s''(t).$$

Теперь найдем производные n-го порядка для некоторых элементарных функций.

1. Рассмотрим степенную функцию $y = x^\alpha$, $x \in (0, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Очевидно, что

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \quad \ldots,$$
$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Если предположить, что $\alpha = k \in \mathbb{N}$, то

$$y^{(k)} = (x^k)^{(k)} = k(k-1)\ldots 2\cdot 1 = k!, \quad y^{(k+1)} = (k!)' = 0.$$

2. Замечательным свойством обладает показательная функция $y = e^x$. Для любого n справедлива формула

$$(e^x)^{(n)} = e^x. \tag{4.10}$$

3. Найдем n-ю производную функции $y = \sin x$. Будем иметь:

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''' = \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

С помощью метода математической индукции можно показать, что

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \tag{4.11}$$

Аналогично

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Приведем еще одну формулу для нахождения производной n-го порядка. Пусть $y = uv$, где u, v — некоторые функции, имеющие производные любого порядка. Будем последовательно находить производные от функции y:

$$y' = u'v + uv',$$
$$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$
$$y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' =$$
$$= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Правые части полученных формул похожи на разложение степеней бинома Ньютона $(u+v)^n$, $n = 1, 2, 3$. Только вместо показателей степени стоят порядки производных. Сами функции u и v следует рассматривать в этом случае как производные нулевого порядка: $u = u^{(0)}$, $v = v^{(0)}$. Тогда можно записать формулу для производной n-го порядка:

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots + \\ + \frac{n(n-k)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + u^{(0)}v^{(n)}. \quad (4.12)$$

Эта формула называется *формулой Лейбница*. Ее можно доказать методом математической индукции.

Пример 4.8. Найти n-ю производную функции $y = x^2 \sin x$.

Р е ш е н и е. Полагаем $u = \sin x$, $v = x^2$ и применяем формулу Лейбница (4.12). Находим:

$$u^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$
$$v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v''' = 0, \quad v^{(n)} = 0, \ n = 3, 4, \ldots .$$

Применяя формулу (4.12), имеем:

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)x^2 + n\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2x + \\ + \frac{n(n-1)}{2!}\sin\left(x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2 = \\ = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)x^2 + 2nx\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + \\ + n(n-1)\sin\left(x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right).$$

□

4.1.9. Применение производной в экономике

Пусть $q = q(t)$ выражает количество продукции, произведенной за время t на некотором предприятии. Необходимо определить производительность труда в момент времени t_0.

Очевидно, что за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от $q_0 = q(t_0)$ до $q_0 + \Delta q = q(t_0 + \Delta t)$. Средняя производительность труда за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$

$$Q_{\text{ср}} = \frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Производительность труда Q в момент времени t_0 можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$Q = \lim_{\Delta t \to 0} Q_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Пусть функция $C = C(q)$ характеризует зависимость издержек производства от количества выпускаемой продукции. Предположим, что количество продукции увеличивается на Δq, т.е. равно $q + \Delta q$. Соответствующие издержки производства будут равны $C(q + \Delta q)$. Тогда приращению количества продукции Δq соответствует приращение издержек производства продукции:

$$C(q + \Delta q) - C(q) = \Delta C(q).$$

Среднее приращение издержек производства будет равно $\frac{\Delta C(q)}{\Delta q}$. Это есть приращение издержек производства на единицу приращения количества продукции. Если перейти к пределу, когда $\Delta q \to 0$, то получим значение *предельных издержек производства*:

$$MC = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta C(q)}{\Delta q} = C'(q).$$

Аналогично, если выручка от реализации q единиц товара описывается функцией $R = R(q)$, то *предельная выручка* определяется как

$$MR = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta R(q)}{\Delta q} = R'(q).$$

Теперь рассмотрим еще одно важное понятие, применяемое в экономике, при определении которого используется производная. Это понятие эластичности функции, введенное Аланом Маршаллом в связи с анализом функции спроса. По существу, эластичность является чисто математическим понятием и может применяться при анализе любых дифференцируемых функций.

Определение 4.5. *Эластичностью функции* $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения относительного изменения функции к относительному изменению аргумента, когда Δx стремится к нулю:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right).$$

Для дифференцируемой функции

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{x}{y} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{x}{y(x)} y'(x). \tag{4.13}$$

Из определения эластичности следует, что при достаточно малых Δx выполняется приближенное равенство

$$\frac{\Delta y}{y} \approx E_x(y) \frac{\Delta x}{x}.$$

Таким образом, эластичность можно рассматривать как коэффициент пропорциональности между относительными изменениями величин y и x. Если, например, x увеличивается на один процент, то y увеличивается (приближенно) на $E_x(y)$ процентов.

Пример 4.9. Найти эластичность функции $y = x^3 + 2$.

Р е ш е н и е. Применив формулу (4.13), будем иметь:

$$E_x(y) = \frac{x}{x^3 + 2}(x^3 + 2)' = \frac{3x^3}{x^3 + 2}.$$

В частности, если $x = 2$, то

$$E_x(y) = \frac{3 \cdot 8}{8 + 2} = 2{,}4.$$

Это означает, что если переменная x возрастает на 1%, то переменная y увеличится приблизительно на 2,4%. □

4.2. Дифференцируемость функции

4.2.1. Понятие дифференцируемости функции в точке
4.2.2. Дифференциал функции и приближенные вычисления с помощью дифференциала
4.2.3. Геометрический смысл дифференциала
4.2.4. Основные теоремы о дифференцируемых функциях

4.2.1. Понятие дифференцируемости функции в точке

Как уже указывалось, операция нахождения производной называется дифференцированием. Применение этого термина оправдано следующими рассуждениями.

Определение 4.6. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x, если существует такое число A, что приращение функции в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad \Delta x \to 0, \tag{4.14}$$

где $\alpha(\Delta x)$ — БМФ при $\Delta x \to 0$.

Теорема 4.5. *Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную $f'(x)$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда справедлива формула (4.14). Разделим обе части этого равенства на Δx и получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x).$$

По свойству 1 предела функции это означает, что существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A,$$

т.е. $f'(x) = A$.

Достаточность. Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, т.е. существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Тогда по тому же свойству 1 имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ — БМФ при $\Delta x \to 0$. Отсюда находим, что

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

т.е. функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. □

Таким образом, в формуле (4.14) можно положить $A = f'(x)$.

4.2.2. Дифференциал функции и приближенные вычисления с помощью дифференциала

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда приращение функции в этой точке может быть записано по формуле (4.14) в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Второе слагаемое $(\alpha(\Delta x)\Delta x)$ является БМФ более высокого порядка по сравнению с функцией $A\Delta x$ (при условии, что $A \neq 0$), так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{A\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{A} = 0.$$

Поэтому первое слагаемое $(A\Delta x)$ является главной частью приращения Δy, причем это слагаемое есть линейная относительно Δx функция.

Определение 4.7. Главная линейная относительно Δx часть приращения функции

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

в точке x называется *дифференциалом функции* $y = f(x)$ в этой точке.

Для обозначения дифференциала используется символ

$$dy = A\Delta x.$$

Если $A = 0$, то $A\Delta x$ не является, вообще говоря, главной частью приращения Δy. В этом случае по определению полагают $dy = 0$.

Учитывая теорему 4.5, а именно, что $A = f'(x)$, можно записать:

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{4.15}$$

Теперь найдем дифференциал функции $f(x) = x$. Применив формулу (4.15), получим:

$$dy = (x)'\Delta x = \Delta x.$$

Поэтому дифференциал независимой переменной x определяют следующим образом: полагают $dx = \Delta x$. Тогда формулу (4.15) можно записать в виде

$$dy = f'(x)\,dx. \tag{4.16}$$

Заметим, что именно последнее равенство объясняет обозначение производной $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{df(x)}{dx}$.

Обратимся снова к формуле (4.14). На основании вышеизложенного можно записать, что $\Delta y \approx dy$ или

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x. \tag{4.17}$$

Формулу (4.17) часто используют в приближенных вычислениях.

Пример 4.10. Найти приближенное значение $e^{0,2}$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой (4.17). Очевидно, что в данном случае $f(x) = e^x$. Положим $x = 0$, $\Delta x = 0{,}2$.

Будем иметь:

$$e^{x+\Delta x} - e^x \approx (e^x)'\Delta x,$$

или

$$e^{0,2} - e^0 = e^0 \cdot 0{,}2, \quad e^{0,2} \approx 1 + 0{,}2 = 1{,}2.$$

Итак, $e^{0,2} \approx 1{,}2$. Более того, при малых Δx и $x = 0$ мы получим формулу $e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x$. □

В случае применения формулы (4.17) важно правильно выбрать точку x и Δx.

4.2.3. Геометрический смысл дифференциала

Проведем к графику функции $y = f(x)$ касательную MT в точке $M(x, y)$ (рис. 4.2).

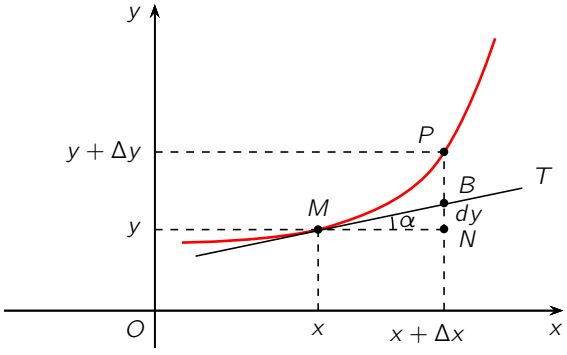

Рис. 4.2

Очевидно, что $MN = \Delta x$, $PN = \Delta y$. Из прямоугольного треугольника MNB находим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BN}{MN}, \quad BN = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x.$$

Согласно геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$. Значит, $BN = f'(x) \cdot \Delta x$.

Теперь сравним последнюю формулу с формулой (4.16). Получим: $dy = BN$.

Геометрический смысл дифференциала функции состоит в том, что дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx.

4.2.4. Основные теоремы о дифференцируемых функциях

Определение 4.8. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум*, если существует δ-окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такая, что

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

Определение 4.9. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный минимум*, если существует δ-окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такая, что

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

Определение 4.10. Локальные максимумы и локальные минимумы функции называются *локальными экстремумами*.

Аналогичным образом можно ввести понятия строгих локальных экстремумов.

Локальными называются свойства функции, которые имеют место в некоторой окрестности той или другой точки.

Из определения локального максимума и минимума следует, что эти понятия имеют локальный характер в том смысле, что неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ $(f(x) \geqslant f(x_0))$ может и не выполняться для всех значений в области определения функции, а должно выполняться лишь в некоторой δ-окрестности точки x_0. Следовательно, функция f может иметь несколько локальных экстремумов (рис. 4.3).

Теорема 4.6 (Ферма). *Пусть функция f определена на интервале (a, b) и в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ имеет локальный экстремум. Тогда если в точке x_0 существует производная, то она равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.*

Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в том, что если в точке $x_0 \in (a, b)$ функция имеет локальный минимум или максимум (рис. 4.4), то касательная в этой точке к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси Ox, т.е. угол наклона касательной к оси Ox равен нулю, и $f'(x_0) = \operatorname{tg} 0 = 0$.

Теорема 4.7 (Ролля). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и на концах отрезка $[a, b]$ принимает равные значения, $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = 0$.*

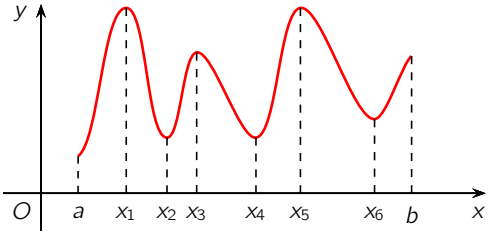

Рис. 4.3

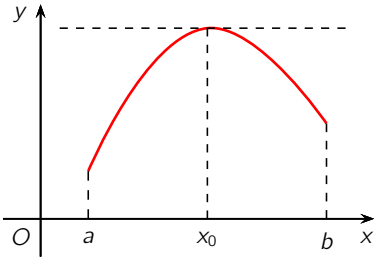

Рис. 4.4

Геометрический смысл этой теоремы заключается в том, что у графика непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции, принимающей на концах равные значения и дифференцируемой на (a, b), существует точка $(c, f(c))$, в которой касательная параллельна оси Ox (рис. 4.5). Иначе говоря, такая функция внутри отрезка $[a, b]$ будет иметь экстремум (например, в точке $c \in (a, b)$) и по теореме Ролля $f'(c) = 0$.

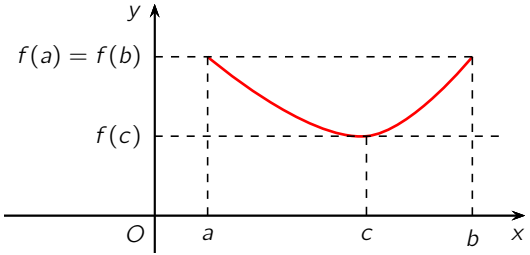

Рис. 4.5

Теорема 4.8 (Лагранжа). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b), то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что справедлива формула*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{4.18}$$

Перейдем к рассмотрению *геометрического смысла теоремы Лагранжа* (рис. 4.6).

Из ΔMKN имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{NK}{MK} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

т.е. левая часть равенства (4.18) есть тангенс угла наклона секущей MN к оси Ox. Правая часть равенства (4.18) есть тангенс угла наклона касательной в некоторой точке $c \in (a, b)$. Таким образом, теорема Лагранжа утверждает, что найдется точка $c \in (a, b)$, в которой касательная к графику функции параллельна секущей, соединяющей концы графика функции (точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$).

Соотношение (4.18) можно записать в виде

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{4.19}$$

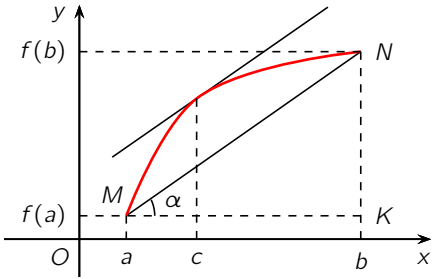

Рис. 4.6

Формулу (4.19) называют *формулой конечных приращений*.

Теорема 4.9 (Коши). *Если функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b), причем $g'(x) \neq 0$, то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что справедливо равенство*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

4.3. Правило Лопиталя. Понятие о формуле Тейлора

4.3.1. Правило Лопиталя
4.3.2. Понятие о формуле Тейлора

4.3.1. Правило Лопиталя

Теорема 4.10 (правило Лопиталя). *Пусть функции f и g определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, за исключением, может быть, самой точки a. Пусть функции f и g являются БМФ при $x \to a$ и $g'(x) \neq 0$ в окрестности точки a. Тогда если существует*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{4.20}$$

[Доказательство]

В данном случае предел отношения двух БМФ сводится к пределу отношения их производных, что часто является весьма удобным приемом при вычислении пределов. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 4.11. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 2x}$.

Р е ш е н и е. В данном случае условия правила Лопиталя выполняются. Функции $f(x) = \sin 4x$ и $g(x) = \operatorname{tg} 2x$ являются дифференцируемыми функциями, например на интервале $(-\pi/4, \pi/4)$, и $f(0) = g(0) = 0$. Применим формулу (4.20):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin 4x)'}{(\operatorname{tg} 2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cos 4x}{\dfrac{2}{\cos^2 2x}} = 2 \lim_{x\to 0} \cos 4x \cos^2 2x =$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \cos 4x \lim_{x\to 0} \cos^2 2x = 2. \quad \square$$

Таким образом, первоначально мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. После перехода к пределу отношения производных такая неопределенность уже отсутствует.

Если функции f и g дважды дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, $f(a) = g(a) = f'(a) = g'(a) = 0$ и существует

$$\lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)},$$

то имеет место равенство

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Это означает, что если $f'(x)$ и $g'(x)$, в свою очередь, являются БМФ при $x \to a$, то правило Лопиталя применимо к пределу

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Нетрудно сформулировать условия, при которых справедлива следующая формула:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}. \tag{4.21}$$

Пример 4.12. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

Р е ш е н и е. Функции $f(x) = x - \sin x$ и $g(x) = x^3$ являются БМФ при $x \to 0$. Применив правило Лопиталя, найдем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}.$$

Очевидно, что

$$f'(x) = 1 - \cos x, \quad g'(x) = 3x^2$$

также являются бесконечно малыми при $x \to 0$. Поэтому имеем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x}.$$

Последний предел есть первый замечательный предел. Однако и его можно вычислить с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\cos x=\frac{1}{6}.$$ □

При решении последнего примера можно воспользоваться формулой (4.21), положив $n=3$.

Правило Лопиталя остается в силе и в случае $a=\infty$ или $a=\pm\infty$. В частности, если функции f и g являются БМФ при $x\to\infty$ и существует

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Действительно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Итак, мы рассмотрели случай отыскания предела частного $\frac{f(x)}{g(x)}$, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ являются БМФ при $x\to a$. Теперь рассмотрим такой же предел, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ являются ББФ при $x\to a$. Можно показать, что в этом случае имеет место утверждение, аналогичное теореме 4.10. При этом можно полагать, что $a=\infty$ или $a=\pm\infty$.

Пример 4.13. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}$.

Р е ш е н и е. Функции $f(x) = \ln^2 x$ и $f(x) = x$ являются ББФ при $x \to +\infty$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x \cdot \dfrac{1}{x}}{1} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Очевидно, что целесообразно еще раз применить правило Лопиталя. Получим:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{1} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0. \qquad \square$$

4.3.2. Понятие о формуле Тейлора

В определении функции не говорится о том, с помощью каких средств находятся значения зависимой переменной y по значениям x. Это нелегко сделать, когда рассматриваются тригонометрические, показательные или логарифмические функции.

Для вычисления значения рассматриваемой функции ее можно заменить многочленом $P_n(x)$ степени n, значения которого легко найти с помощью арифметических действий. При определенных условиях приближенно представить функцию $f(x)$ в виде многочлена и дать оценку такого приближения позволяет формула Тейлора.

Теорема 4.11. *Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в ней производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то для любого x из этой окрестности найдется точка $c \in (x_0, x)$ такая, что справедлива формула*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{4.22}$$

Запишем формулу (4.22) в виде

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

где

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \\ + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{4.23}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{4.24}$$

Определение 4.11. Многочлен $P_n(x)$, определяемый формулой (4.23), называется *многочленом Тейлора* для функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Определение 4.12. Функция $R_n(x)$, определяемая формулой (4.24), называется *остаточным членом в форме Лагранжа*.

Определение 4.13. Формула (4.22) называется *формулой Тейлора* с остаточным членом в форме Лагранжа.

Формула Тейлора (4.22) позволяет заменить функцию $f(x)$ многочленом Тейлора (4.23)

$$f(x) \approx P_n(x)$$

с погрешностью, равной значению остаточного члена $R_n(x)$.

Если в формуле (4.22) положить $x_0 = 0$, то получим:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{4.25}$$

где c находится между 0 и x.

Определение 4.14. Формула (4.25) называется *формулой Маклорена*.

Приведем разложения по формуле Маклорена некоторых элементарных функций:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}, \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cos c, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos c, \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}, \\
(1+x)^\mu &= 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n + \\
&\quad + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)(1+c)^{\mu-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Пример 4.14. Найти число e с точностью 0,001.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой (4.26). Положим в ней $x = 1$:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}.$$

Для нахождения числа e с точностью 0,001 определим n из условия, что остаточный член $e^c/(n+1)!$ должен быть меньше 0,001. Так как $0 < c < 1$, то $e^c < e^1 < 3$. Поэтому неравенство

$$\frac{e^c}{(n+1)!} < 0,001$$

выполняется начиная с $n = 6$:

$$\frac{e^c}{7!} < \frac{3}{5040} = 0,0006 < 0,001.$$

Получаем приближенное равенство

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx$$
$$\approx 2 + 0,5 + 0,1667 + 0,0417 + 0,0083 + 0,0014 = 2,7181 \approx 2,718,$$

т.е. $e \approx 2,718$. □

4.4. Исследование функции с помощью производной

4.4.1. Условие постоянства функции
4.4.2. Достаточное условие монотонности функции
4.4.3. Необходимые и достаточные условия локального экстремума
4.4.4. Наибольшее и наименьшее значения функции
4.4.5. Выпуклые функции
4.4.6. Асимптоты графика функции
4.4.7. Общая схема исследования поведения функций и построения графиков функций

4.4.1. Условие постоянства функции

Теорема 4.12. *Пусть функция f непрерывна на промежутке X и имеет внутри него производную $f'(x)$. Для того чтобы функция $f(x)$ была постоянной на X, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ внутри X.* [Доказательство]

4.4.2. Достаточное условие монотонности функции

Рассмотрим достаточное условие строгой монотонности непрерывной функции на промежутке.

Теорема 4.13. *Если функция f непрерывна на промежутке X, дифференцируема внутри него и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) внутри X, то функция f является строго возрастающей (строго убывающей) на X.*

[Доказательство]

Пример 4.15. Найти промежутки возрастания и убывания функции $y = 4x^3 + 9x^2 + 6x + 2$.

Р е ш е н и е. Рассматриваемая функция определена на числовой прямой. Найдем ее производную: $y' = 12x^2 + 18x + 6 = 6(2x^2 + 3x + 1)$.

Определим интервалы знакопостоянства производной. С этой целью решим уравнение $2x^3 + 3x + 1 = 0$ и получим $x_1 = -1$, $x_2 = -1/2$. Следовательно, $y' = 2(x + 1)(x + 1/2)$.

Будем иметь: если $x \in (-\infty, -1) \cup (-1/2, +\infty)$, то $y' > 0$; если же $x \in (-1, -1/2)$, то $y' < 0$. Значит, на промежутках $(-\infty, -1)$ и $(-1/2, +\infty)$ функция возрастает, а на $(-1, -1/2)$ — убывает. □

4.4.3. Необходимые и достаточные условия локального экстремума

Теорема 4.14 (необходимое условие экстремума). *Пусть функция f определена на интервале (a, b) и в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ имеет локальный экстремум. Тогда если в точке x_0 существует производная, то она равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.*

Заметим, что приведенное условие повторяет теорему Ферма. Другими словами, теорема Ферма является необходимым условием экстремума функции.

Определение 4.15. *Стационарной точкой функции* f называется точка, в которой производная $f'(x)$ равна нулю.

Если f — дифференцируемая на некотором промежутке функция, то точками экстремума могут быть лишь стационарные точки. Однако не каждая стационарная точка является точкой экстремума. Например, функция $y = x^3$ имеет стационарную точку $x = 0$ ($y' = 3x^2$), но очевидно, что эта точка не является точкой экстремума. Поэтому целесообразно найти достаточные условия локального экстремума.

Теорема 4.15 (первое достаточное условие экстремума). *Пусть функция f дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки x_0. Тогда если $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) > 0$ и $\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) < 0$, то в точке x_0 функция f имеет локальный максимум; если же $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) < 0$ и $\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) > 0$, то в точке x_0 функция f имеет локальный минимум. Если $f'(x)$ имеет во всей δ-окрестности один и тот же знак, то в точке x_0 локального экстремума нет.* [Доказательство]

Условия теоремы можно интерпретировать следующим образом. Если производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то функция f имеет в точке x_0 локальный экстремум. Причем если производная меняет знак с плюса на минус, то точка x_0 является точкой максимума, если же с минуса на плюс, — точкой минимума. Очевидно, что теорема 4.15 имеет простой геометрический смысл.

Пример 4.16. Найти точки экстремума функции

$$y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1.$$

Р е ш е н и е. Данная функция дифференцируема на всей числовой прямой. Найдем ее производную:

$$y' = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3).$$

Теперь находим стационарные точки функции:

$$3(x^2 + 2x - 3) = 0, \quad x_1 = -3,\ x_2 = 1.$$

Точки $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ являются точками возможного локального экстремума. Воспользуемся первым достаточным условием экстремума. Для этого изучим знак производной при переходе через эти точки. Очевидно, что

$$\forall\, x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)\ \ f'(x) > 0, \qquad \forall\, x \in (-3, 1)\ \ f'(x) < 0.$$

Следовательно, в точке $x_1 = -3$ рассматриваемая функция имеет локальный максимум, $y(-3) = 28$, а в точке $x_2 = 1$ — локальный минимум, $y(1) = -4$. □

Часто при исследовании точек возможного локального экстремума удобно применять следующую теорему.

Теорема 4.16 (второе достаточное условие экстремума). *Пусть точка x_0 есть стационарная точка функции f, в которой существует вторая производная $f''(x_0)$. Тогда если $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 является точкой локального максимума функции f, если $f''(x_0) > 0$, то точка x_0 является точкой локального минимума.* [Доказательство]

Второе достаточное условие экстремума удобно тем, что в данном случае исследуется знак второй производной $f''(x)$ только в самой стационарной точке.

Обратимся теперь к примеру 4.16. Найдем вторую производную функции y: $y'' = 6(x + 1)$. Очевидно, что $y''(-3) = -12 < 0$, $y''(1) = 12 > 0$. Следовательно, в соответствии со вторым достаточным условием тоже можно сделать заключение, что точка $x = -3$ является точкой локального максимума, а точка $x = 1$ — точкой локального минимума.

4.4.4. Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. По второй теореме Вейерштрасса функция f принимает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения. Поставим вопрос об их отыскании. Пусть, например, требуется отыскать наибольшее значение функции f. Тогда нужно найти все точки локального максимума и значения функции в этих точках. Наибольшее значение может достигаться также на одном из концов отрезка. Поэтому, сравнив значения функции во всех точках локального максимума и значения $f(a)$ и $f(b)$, найдем наибольшее из них. Оно и будет наибольшим значением функции f на отрезке $[a, b]$.

Аналогично находится наименьшее значение функции f на отрезке $[a, b]$.

Если функция f дифференцируема на (a, b), то можно поступить следующим образом: найти все стационарные точки функции f на (a, b), вычислить значения функции в стационарных точках и значения $f(a)$ и $f(b)$; наименьшее из них будет наименьшим значением функции на отрезке $[a, b]$, а наибольшее из них — наибольшим значением функции.

Задача об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции часто возникает в приложениях, в том числе в экономике.

4.4.5. Выпуклые функции

Пусть функция f дифференцируема на интервале (a, b). Тогда в каждой точке ее графика существует касательная.

Определение 4.16. Функция f называется *выпуклой вверх (выпуклой)* на интервале (a, b), если ее график расположен ниже любой касательной на (a, b) (рис. 4.7).

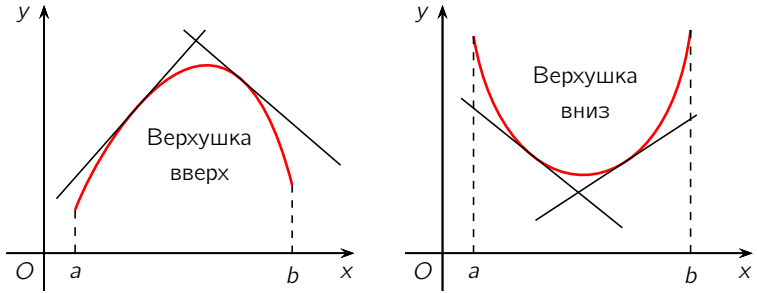

Рис. 4.7

Определение 4.17. Функция f называется *выпуклой вниз (вогнутой)* на интервале (a, b), если ее график расположен выше любой касательной на (a, b) (рис. 4.7).

Теорема 4.17 (достаточное условие выпуклости). *Если функция f имеет на интервале (a, b) вторую производную и $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) во всех точках $x \in (a, b)$, то функция f выпукла вниз (выпукла вверх) на (a, b).* [Доказательство]

Определение 4.18. Точка $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$, называется *точкой перегиба* непрерывной функции f, если слева и справа от этой точки функция f имеет разные направления выпуклости.

Так, например, точка $O(0,0)$ является точкой перегиба функции $y = x^3$. Поскольку $y'' = 6x$ и $y'' < 0$, $x \in (-\infty, 0)$, и $y'' > 0$, $x \in (0, +\infty)$, то на промежутке $(-\infty, 0)$ функция $y = x^3$ выпуклая вверх, а на $(0, +\infty)$ — выпуклая вниз и точка $x = 0$ является точкой, разделяющей промежутки выпуклости разной направленности.

Теорема 4.18 (необходимое условие точки перегиба). *Пусть точка $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$ является точкой перегиба функции f. Тогда если в точке x_0 функция f имеет вторую производную, то $f''(x_0) = 0$.*

Таким образом, условие $f''(x) = 0$ играет такую же роль в отношении точек перегиба, как условие $f'(x) = 0$ — в отношении точек локального экстремума. Оно необходимо, но не достаточно. Так, например, функция $f(x) = x^4$ имеет вторую производную $f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$, но точка $O(0,0)$ не является точкой перегиба функции, поскольку $f''(x) \geqslant 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, и функция f выпуклая вниз на $(-\infty, +\infty)$.

Не будем проводить доказательство теоремы 4.18. Заметим лишь, что, например, при условии существования непрерывной второй производной в окрестности точки x_0 является вполне естественным ее равенство нулю в этой точке, так как с одной стороны от точки x_0 $f''(x) \leqslant 0$, а с другой стороны от x_0 $f''(x) \geqslant 0$.

Теорема 4.19 (достаточное условие точки перегиба). *Пусть функция f имеет вторую производную $f''(x)$ в некоторой окрестности точки x_0. Тогда если вторая производная $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, то точка $(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции f.*

Действительно, если производная $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, то по теореме 4.17 это означает, что функция f является выпуклой с разной направленностью слева и справа от точки x_0, т.е. точка $(x_0, f(x_0))$ есть точка перегиба графика функции f.

4.4.6. Асимптоты графика функции

Определение 4.19. Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ равен $+\infty$ либо $-\infty$.

Так, график функции $y = 1/x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, потому что

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-0}\frac{1}{x} = -\infty.$$

Пусть теперь функция f определена на промежутке $(a, +\infty)$.

Определение 4.20. Прямая $y = kx + l$ называется *наклонной асимптотой графика функции* $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если функция f представима в виде

$$f(x) = kx + l + \alpha(x), \tag{4.27}$$

где $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to +\infty$.

Очевидно, что и в случае вертикальной асимптоты, и в случае наклонной асимптоты характерным признаком является неограниченное сближение графика функции и прямой, являющейся асимптотой.

Теорема 4.20. *Для того чтобы график функции f имел наклонную асимптоту при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = l. \tag{4.28}$$

[Доказательство]

Замечание 4.1. Если предел

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

конечен, то

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

и наклонная асимптота имеет вид $y = l$, где

$$l = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

В этом случае наклонная асимптота называется *горизонтальной*.

Аналогично определяется наклонная асимптота и доказывается соответствующая теорема для случая $x \to -\infty$. При этом равенства (4.28) следует заменить на равенства

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = l.$$

Пример 4.17. Найти наклонные асимптоты графика функции

$$y = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Р е ш е н и е. Наклонную асимптоту при $x \to +\infty$ найдем, применив теорему 4.20. Имеем:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1,$$

$$l = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0.$$

Значит, $y = x$ — наклонная асимптота при $x \to +\infty$.

Для нахождения наклонной асимптоты при $x \to -\infty$ поступим аналогичным образом:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = -1,$$

$$l = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = 0.$$

Значит, $y = -x$ — наклонная асимптота при $x \to -\infty$. □

Приведенный пример показывает, что наклонные асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ могут быть разными.

4.4.7. Общая схема исследования поведения функций и построения графиков функций

Для полного исследования поведения функций и построения их графиков можно рекомендовать следующую схему:

1) найти область определения функции;
2) найти точки разрыва функции, вертикальные асимптоты (если они существуют), точки пересечения с осями координат;
3) определить четность (нечетность) и периодичность функции;
4) найти промежутки монотонности функции и точки локального экстремума;
5) определить промежутки выпуклости функции и точки перегиба;
6) выяснить вопрос о существовании наклонных асимптот;
7) на основании полученных данных построить график функции (иногда полученные данные сводят в таблицу).

Рассмотрим пример, иллюстрирующий приведенную схему.

Пример 4.18. Построить график функции $y = e^{-x^2}$.

Р е ш е н и е. 1. Областью определения данной функции является вся числовая прямая.

2. Функция непрерывна на $\mathbb{R}$. Вертикальных асимптот не имеет.

График функции не пересекает ось Ox, так как $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Если $x = 0$, то $y = 1$, и график функции пересекает ось Oy в точке $(0, 1)$.

3. Функция является четной, так как

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Свойством периодичности функция не обладает.

4. Найдем производную функции: $y' = -2xe^{-x^2}$. Очевидно, что $y'(x) > 0$, $x \in (-\infty, 0)$, и $y'(x) < 0$, $x \in (0, +\infty)$.

Следовательно, функция является возрастающей на промежутке $(-\infty, 0)$ и убывающей на $(0, +\infty)$.

Стационарной точкой является только точка $x = 0$. Из теоремы 4.15 следует, что точка $x = 0$ является точкой локального максимума, $y(0) = 1$.

5. Найдем вторую производную:

$$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

Найдем точки, в которых вторая производная обращается в нуль, т.е. точки возможного перегиба:

$$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0, \quad x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда следует:

$$y''(x) > 0, \quad x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right),$$
$$y''(x) < 0, \quad x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Таким образом, функция $y = e^{-x^2}$ является выпуклой вниз на промежутках $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ и $(1/\sqrt{2}, +\infty)$ и выпуклой вверх на $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Значит, точки $(\pm 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{e})$ являются точками перегиба.

6. Выясним вопрос о существовании наклонных асимптот:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^{x^2}} = 0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = 0$ (ось Ox) является горизонтальной асимптотой при $x \to +\infty$. Очевидно, что эта прямая является асимптотой и при $x \to -\infty$.

7. Для построения графика полученные результаты сведем в табл. 4.1.

Таблица 4.1

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$
y	$+$	$e^{-1/2}$	$+$	1	$+$	$e^{-1/2}$	$+$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

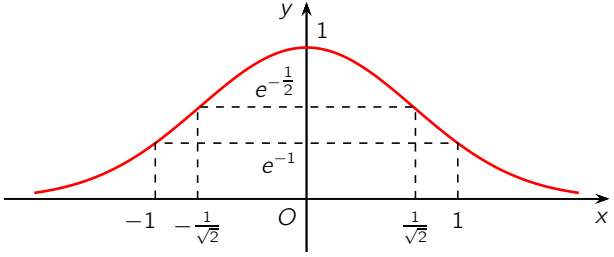

Рис. 4.8

На основании полученных данных строим график (рис. 4.8).

Полученная кривая называется *кривой Гаусса*. Заметим также, что в силу четности функции и симметричности графика относительно оси Oy можно было исследовать функцию лишь на промежутке $(0, \infty)$.

□

Глава 5

Теория интегрирования

5.1. Неопределенный интеграл
5.2. Интегрирование некоторых классов функций
5.3. Определенный интеграл
5.4. Приложения определенного интеграла
5.5. Несобственные интегралы

5.1. Неопределенный интеграл

5.1.1. Первообразная
5.1.2. Неопределенный интеграл
5.1.3. Таблица интегралов
5.1.4. Простейшие методы интегрирования

5.1.1. Первообразная

Как было сказано в предыдущей главе, для приложений производная имеет важное значение с точки зрения поиска скорости протекания процесса. Естественным образом возникает следующая задача: как, зная скорость изменения некоторого процесса, описать сам процесс? Иными словами, как, зная производную некоторой функции, восстановить саму функцию?

Определение 5.1. Функция F, определенная на интервале (a, b), называется *первообразной* для функции f на этом же интервале, если для всех $x \in (a, b)$ $F'(x) = f(x)$.

Пример 5.1. Найти первообразную для функции $f(x) = 2x$.

Р е ш е н и е. Используя таблицу производных, легко подобрать функцию $F(x)$ таким образом, что $F'(x) = 2x$. Например, $F(x) = x^2$. Однако, используя то, что производная константы равна нулю, в качестве первообразной для функции $f(x) = 2x$ можно взять и $F_1(x) = x^2 + 1$, и $F_2(x) = x^2 - 2$. □

Учитывая пример, можно заключить, что задача об отыскании первообразной по данной функции f решается неоднозначно. Если, например, F есть первообразная для функции f, то функция $F(x) + C$ также является первообразной для функции f. Действительно,

$$(F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x) + 0 = f(x).$$

В частности, функция $x^2 + C$, где C — произвольная постоянная, есть первообразная для функции $2x$ на $\mathbb{R}$.

Теорема 5.1. *Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a, b), то множество всех первообразных задается формулой*

$$F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Доказательство. Вначале покажем, что функция $F(x)+C$ является первообразной для функции $f(x)$, т.е.

$$(F(x)+C)' = f(x).$$

Этот факт следует непосредственно из того, что $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$, и правил дифференцирования:

$$(F(x)+C)' = F'(x) + (C)' = f(x) + 0 = f(x).$$

Теперь покажем, что никакая другая функция, кроме указанных, не может являться первообразной для функции $f(x)$. Действительно, пусть некоторая функция $\Phi(x)$ является первообразной функции $f(x)$, т.е. $\Phi'(x) = f(x)$. Тогда

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Окончательно, применяя условие постоянства функции, получим:

$$\Phi(x) - F(x) = C \;\Rightarrow\; \Phi(x) = F(x) + C.$$ □

Таким образом, если известна хотя бы одна первообразная для данной функции f, то известно и все множество первообразных для этой функции.

5.1.2. Неопределенный интеграл

Определение 5.2. *Неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ называется множество всех первообразных этой функции. Обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования*.

Используя теорему 5.1, заключаем, что

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Замечание 5.1. Всякая непрерывная функция на множестве X имеет на этом множестве первообразную, а значит, и неопределенный интеграл.

Определение 5.3. График каждой первообразной называется *интегральной кривой*.

Заметим, что интегральная кривая $F(x) + C$ получается из интегральной кривой $F(x)$ параллельным переносом вдоль оси Oy на C единиц (рис. 5.1).

Геометрический смысл неопределенного интеграла состоит в том, что неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых, получаемых друг из друга параллельным переносом вдоль оси Oy.

Свойства неопределенного интеграла

1. *Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

[Доказательство]

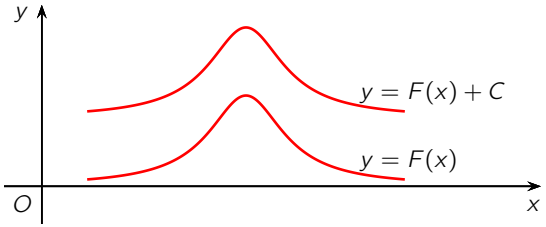

Рис. 5.1

2. *Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.*

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

[Доказательство]

3. *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной, т.е.*

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

[Доказательство]

4. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если* $k = \text{const} \neq 0$, *то*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

[Доказательство]

5. *Неопределенный интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций, т.е.*

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

[Доказательство]

Замечание 5.2. Из свойств 4 и 5 следует равенство

$$\int (af(x) + bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

5.1.3. Таблица интегралов

Приведем *таблицу основных интегралов*, часть формул которой является непосредственным следствием из определения неопределенных интегралов и таблицы производных. Другую часть формул проверим ниже.

1) $\int x^a\,dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1,$

приведем также некоторые наиболее часто встречающиеся частные случаи этой формулы при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1/2$ и $a = -2$ соответственно:

а) $\int dx = x + C,$

б) $\int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} + C,$

в) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C,$

г) $\int \dfrac{1}{x^2}\,dx = -\dfrac{1}{x} + C;$

2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1;$

4) $\int e^x\,dx = e^x + C;$

5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

6) $\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

7) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

8) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

9) $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;$

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;$

11) $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0;$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C, \quad a \neq 0;$

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C, \quad a \neq 0.$

Проверим, например, справедливость формул 11 и 12. Покажем, что производная правой части этих формул равна подынтегральной функции левой части (при $a \neq 0$). Для формулы 11 имеем:

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\right)' = \frac{1}{2a}\,\frac{1}{\dfrac{x-a}{x+a}}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2a}\,\frac{x+a}{x-a}\,\frac{x+a-(x-a)}{(x+a)^2} = \frac{1}{2a}\,\frac{2a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2}.$$

В случае формулы 12 получим:

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Остальные формулы проверяются аналогично путем дифференцирования правой части.

Следует отметить существенное различие в операциях дифференцирования и интегрирования. Операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций, а именно: производная элементарной функции снова есть элементарная функция. Иначе обстоит дело с интегрированием. Существуют элементарные функции, первообразная которых не выражается через элементарные функции. Такими являются, например, интегралы:

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \cos x^2\,dx, \quad \int \sin x^2\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx.$$

5.1.4. Простейшие методы интегрирования

Метод интегрирования подстановкой (замена переменной)
Метод интегрирования по частям
Интегрирование простейших рациональных дробей

Часто под знаком интеграла может оказаться функция, для которой не имеется табличного интеграла и непосредственное интегрирование невозможно. Тогда применяются другие методы интегрирования, в частности метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

Метод интегрирования подстановкой (замена переменной)

Теорема 5.2. *Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на интервале (α, β) и (a, b) — множество ее значений. Пусть функция $y = f(x)$ определена на (a, b) и имеет на этом промежутке первообразную. Тогда справедлива формула*

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt. \tag{5.1}$$

[Доказательство]

Пример 5.2. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \ln^5 x\,\frac{dx}{x}$.

Р е ш е н и е. В таблице основных интегралов этот интеграл отсутствует. Поэтому в данном случае постараемся подобрать подходящую замену переменной, чтобы прийти к табличному интегралу. Положим $\ln x = t$, т.е. $x = e^t$. Тогда

$$dx = d(e^t) = (e^t)'\,dt = e^t\,dt,$$

и по формуле (5.1) имеем:

$$\int \ln^5 x\,\frac{dx}{x} = \int t^5\,\frac{1}{e^t}e^t\,dt = \int t^5\,dt = \frac{t^6}{6} + C.$$

Вернемся к переменной x:

$$\int \ln^5 x \frac{dx}{x} = \frac{\ln^6 x}{6} + C.$$

Отметим, что иногда, как в этом примере, первоначально удобно задавать не x как функцию t, а, наоборот, задавать t как функцию x.

Теперь рассмотрим несколько другой подход к решению этого примера. Заметив, что $1/x = (\ln x)'$, получим:

$$\int \ln^5 x \frac{dx}{x} = \int \ln^5 x (\ln x)' \, dx = \int \ln^5 x \, d \ln x = \frac{1}{6}(\ln x)^6 + C.$$

На последнем шаге мы неявно воспользовались заменой $\ln x = t$. □

Замечание 5.3. Если F есть первообразная для функции f, то

$$\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, \quad a, b \in R, \quad a \neq 0.$$

[Доказательство]

Пример 5.3. Вычислить интеграл $\int \cos(5x - 3) \, dx$.

Р е ш е н и е. Обратим внимание на интеграл 6 таблицы основных интегралов:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

Учитывая замечание 5.3 ($a = 5$, $b = 3$), получаем:

$$\int \cos(5x - 3) \, dx = \frac{1}{5} \sin(5x - 3) + C.$$

□

Метод интегрирования по частям

Теорема 5.3. *Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на интервале (a, b). Тогда справедлива формула*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx. \tag{5.2}$$

[Доказательство]

Учитывая, что $u'(x)\,dx = du$ и $v'(x)\,dx = dv$, формулу (5.2) можно записать в виде

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{5.3}$$

Пример 5.4. Вычислить интеграл $\int xe^x\,dx$.

Р е ш е н и е. Основная трудность применения интегрирования по частям состоит в правильном выборе функций u и v, т.е. в таком выборе, чтобы интеграл справа в формуле (5.2) или (5.3) оказался проще, чем интеграл слева. В данном случае удобно положить $x = u$, $e^x\,dx = dv$. Найдем функцию v (точнее, одну из функций v):

$$\int dv = \int e^x\,dx, \quad v = e^x.$$

Применив формулу (5.3), получим:

$$\int xe^x\,dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C. \qquad \square$$

При наличии определенных навыков интегрирования по частям можно не выписывать функции u и v, а только подразумевать их. Например,

$$\int xe^x\,dx = \int x(e^x)'\,dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

Определение 5.4. *Простейшими рациональными дробями* назовем следующие функции:

1) $\dfrac{A}{x-a}$;

2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $\quad k>1,\ k\in\mathbb{N}$;

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+2px+q}\,dx$, $\quad p^2-q<0$;

4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^k}\,dx$, $\quad k>1,\ k\in\mathbb{N},\ p^2-q<0$.

С помощью приведенных выше методов можно найти интегралы от указанных рациональных дробей.

Интегрирование простейших рациональных дробей

1. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}\,dx=A\ln|x-a|+C.$

Доказательство. С помощью таблицы интегралов (интеграл 2) получим

$$\int\frac{A}{x-a}\,dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$$ □

2. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}\,dx=-\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C.$

Доказательство. С помощью таблицы интегралов (интеграл 1) получим

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}\,dx=A\int(x-a)^{-k}\,d(x-a)=-\frac{A}{k-1}(x-a)^{-k+1}+C=$$

$$=-\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C,\quad k>1.$$ □

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+2px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln|x^2+2px+q| + \frac{N-Mp}{\sqrt{q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}} + C.$

Доказательство. Выделим в трехчлене

$$x^2+px+q$$

полный квадрат:

$$x^2+2px+q = (x+p)^2+q-p^2 = (x+p)^2+h^2,$$

где $h^2 = q-p^2 > 0$ (считаем $h>0$).

Теперь сделаем замену

$$x+p=t, \quad x=t-p, \quad dx=dt$$

и получим:

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx+N}{x^2+2px+q}\,dx &= \int \frac{M(t-p)+N}{t^2+h^2}\,dt = \\ &= M\int \frac{t\,dt}{t^2+h^2} + (N-Mp)\int \frac{dt}{t^2+h^2} = \\ &= \frac{M}{2}\int \frac{(t^2+h^2)'\,dt}{t^2+h^2} + (N-Mp)\frac{1}{h}\int \frac{d\frac{t}{h}}{1+\frac{t^2}{h^2}} = \\ &= \frac{M}{2}\ln|t^2+h^2| + (N-Mp)\frac{1}{h}\operatorname{arctg}\frac{t}{h} + C = \\ &= \frac{M}{2}\ln|x^2+2px+q| + \frac{N-Mp}{\sqrt{q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}} + C.\end{aligned}$$

□

4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^k}\,dx.$

Доказательство. Выделим полный квадрат в знаменателе и сделаем замену $x+p=t$. Будем иметь:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^k}\,dx = \int \frac{Mx+N}{\big((x+p)^2+h^2\big)^k}\,dx = \\ = \int \frac{M(t-p)+N}{\big(t^2+h^2\big)^k}\,dt = M\int \frac{t\,dt}{\big(t^2+h^2\big)^k} + (N-Mp)\int \frac{dt}{\big(t^2+h^2\big)^k}.$$

Первый интеграл в правой части последнего равенства легко вычисляется:

$$\int \frac{t\,dt}{\big(t^2+h^2\big)^k} = \frac{1}{2}\int \big(t^2+h^2\big)^{-k}\,d\big(t^2+h^2\big) = \frac{1}{2(1-k)\big(t^2+h^2\big)^{k-1}} + C.$$

Для нахождения второго интеграла сначала введем обозначение

$$J_k = \int \frac{dt}{\big(t^2+h^2\big)^k}.$$

Тогда

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+h^2)^k} = \frac{1}{h^2}\int \frac{(t^2+h^2)-t^2}{(t^2+h^2)^k}\,dt = \\ = \frac{1}{h^2}\left(\int \frac{dt}{(t^2+h^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+h^2)^k}\right) = \\ = \frac{1}{h^2}\left(J_{k-1} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+h^2)^k}\right). \tag{5.4}$$

К последнему интегралу применим метод интегрирования по частям (см. формулу (5.3)). При этом

$$u = t, \quad dv = \frac{t\,dt}{(t^2+h^2)^k}.$$

Тогда $du = dt$ и

$$v = \frac{1}{2}\int (t^2+h^2)^{-k}\, d(t^2+h^2) = \frac{1}{2(1-k)\left(t^2+h^2\right)^{k-1}}.$$

Значит,

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+h^2)^k} = \frac{t}{2(1-k)(t^2+h^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{(t^2+h^2)^{k-1}} =$$
$$= \frac{t}{2(1-k)(t^2+h^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\, J_{k-1}.$$

Подставив последнее соотношение в равенство (5.4), получим:

$$J_k = \frac{1}{h^2}\left(J_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2+h^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(1-k)}\, J_{k-1}\right)$$

или

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+h^2\right)^k} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}J_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+h^2)^{k-1}}\right). \tag{5.5}$$

Формула (5.5) позволяет найти интеграл J_k для любого натурального числа $k > 1$. □

Пример 5.5. Найти интеграл $\int \dfrac{dx}{x^2+2x+5}$.

Р е ш е н и е. Можно воспользоваться результатом вычислений, проведенных в п. 3, положив

$$M = 0, \quad N = 1, \quad p = 1, \quad q = 5.$$

Однако проще непосредственно интегрировать, используя аналогичные приемы.

Выделив полный квадрат, получим:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+4}.$$

Сделаем замену $x+1=t$, $x=t-1$, $dx=dt$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t/2)}{1+(t/2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C. \quad \square$$

Пример 5.6. Найти интеграл

$$\int \frac{3x-5}{x^2-6x+10}\,dx.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\int \frac{3x-5}{x^2-6x+10}\,dx = \int \frac{3x-5}{(x-3)^2+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} x-3=t, \\ x=t+3, \\ dx=dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{3(t+3)-5}{t^2+1}\,dt = \int \frac{3t+4}{t^2+1}\,dt = 3\int \frac{t\,dt}{t^2+1} + 4\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(t^2+1) + 4\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2-6x+10) + 4\operatorname{arctg}(x-3) + C. \quad \square$$

Пример 5.7. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся реккурентным соотношением (5.5) при $h = 1$. Получим:

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C,\\
J_2 &= \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2} J_1 + \frac{x}{2(2-1)(x^2+1)^{2-1}} =\\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C,\\
J_3 &= \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{2\cdot 3-3}{2\cdot 3-2} J_2 + \frac{x}{2(3-1)(x^2+1)^{3-1}} =\\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)}\right) + \frac{x}{4(x^2+1)^2} + C.
\end{aligned}
$$

□

5.2. Интегрирование некоторых классов функций

5.2.1. Интегрирование рациональных функций
5.2.2. Интегрирование иррациональных функций
5.2.3. Тригонометрические интегралы

5.2.1. Интегрирование рациональных функций

Ознакомимся с методами интегрирования рациональных функций, т.е. функций вида $P(x)/Q(x)$, где P и Q — алгебраические многочлены:

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m,$$
$$Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n.$$

Если $m < n$, то рациональная функция называется *правильной*. Если $m \geqslant n$, то рациональная функция называется *неправильной*.

В случае неправильной рациональной функции производят деление и получают:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $S(x)$ — некоторый многочлен; $P_1(x)/Q(x)$ — правильная рациональная функция.

Например,

$$\frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+1} = \frac{(x^3+x)+2x^2+2-1}{x^2+1} = x+2-\frac{1}{x^2+1}.$$

Поэтому в дальнейшем будем полагать, что $P(x)/Q(x)$ есть правильная рациональная функция.

Можно доказать, что любой многочлен преобразовывается к произведению простейших многочленов, а именно:

$$Q_n(x) = A(x-x_1)^{l_1}(x-x_2)^{l_2}\ldots(x-x_r)^{l_r}(x^2+2p_1x+q_1)^{t_1}\times \\ \times (x^2+2p_2x+q_2)^{t_2}\ldots(x^2+2p_sx+q_s)^{t_s}, \qquad (5.6)$$

где

$$x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{R}; \quad l_1, l_2, \ldots, l_r \in \mathbb{N}; \quad t_1, t_2, \ldots, t_s \in \mathbb{N};$$
$$p_i^2 - q_i < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Последнее означает, что многочлены $x^2 + 2p_i x + q_i$ не имеют действительных корней. Этот факт устанавливается в расширенном курсе высшей математики.

Примем без доказательства следующее утверждение: если отношение $P(x)/Q(x)$ есть правильная рациональная функция и многочлен $Q(x)$ имеет вид (5.6), то ее можно единственным образом представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{l_1} \frac{A_k^{(1)}}{(x-x_1)^k} + \sum_{k=1}^{l_2} \frac{A_k^{(2)}}{(x-x_2)^k} + \ldots + \sum_{k=1}^{l_r} \frac{A_k^{(r)}}{(x-x_r)^k} + \\ + \sum_{k=1}^{t_1} \frac{M_k^{(1)} + N_k^{(1)}}{(x^2+2p_1x+q_1)^k} + \\ + \sum_{k=1}^{t_2} \frac{M_k^{(2)} + N_k^{(2)}}{(x^2+2p_2x+q_2)^k} + \ldots + \sum_{k=1}^{t_s} \frac{M_k^{(s)} + N_k^{(s)}}{(x^2+2p_sx+q_s)^k}, \qquad (5.7)$$

где $A_k^{(i)}$, $M_k^{(i)}$, $N_k^{(i)}$ — некоторые вещественные числа.

Выражение (5.7) называется *разложением на простейшие рациональные дроби*. Поскольку ранее мы рассмотрели методы интегрирования таких дробей, то, имея разложение (5.7), легко найти неопределенный интеграл от рациональной функции $P(x)/Q(x)$. Этот интеграл будет выражаться через рациональные функции, логарифмы и арктангенсы.

Таким образом, главная задача при интегрировании рациональных функций состоит в нахождении разложения (5.7). Если известно представление (5.6), то коэффициенты $A_k^{(i)}$, $M_k^{(i)}$, $N_k^{(i)}$ можно искать методом неопределенных коэффициентов. Суть этого метода состоит в следующем. Записывают представление (5.7) с неопределенными коэффициентами $A_k^{(i)}$, $M_k^{(i)}$, $N_k^{(i)}$. Затем выражение в правой части приводят к общему знаменателю и получают в числителе некоторый многочлен. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях у этого многочлена $P(x)$, получают систему уравнений для определения коэффициентов $A_k^{(i)}$, $M_k^{(i)}$, $N_k^{(i)}$. Решив ее, находят эти коэффициенты.

Отметим также, что для поиска неизвестных коэффициентов можно использовать и другие приемы, например метод частных значений.

Проиллюстрируем изложенное на примерах.

Пример 5.8. Найти разложение на простейшие дроби рациональной функции

$$R(x) = \frac{x}{(x+1)(x-2)(x^2+1)}.$$

Р е ш е н и е. Очевидно, что $R(x)$ есть правильная рациональная функция, знаменатель которой имеет вид (5.6). Поэтому запишем представление (5.7) с неопределенными коэффициентами для данной рациональной функции:

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Правую часть равенства приводим в общему знаменателю и сравниваем многочлены, стоящие в числителях левой и правой частей:

$$x = A(x-2)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Mx+N)(x+1)(x-2), \tag{5.8}$$

или

$$x = (A+B+M)x^3 + (-2A+B+N-M)x^2 + \\ + (A+B-2M-N)x - 2A + B - 2N.$$

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях x. Приравнивая эти коэффициенты, получаем систему уравнений для определения чисел A, B, M, N:

$$\begin{aligned} &\text{при } x^3: && A+B+M=0; && (5.9)\\ &\text{при } x^2: && -2A+B+N-M=0; \\ &\text{при } x^1: && A+B-2M-N=1; \\ &\text{при } x^0: && -2A+B-2N=0. && (5.10) \end{aligned}$$

Решая систему из этих четырех линейных уравнений, находим неизвестные A, B, M, N.

Вместе с тем, используя тождество (5.8), можно найти искомые коэффициенты несколько проще.

Полагая в формуле (5.8) $x = -1$, получаем $-1 = A(-3) \cdot 2$, откуда $A = 1/6$. Полагая в (5.8) $x = 2$, получаем $2 = B \cdot 3 \cdot 5$, откуда $B = 2/15$. Тогда из уравнения (5.9) находим:

$$M = -A - B = -\frac{1}{6} - \frac{2}{15} = -0,3,$$

а из уравнения (5.10)

$$N = \frac{B}{2} - A = \frac{1}{15} - \frac{1}{6} = -0,1.$$

Таким образом,

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{15(x-2)} - 0,1\frac{3x+1}{x^2+1}.$$ □

Пример 5.9. Найти разложение на простейшие дроби рациональной функции

$$\frac{2x+1}{(x^2+5x+6)(x+2)}.$$

Р е ш е н и е. Данная рациональная функция является правильной. Корнями многочлена x^2+5x+6 являются числа (-2) и (-3). Поэтому $(x^2+5x+6)(x+2) = (x+2)^2(x+3)$.

Теперь можем записать следующее представление с неопределенными коэффициентами, аналогичное формуле (5.7):

$$\frac{x}{(x+2)^2(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+3}.$$

Приводя выражение справа к общему знаменателю и сравнивая многочлены, стоящие в числителе, находим:

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+3) + C(x+2)^2.$$

Полагая здесь $x = -2$, находим: $-2 = B(-1)$, $B = -2$. Если положить $x = -3$, то имеем: $-3 = C(-1)^2$, $C = -3$. Наконец, если $x = 0$, то получаем: $6A + 3B + 4C = 0$ и $A = -(3B + 4C)/6 = 3$. Значит,

$$\frac{x}{(x^2+5x+6)(x+2)} = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} - \frac{3}{x+3}.$$ □

5.2.2. Интегрирование иррациональных функций

Простейшие случаи
Более сложные случаи

Простейшие случаи

Через $R(u, v)$ будем обозначать рациональную функцию двух переменных, т.е. функцию, получающуюся из двух переменных u и v и некоторых постоянных, над которыми производятся операции сложения, вычитания, умножения и деления. Например, функция

$$\frac{u^2v^2 + 3u^2v + uv^2 + uv + 1}{u^2v + u^2 + 2}$$

есть рациональная функция двух переменных u и v.

Пусть имеем интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \tag{5.11}$$

где $n \in \mathbb{N}$; $ad - bc \neq 0$.

В интегралах такого вида целесообразно сделать следующую замену:

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t. \tag{5.12}$$

Из этого равенства получаем:

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad x = \frac{b - dt^n}{ct^n - a}, \qquad dx = \frac{m(ad-bc)t^{n-1}}{(ct^n - a)^2}dt.$$

Подставляя соответствующие выражения в (5.11), имеем:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \\ = \int R\left(\frac{b-dt^n}{ct^n-a}, t\right) \frac{m(ad-bc)t^{n-1}}{(ct^n-a)^2}\, dt = \int R_1(t)\, dt,$$

где $R_1(t)$ есть некоторая функция переменной t.

Таким образом, интегралы вида (5.11) заменой переменной (5.12) сводятся к интегралам от рациональных функций, методы вычислений которых нам уже известны. В этом случае говорят, что интеграл вида (5.11) рационализируется.

Пример 5.10. Найти интеграл $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\, dx$.

Р е ш е н и е. Сделаем замену переменной $\sqrt{x+1} = t$. Имеем:

$$x+1 = t^2, \quad x = t^2-1, \quad dx = 2t\, dt,$$

тогда

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int \frac{t^2-1-1}{t} 2t\, dt = 2\int (t^2-2)\, dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - 2t\right) + C = \\ = 2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} - 2\sqrt{x+1}\right) + C = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-5) + C. \quad \square$$

По аналогии с интегралом (5.11) рассмотрим более общие случаи интегрирования иррациональных функций.

Интеграл вида

$$\int R\left(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, x^{\frac{r_2}{s_2}}, \ldots, x^{\frac{r_k}{s_k}}\right) dx$$

рационализируется заменой $x = t^m$, где $m = \text{НОК}\,(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ (НОК — наименьшее общее кратное).

Пример 5.11. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Р е ш е н и е. Поскольку

$$\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{3}}},$$

то в этом случае $m = \text{НОК}\,(2,3) = 6$. Поэтому следует сделать замену $x = t^6$. Тогда $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $dx = 6t^5\,dt$ и

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{t^3}{1+t^2}\,6t^5\,dt = 6\int \frac{t^8}{1+t^2}\,dt.$$

Далее воспользуемся методами интегрирования рациональных функций:

$$\int \frac{t^8}{1+t^2}\,dt = \int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right)\,dt = \\ = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C.$$

Возвращаясь к переменной x ($t = \sqrt[6]{x}$), окончательно получаем:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C. \qquad \square$$

Интеграл вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_2}{s_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_k}{s_k}}\right)\,dx$$

рационализируется заменой

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m,$$

где $m = \text{НОК}\,(s_1, s_2, \ldots, s_k)$.

Пример 5.12. Найти интеграл $\int \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$.

Р е ш е н и е. Поступая так же, как и в примере 5.11, замечаем, что в данном случае следует произвести замену $x+1=t^6$. Получим:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx = \int \frac{t^3-t^2}{t^3+t^2}\,6t^5\,dt = 6\int \frac{t^6-t^5}{t+1}\,dt = \\
&= 6\int \left(t^5-2t^4+2t^3-2t^2+2t-2+\frac{2}{t+1}\right)\,dt = \\
&= 6\left(\frac{t^6}{6}-2\frac{t^5}{5}+2\frac{t^4}{4}-2\frac{t^3}{3}+2\frac{t^2}{2}-2t+2\ln|t+1|\right)+C = \\
&= x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+3\sqrt[3]{(x+1)^2}-4\sqrt{x+1}+6\sqrt[3]{x+1}- \\
&-12\sqrt[6]{x+1}+12\ln(\sqrt[6]{x+1}+1)+C.
\end{aligned}$$

□

Более сложные случаи

1. *Тригонометрическая подстановка.* Интегралы вида

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)\,dx$$

находятся с помощью замены

$$x=a\sin t \quad \text{или} \quad x=\cos t.$$

При вычислении интегралов вида

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)\,dx$$

можно воспользоваться подстановкой

$$x=a\operatorname{tg} t.$$

Для нахождения интеграла вида

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$$

применяется замена

$$x = \frac{a}{\sin t}.$$

Пример 5.13. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2}\, dx$.

Р е ш е н и е. Сделаем замену $x = 2\sin t$. Тогда

$$dx = 2\cos t\, dt, \quad \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 t} = 2\cos t.$$

Получим:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2}\, dx &= \int \frac{2\cos t}{4\sin^2 t}\, 2\cos t\, dt = \int \operatorname{ctg}^2 t\, dt = \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right) dt = \int \frac{1}{\sin^2 t}\, dt - \int dt = -\operatorname{ctg} t - t + C = \\ &= -\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) - \arcsin\frac{x}{2} + C.\end{aligned}$$

□

2. *Подстановки Эйлера.* Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

находятся с помощью так называемых подстановок Эйлера.

Если $a > 0$, то полагают

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$$

(комбинация знаков произвольна).

Если $c > 0$, то полагают

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt$$

(комбинация знаков произвольна).

Если же $a < 0$ и $c < 0$ (в этом случае $b^2 - 4ac > 0$, т.е. квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня), то применяют подстановку

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1),$$

где x_1 — один из корней трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Пример 5.14. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}\,dx$.

Р е ш е н и е. Так как $a > 0$, то воспользуемся первой подстановкой Эйлера $\sqrt{x^2 + x + 1} = x - t$. Тогда

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1}, \quad dx = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(2t + 1)^2}\,dt.$$

Значит,

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}\,dx = \int \frac{2t^2 + 2t + 2}{t(2t + 1)^2}\,dt.$$

Это интеграл от рациональной функции. Применив метод неопределенных коэффициентов, несложно получить

$$\frac{2t^2 + 2t + 2}{t(2t + 1)^2} = \frac{2}{t} - \frac{3}{2t + 1} - \frac{3}{(2t + 1)^2}.$$

Поэтому

$$\int \frac{2t^2 + 2t + 2}{t(2t + 1)^2}\,dt = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t + 1| + \frac{3}{2(2t + 1)} + C.$$

Осталось произвести обратную замену, т.е. $t = x - \sqrt{x^2 + x + 1}$. □

3. *Интегрирование дифференциального бинома.*

Определение 5.5. Выражение $x^m(a + bx^n)^p\,dx$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) называется *дифференциальным биномом*.

Для того чтобы рационализировать интеграл

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

применяются следующие подстановки:

1) если $p \in \mathbb{Z}$, то
$$x = t^k,$$
где k — наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n;

2) если $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, то
$$a+bx^n = t^s,$$
где s — знаменатель дроби p;

3) если $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, то
$$a+bx^n = x^n t^s,$$
где s — знаменатель дроби p.

Во всех остальных случаях интегралы от дифференциального бинома не выражаются через элементарные функции, т.е. не берутся.

Пример 5.15. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\,dx.$$

В этом случае $m=-1/2$, $n=1/4$, $p=1/3$. Поскольку

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2,$$

то сделаем замену $1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3$. При этом

$$x = (t^3 - 1)^4, \quad dx = 12t^2(t^3 - 1)^3\,dt, \quad t = \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}.$$

Тогда

$$\int x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx = \int \frac{t}{(t^3 - 1)^2}\, 12t^2(t^3 - 1)^3\,dt = 12\int (t^6 - t^3)\,dx =$$
$$= \frac{12}{7}t^7 - 3t^4 + C = \frac{12}{7}(1 + \sqrt[4]{x})^{\frac{7}{3}} - 3(1 + \sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}} + C. \quad \square$$

5.2.3. Тригонометрические интегралы

Пусть имеем интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx, \tag{5.13}$$

где $R(u, v)$ — рациональная функция двух переменных u и v. В этом случае функцию $R(\sin x, \cos x)$ называют *тригонометрической рациональной функцией*.

Интеграл (5.13) рационализируется с помощью замены переменной

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \tag{5.14}$$

Действительно,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \tag{5.15}$$

и

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int R_1(t)\, dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция переменной t.

Пример 5.16. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + \cos x}$.

Р е ш е н и е. Положим $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тогда, воспользовавшись формулами (5.15), имеем

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt = 2 \int \frac{dt}{2(1+t^2) + 1 - t^2} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C. \quad \square$$

На практике замена переменной (5.14) часто приводит к громоздким выкладкам. При определенных условиях более удобны другие замены переменной:

а) если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то полагают $t = \cos x$;

б) если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то полагают $t = \sin x$;

в) если $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то полагают $t = \operatorname{tg} x$.

В частности, рассмотрим вычисление интеграла вида

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Возможны следующие случаи:

1) если n — нечетное число, то применяется замена $\sin x = t$;

2) если m — нечетное число, то применяется замена $\cos x = t$;

3) если m и n — четные числа, то применяются формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x;$$

4) если $m + n$ — четное отрицательное число, то применяется замена $\operatorname{tg} x = t$.

Пример 5.17. Вычислить интеграл $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

Р е ш е н и е. В этом случае $m = 2$, $n = 3$. Сделаем замену $\sin x = t$. Тогда $\cos x \, dx = dt$. Учитывая то, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, получаем:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int t^2 (1 - t^2) \, dt =$$

$$= \int (t^2 - t^4) \, dt = \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C. \quad \square$$

Пример 5.18. Вычислить интеграл $\int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$.

Р е ш е н и е. В этом случае $m = 2$, $n = -4$. Сделаем замену $\operatorname{tg} x = t$. При этом $\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$. Значит,

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x\,\frac{dx}{\cos^2 x} = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$$

□

5.3. Определенный интеграл

5.3.1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции
5.3.2. Свойства определенного интеграла
5.3.3. Оценки интегралов. Теорема о среднем значении
5.3.4. Необходимое условие интегрируемости функции
5.3.5. Достаточные условия интегрируемости
5.3.6. Интеграл с переменным верхним пределом. Существование первообразной для непрерывной функции
5.3.7. Формула Ньютона — Лейбница
5.3.8. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

5.3.1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$ (рис. 5.2).

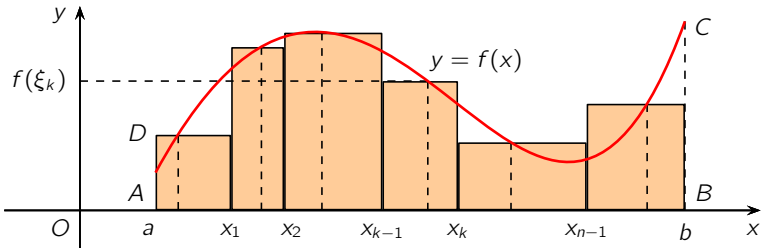

Рис. 5.2

Рассмотрим фигуру $ABCD$, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox. Ее называют *криволинейной трапецией*. Поставим задачу об определении и вычислении площади этой криволинейной трапеции. С этой целью разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Через точки x_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, проведем прямые, параллельные оси Oy. Криволинейная трапеция $ABCD$ разобьется на n частичных криволинейных трапеций. Теперь на каждом из отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$ произвольно выберем по точке ξ_k, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и вычислим значения $f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Затем каждую частичную криволинейную трапецию заменим прямоугольниками с высотами $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, $\ldots$, $f(\xi_n)$. Тогда можно полагать, что для площади S криволинейной трапеции $ABCD$ справедливо соотношение

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Естественно предположить, что это равенство будет тем точнее, чем меньше

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} (x_k - x_{k-1}) = \lambda.$$

Поэтому площадь криволинейной трапеции S определяют следующим образом:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{5.16}$$

Число S, равное пределу (5.16), является определенным интегралом от функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Таким образом, задача о вычислении площади криволинейной трапеции приводит к введению понятия определенного интеграла.

Теперь более строго определим понятие определенного интеграла.

Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на n частей точками x_k, $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots, n, \quad \lambda = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k.$$

В каждом из частичных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ произвольно выберем по точке ξ_k, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим следующую сумму:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{5.17}$$

Сумма (5.17) называется *интегральной суммой* для функции f на отрезке $[a, b]$.

Определение 5.6. Пусть интегральная сумма (5.17) имеет предел A, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$, ни от выбора точек ξ_k. Другими словами, для произвольного положительного

числа ε можно найти такое число δ, что для любого разбиения отрезка $[a, b]$ точками x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющего условию $\lambda < \delta$, при любом выборе точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ выполняется неравенство

$$|\sigma - A| = \left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - A \right| < \varepsilon.$$

Тогда этот предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{5.18}$$

В этом случае функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$, а числа a и b — соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Геометрический смысл определенного интеграла состоит в том, что определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции (рис. 5.3).

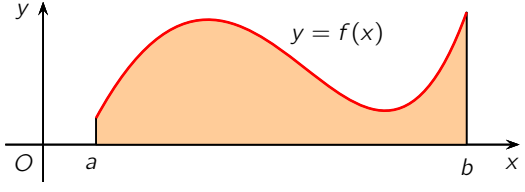

Рис. 5.3

Из определения интеграла следует, что значение интеграла (5.18) есть число, зависящее от вида функции f, пределов интегрирования a и b и не зависящее от выбора обозначения переменной интегрирования.

Позже мы установим связи между определенным и неопределенным интегралами функции f.

Пример 5.19. Найти определенный интеграл $\int_a^b 1\,dx$.

Р е ш е н и е. Построим для функции $f(x) = 1$ на отрезке $[a, b]$ интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k.$$

Учитывая, что $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, имеем:

$$\sigma = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \\ + (x_n - x_{n-1}) = b - a.$$

Следовательно, $\int\limits_a^b 1\, dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = b - a.$ □

5.3.2. Свойства определенного интеграла

При рассмотрении свойств определенных интегралов предполагаем, что интегралы, входящие в доказательства, существуют.

1. *По определению полагаем, что*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Первое равенство обусловливается тем, что при составлении интегральных сумм в данном случае каждое из Δx_k будет равно нулю и $\sigma = 0$.

Второе равенство объясняется тем, что когда разбиение производится от b к a, то разности

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

будут отличаться знаком от таких же разностей в случае разбиения отрезка от a к b.

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т.е.*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx, \quad k = \text{const}\,.$$

[Доказательство]

3. *Определенный интеграл от суммы функций равен сумме их интегралов, т.е.*

$$\int_a^b (g(x) + f(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{5.19}$$

[Доказательство]

4. *Если* $c \in (a, b)$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{5.20}$$

[Доказательство]

5.3.3. Оценки интегралов. Теорема о среднем значении

Теперь рассмотрим некоторые свойства определенных интегралов, описываемые с помощью неравенств.

1. *Если* $f(x) \geqslant 0$ *на отрезке* $[a, b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

[Доказательство]

2. *Если для функций* f *и* g *на отрезке* $[a, b]$ *справедливо неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

[Доказательство]

3. *Для любой интегрируемой на отрезке* $[a, b]$ *функции* f *имеет место неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{5.21}$$

[Доказательство]

4. *Если* $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in [a, b]$, *то*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{5.22}$$

[Доказательство]

Теорема 5.4 (о среднем значении определенного интеграла). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует точка $c \in [a, b]$ (рис. 5.4) такая, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{5.23}$$

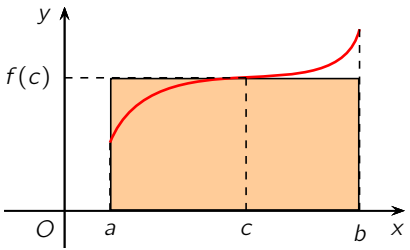

Рис. 5.4

[Доказательство]

Выясним *геометрический смысл теоремы 5.4*. Если предположить, что $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a, b]$, то интеграл слева в формуле (5.23) есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox.

В правой части равенства (5.23) стоит площадь прямоугольника с основанием $b - a$ и высотой $f(c)$, т.е. площадь криволинейной трапеции равна площади некоторого прямоугольника (рис. 5.4).

5.3.4. Необходимое условие интегрируемости функции

Теорема 5.5. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$.*
[Доказательство]

Указанное необходимое условие не является достаточным.

Пример 5.20. Показать, что *функция Дирихле*

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррациональное,} \\ 1, & \text{если } x \text{ рациональное,} \end{cases} \tag{5.24}$$

ограничена, но не интегрируема на любом отрезке $[a, b]$.

Р е ш е н и е. По определению $|D(x)| \leqslant 1$ при любых x, т.е. функция Дирихле ограничена на любом отрезке $[a, b]$. Покажем, что она не является интегрируемой.

Произведем разбиение отрезка $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Составим интегральную сумму:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} D(\xi_k)\Delta x_k.$$

Покажем, что предел интегральных сумм при

$$\lambda = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (x_k - x_{k-1}) \to 0$$

не существует. Действительно, если выбрать все ξ_k иррациональными, то $\sigma = 0$, если же выбрать все ξ_k рациональными, то

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a \neq 0.$$

Это означает, что не существует числа A, удовлетворяющего определению определенного интеграла, т.е. функция Дирихле не интегрируема на любом отрезке $[a, b]$. □

5.3.5. Достаточные условия интегрируемости

Теорема 5.6. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$.*

Заметим, что условие непрерывности функции является достаточным условием, но не необходимым. Можно показать, в частности, что справедливы следующие утверждения.

Теорема 5.7. *Если функция f ограничена на отрезке $[a, b]$ и имеет конечное число точек разрыва первого рода, то она интегрируема на отрезке $[a, b]$.*

Теорема 5.8. *Если функция f ограничена и монотонна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на отрезке $[a, b]$.*

Например, функция $f(x) = x\cos^2 x + e^x$ является интегрируемой на любом отрезке $[a, b]$, так как она непрерывна на $\mathbb{R}$.

Функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ (см. формулу (3.5)) является интегрируемой на отрезке $[-1, 1]$, так как только в точке $x = 0$ она имеет точку разрыва первого рода.

Функция $f(x) = 1/x$ при $x \in (0, 1]$ и $f(0) = 0$ не является интегрируемой на отрезке, потому что она не ограничена на $[0, 1]$.

5.3.6. Интеграл с переменным верхним пределом. Существование первообразной для непрерывной функции

Важную роль в интегральном исчислении играет связь между определенным и неопределенным интегралами. Перейдем к ее исследованию.

Пусть функция f является интегрируемой на отрезке $[a, b]$. Фиксируем $x \in [a, b]$.

Функция f будет интегрируемой на отрезке $[a, x]$, т.е. существует интеграл

$$\int_a^x f(t)\,dt.$$

Теперь каждому $x \in [a, b]$ поставим в соответствие число, равное

$$\int_a^x f(t)\,dt.$$

Это означает, что на отрезке $[a, b]$ будет определена функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{5.25}$$

Определение 5.7. Функция $\Phi(x)$, задаваемая формулой (5.25), называется *интегралом с переменным верхним пределом*.

Геометрический смысл интеграла с переменным верхним пределом состоит в том, что он численно равен площади криволинейной трапеции, расположенной над отрезком $[a, x]$ (рис. 5.5).

Теорема 5.9. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция Φ, определяемая формулой (5.25), является дифференцируемой на $[a, b]$, причем*

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt \right)' = f(x).$$

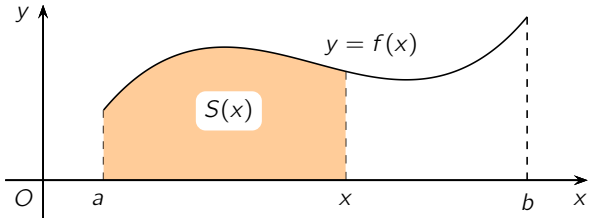

Рис. 5.5

[Доказательство]

Иначе говоря, теорема 5.9 утверждает, что производная от интеграла с переменным верхним пределом равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу.

Теорему 5.9 можно переформулировать следующим образом: *если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

является ее первообразной на $[a, b]$. Следовательно,

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C.$$

5.3.7. Формула Ньютона — Лейбница

Формула Ньютона — Лейбница считается основной формулой интегрального исчисления. Она позволяет свести вычисление определенного интеграла от непрерывной функции к вычислению разности значений любой ее первообразной на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Теорема 5.10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ — какая-либо ее первообразная, то справедлива формула Ньютона — Лейбница*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{5.26}$$

[Доказательство]

Разность $F(b) - F(a)$ принято обозначать $F(x)\Big|_a^b$. Поэтому формулу Ньютона — Лейбница можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Пример 5.21. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\pi/4} \sin 2x\,dx.$$

Р е ш е н и е. Одной из первообразных для функции $f(x) = \sin 2x$ является функция $F(x) = -1/2\cos 2x$. Поэтому, применяя формулу Ньютона — Лейбница, имеем:

$$\int_0^{\pi/4} \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/4} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{1}{2}.$$

□

5.3.8. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема 5.11. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем отрезок $[a, b]$ является множеством значений функции $x = \varphi(t)$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{5.27}$$

Доказательство. Пусть F — первообразная для функции f:

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{5.28}$$

Положим $G(t) = F(\varphi(t))$. По правилу дифференцирования сложной функции получим, что

$$G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Следовательно, функция $G(t)$ есть первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $[a, b]$, и по формуле Ньютона — Лейбница находим:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha) =$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a). \tag{5.29}$$

Правые части равенств (5.28) и (5.29) совпадают. Сравнив их левые части, получим формулу (5.27). □

Формула (5.27) называется *формулой замены переменной в определенном интеграле*.

Пример 5.22. Найти интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой замены переменной. Положим $1-x^2=t$, $-2x\,dx=dt$. Очевидно, что $1-0^2=1$, $1-1^2=0$. По формуле (5.27)

$$\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\frac{1}{2}\int\limits_1^0 \frac{dt}{\sqrt{t}}\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}\,dt=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t}\Big|_0^1=\sqrt{1}-\sqrt{0}=1.$$

В этом случае можно поступить и по-другому. Положим $x=\sin t$, $dx=\cos t\,dt$. Очевидно, что $\sin 0=0$, $\sin(\pi/2)=1$. Отрезок $[0,1]$ является множеством значений функции $x=\sin t$, $t\in[0,\pi/2]$. По формуле (5.27)

$$\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt=\int\limits_0^{\pi/2}\sin t\,dt=\cos t\Big|_0^{\pi/2}=1.$$ □

Подчеркнем два важных момента. Во-первых, при использовании формулы замены переменной (5.27) в интеграле справа следует найти и поставить новые пределы интегрирования. Во-вторых, здесь в отличие от неопределенного интеграла нет необходимости возвращаться к старой переменной.

Теорема 5.12. *Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, то справедлива формула*

$$\int\limits_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b v\,du. \tag{5.30}$$

[Доказательство]

Формулу (5.30) называют *формулой интегрирования по частям в определенном интеграле*.

Пример 5.23. Найти интеграл $\int\limits_0^1 xe^x\,dx$.

Р е ш е н и е. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^1 xe^x\,dx = \int\limits_0^1 x\,de^x = xe^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x\,dx =$$

$$= e - \int\limits_0^1 e^x\,dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - (e-1) = 1. \quad \square$$

5.4. Приложения определенного интеграла

5.4.1. Площадь криволинейной трапеции
5.4.2. Длина дуги кривой
5.4.3. Объем тела вращения
5.4.4. Использование понятия определенного интеграла в экономике

5.4.1. Площадь криволинейной трапеции

В § 5.3 уже отмечалось, что определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

от неотрицательной функции f численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$.

Пример 5.24. Вычислить площадь фигуры, заключенной между осью Ox и синусоидой $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ (рис. 5.6).

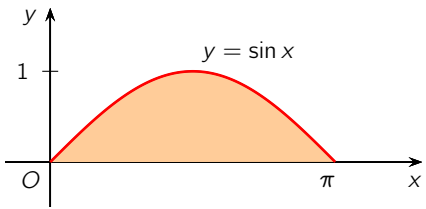

Рис. 5.6

Р е ш е н и е. Находим:

$$S = \int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = 2. \qquad \square$$

Если фигура не является криволинейной трапецией, то ее площадь стараются представить в виде суммы или разности площадей фигур, являющихся криволинейными трапециями. В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.13. *Если фигура ограничена снизу и сверху графиками непрерывных функций* $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ *(не обязательно неотрицательных (рис. 5.7)), то ее площадь можно найти по формуле*

$$S = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx.$$

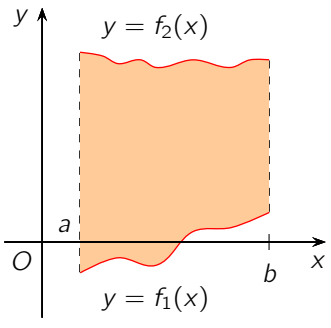

Рис. 5.7

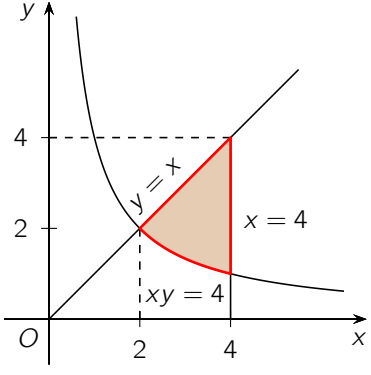

Рис. 5.8

Пример 5.25. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $xy = 4$ и прямыми $y = x$ и $x = 4$.

Р е ш е н и е. Построим фигуру на плоскости (рис. 5.8).
Очевидно, что $f_1(x) = 4/x$, $f_2(x) = x$. Тогда

$$S = \int_2^4 \left(x - \frac{4}{x}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 4\ln x\right)\Big|_2^4 =$$

$$= 8 - 4\ln 4 - (2 - 4\ln 2) = 2(3 - 2\ln 2). \quad \square$$

5.4.2. Длина дуги кривой

Вычисление длин кривых также приводит к интегралам. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Ее график представляет собой некоторую кривую AB, $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ (рис. 5.9).

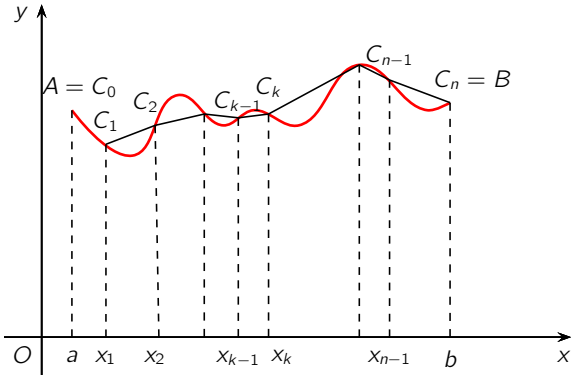

Рис. 5.9

Разобьем кривую AB точками $C_0 = A, C_1, C_2, \ldots, C_n = B$ на n произвольных частей. Соединим две соседние точки C_{k-1} и C_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, хордами. Получим n-звенную ломаную, вписанную в кривую AB. Пусть l_k — длина хорды $C_{k-1}C_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\omega = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} l_k$. Длина ломаной будет выражаться формулой

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} l_k.$$

Естественно определить длину L кривой AB как предельное значение длин ломаных L_n, когда $\omega \to 0$, т.е.

$$L = \lim_{\omega \to 0} L_n = \lim_{\omega \to 0} \sum_{k=1}^{n} l_k\,. \tag{5.31}$$

Пусть x_k — абсциссы точек C_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, и

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Тогда точки C_k имеют координаты x_k и $f(x_k)$. По формуле для расстояния между двумя точками находим:

$$l_n = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}\,. \tag{5.32}$$

По формуле конечных приращений имеем:

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \xi_k \in (x_{k-1}, x_k).$$

Подставив полученное выражение в формулу (5.32), найдем:

$$l_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\,\Delta x_k, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\,\Delta x_k.$$

Следовательно, L_n есть интегральная сумма для функции

$$\sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}$$

на отрезке $[a, b]$. Тогда на основании равенств (5.31)

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{5.33}$$

Пример 5.26. Найти длину кривой $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ между $x = 0$ и $x = 3$.

Р е ш е н и е. Построим график указанной функции (рис. 5.10).

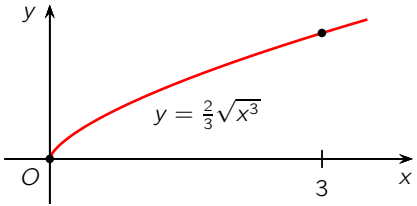

Рис. 5.10

По формуле (5.33) находим:

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx = \int_0^3 \sqrt{1 + (x^{\frac{1}{2}})^2}\, dx = \int_0^3 \sqrt{1+x}\, dx =$$

$$= \int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}}\, d(x+1) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}. \quad \square$$

5.4.3. Объем тела вращения

Пусть функция f непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Построим соответствующую криволинейную трапецию $ABCD$ (рис. 5.11).

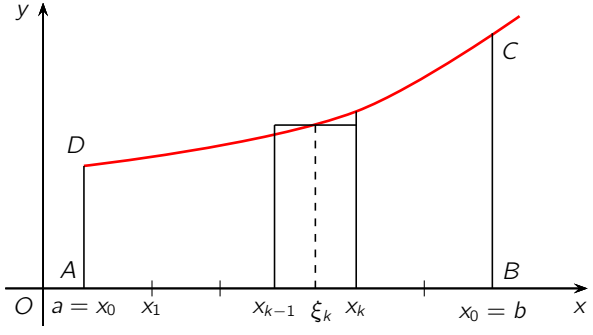

Рис. 5.11

Если криволинейную трапецию $ABCD$ вращать вокруг оси Ox, то образуется тело, называемое *телом вращения* (рис. 5.12). Поставим задачу определения и вычисления объема V этого тела. С этой целью разобьем отрезок $[a, b]$ точками:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \lambda = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k.$$

Произвольно выберем по точке $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и вычислим $f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Теперь построим плоскости, проходящие через каждую точку x_k и перпендикулярные оси Ox. Они разобьют тело на n частей (элементарных тел). Каждое элементарное тело заменим цилиндром высотой Δx_k и радиусом $f(\xi_k)$. Объем такого цилиндра равен $\pi(f(\xi_k))^2 \Delta x_k$, и естественно полагать, что объем тела

$$V = \sum_{k=1}^{n} \pi(f(\xi_k))^2 \Delta x_k.$$

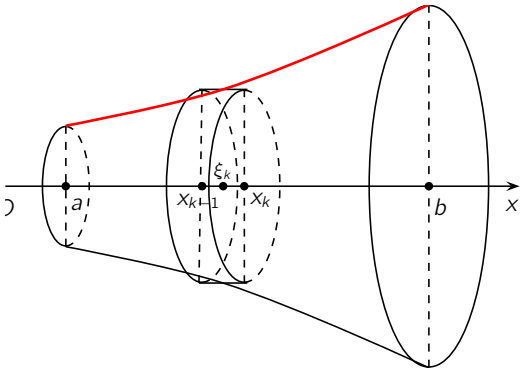

Рис. 5.12

В правой части последнего равенства стоит интегральная сумма для функции $\pi f^2(x)$ на отрезке $[a, b]$. Поэтому, переходя к пределу при $\lambda \to 0$, найдем:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{5.34}$$

Таким образом, формула (5.34) есть формула для вычисления объемов тел вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

Если же криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = \varphi(y) \geqslant 0$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, то объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy,

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy.$$

Пример 5.27. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области под параболой $y = x^2$ от $x = 0$ до $x = 2$.

Р е ш е н и е. По формуле (5.34)

$$V = \pi \int_0^2 x^4\,dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32}{5}\pi.$$

□

5.4.4. Использование понятия определенного интеграла в экономике

Рассмотрим сначала экономический смысл определенного интеграла.

Пусть функция $f(t)$ описывает изменение производительности некоторого предприятия с течением времени. Найдем объем продукции q, произведенной за промежуток времени $[0, T]$.

Если предположить, что производительность не изменяется с течением времени (т.е. $f(t) = \text{const}$), то объем продукции Δq, произведенной за некоторый промежуток времени $[t, t + \Delta t]$, задается формулой $\Delta q = f(t)\Delta t$. Если $f(t)$ не является постоянной функцией, то справедливо приближенное равенство $\Delta q \approx f(\xi)\Delta t$, где $\xi \in [t, t + \Delta t]$, которое оказывается тем точнее, чем меньше Δt. Поэтому для решения задачи о нахождении объема продукции поступим так же, как при нахождении площади криволинейной трапеции. Разобьем отрезок $[0, T]$ на промежутки времени точками:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T.$$

Для объема продукции Δq_i, произведенной за промежуток времени $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, имеем:

$$\Delta q_i \approx f(\xi_i)\Delta t_i, \quad \xi_i \in [t_{i-1}; t_i], \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}.$$

Тогда

$$q \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta q_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i.$$

При

$$\max_i \Delta t_i \to 0$$

каждое из использованных приближенных равенств становится все более точным, поэтому

$$q = \lim_{\max_i \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i.$$

Учитывая определение определенного интеграла, окончательно получаем:

$$q = \int_0^T f(t)\,dt,$$

т.е. если $f(t)$ — производительность труда в момент времени t, то

$$\int_0^T f(t)\,dt$$

есть объем продукции, выпускаемой за промежуток $[0, T]$.

Сравнивая данную задачу с задачей нахождения площади криволинейной трапеции, получаем, что объем продукции, произведенной за промежуток времени $[0, T]$, численно равен площади фигуры, ограниченной графиком функции $f(t)$, описывающей изменения производительности труда с течением времени, отрезком $[0, T]$ и прямыми $t = 0$, $t = T$.

Пример 5.28. Определить объем продукции, произведенной рабочим за второй час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией

$$f(t) = \frac{2}{3t+4} + 3.$$

Р е ш е н и е. Находим:

$$q = \int_1^2 \left(\frac{2}{3t+4} + 3\right)\,dt = \left(\frac{2}{3}\ln|3t+4| + 3t\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3}\ln 10 - \frac{2}{3}\ln 7 + 6 - 3 = \frac{2}{3}\ln\frac{10}{7} + 3. \quad \square$$

В экономических исследованиях часто используется *производственная функция Кобба — Дугласа*

$$F(K, L) = a_0 L^{\alpha_1} K^{\alpha_2}, \tag{5.35}$$

где K — затраты капитала (объем производственных фондов); L — затраты труда. Подробнее об этой функции будет идти речь в п. 6.1.9.

Если в формуле (5.35) затраты труда линейно зависят от времени, а затраты капитала неизменны, то функцию Кобба — Дугласа можно преобразовать к виду

$$g(t) = (\alpha t + \beta) e^{\gamma t}.$$

Тогда объем выпускаемой продукции за T лет составит

$$q = \int_0^T (\alpha t + \beta) e^{\gamma t}\, dt. \tag{5.36}$$

Пример 5.29. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба — Дугласа имеет вид

$$g(t) = (1 + t) e^{3t}.$$

Р е ш е н и е. По формуле (5.36) объем Q произведенной продукции

$$q = \int_0^4 (1 + t) e^{3t}\, dt = \frac{e^{3t}}{3}(t + 1)\Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{3} e^{3t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{3}(5e^{12} - 1) - \frac{1}{9} e^{3t}\Big|_0^4 = \frac{1}{9}(14e^{12} - 2) \approx 2{,}53 \cdot 10^5.$$

Для вычисления интеграла здесь использован метод интегрирования по частям; при этом

$$u = t + 1, \quad dv = e^{3t}\, dt, \quad du = dt, \quad v = \frac{1}{3} e^{3t}.$$

□

В курсе макроэкономики часто рассматривают так называемые предельные величины (см. также п. 4.1.9). Например, если задана функция издержек $C = C(q)$, то предельные издержки будут задаваться производной этой функции $MC = C'(q)$. Экономический смысл функции MC — это издержки на производство дополнительной единицы продукции. Часто приходится находить функцию издержек по известной функции предельных издержек.

Пример 5.30. Дана функция предельных издержек

$$MC = 3q^2 - 48q + 202, \quad 1 \leqslant q \leqslant 20.$$

Найти функцию издержек $C = C(q)$ и вычислить издержки в случае производства 10 единиц товара, если известно, что издержки для производства первой единицы товара составили 50 ден. ед.

Р е ш е н и е. Функцию издержек находим интегрированием:

$$C(q) = \int_1^q MC\,dq + C_0 = \int_1^q (3q^2 - 48q + 202)\,dq + C_0 =$$
$$= (q^3 - 24q^2 + 202q)\Big|_1^q + C_0 = q^3 - 24q^2 + 202q - 179 + C_0,$$

где константа C_0 определяется из условия $C(1) = 50$, поэтому $C_0 = 50$. Значит,

$$C(q) = q^3 - 24q^2 + 202q + 50.$$

Поэтому

$$C(10) = 10^3 - 24 \cdot 10^2 + 202 \cdot 10 + 50 = 670 \text{ (ден. ед.)}$$ □

Часто для решения экономических задач применяют теорему о среднем значении и формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a), \quad \xi \in [a, b].$$

Число

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

называют средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

На практике нередко вычисляют средние значения (например, средняя производительность труда, средняя мощность электродвигателей и т.д.).

Пусть известна функция $t = t(x)$, где x — порядковый номер изделия в партии, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства. Тогда среднее время $t_{\text{ср}}$, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения изделий от x_1 до x_2, вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{\text{ср}} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} t(x)\,dx.$$

Что касается функции изменения затрат времени на изготовление изделий $t = t(x)$, то она часто имеет вид

$$t = Ax^{-B}, \tag{5.37}$$

где A — затраты времени на первое изделие; B — показатель производственного процесса.

Пример 5.31. Найти среднее значение издержек

$$C(q) = 3q^2 + 4q + 2,$$

выраженных в денежных единицах, если объем продукции q меняется от 2 до 4 ед. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

Р е ш е н и е. Применяя теорему о среднем значении, имеем:

$$C_{\text{ср}}(\xi) = \frac{1}{4-2}\int\limits_2^4 (3q^2+4q+1)\,dq = \frac{1}{2}\left(3\frac{q^3}{3}+4\frac{q^2}{2}+2q\right)\Big|_2^4 =$$

$$= \frac{1}{2}(104-20) = 42 \text{ (ден. ед.)},$$

т.е. среднее значение издержек равно 42 ден. ед.

Определим, при каком объеме продукции издержки принимают это среднее значение, т.е. решим уравнение

$$3q^2+4q+2 = 42.$$

Учитывая, что объем продукции не может быть отрицательным, из последнего уравнения имеем $q = 3$ ед. продукции. □

Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной за время t (лет) при годовом проценте (процентной ставке) p, называется *дисконтированием*. Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капитальных вложений.

Пусть K_t — конечная сумма, полученная за t лет, и K — дисконтируемая (начальная) сумма, которую в финансовом анализе называют также современной суммой. Если проценты простые, то $K_t = K(1+it)$, где $i = \frac{p}{100}$ — удельная процентная ставка. Тогда $K = \frac{K_t}{1+it}$. В случае сложных процентов $K_t = K(1+it)^t$, поэтому $K = \frac{K_t}{(1+it)^t}$.

Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$ и при удельной норме процента, равной i, процент начисляется непрерывно. В этом случае дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле

$$K = \int\limits_0^T f(t)e^{-it}\,dt. \tag{5.38}$$

Пример 5.32. Определить дисконтированный доход за 3 года при ставке 8%, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 тыс. денежных единиц и намечается ежегодное увеличение капиталовложения на 1 тыс. ден. ед.

Р е ш е н и е. Очевидно, что капиталовложения задаются функцией $f(t) = 10 + 1 \cdot t = 10 + t$. Тогда по формуле (5.38) дисконтируемая сумма капиталовложений

$$K = \int_0^3 (10 + t)e^{-0{,}08t}\, dt.$$

Применив формулу интегрирования по частям, получим $K = 30{,}5$ тыс. ден. ед. Это означает, что для получения одинаковой наращиваемой суммы через 3 года ежегодные капиталовложения от 10 до 13 тыс. ден. ед. равносильны одновременным первоначальным вложениям 30,5 тыс. ден. ед. при той же начисляемой непрерывно процентной ставке. □

5.5. Несобственные интегралы

5.5.1. Обобщение понятия определенного интеграла
5.5.2. Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования
5.5.3. Интегралы от неограниченных функций

5.5.1. Обобщение понятия определенного интеграла

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ рассматривался при двух условиях:

1) промежуток $[a, b]$ конечен,
2) функция f ограничена на $[a, b]$.

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то данное в § 5.3 определение интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ не имеет смысла. Если, например, промежуток интегрирования бесконечный, то его нельзя разбить на n частей конечной длины. Если же функция f не ограничена на $[a, b]$, то не существует конечного предела интегральных сумм. Обобщим понятие интеграла и на эти случаи.

5.5.2. Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования

Предположим, что функция задана на $[a, +\infty)$ и является интегрируемой на любом конечном отрезке $[a, A]$, $a < A$, т.е. существует интеграл

$$\int_a^A f(x)\,dx.$$

Определение 5.8. *Несобственным интегралом первого рода* или *несобственным интегралом с бесконечным пределом интегрирования*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

называется предел

$$\lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)\,dx, \tag{5.39}$$

т.е.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)\,dx.$$

Определение 5.9. Если предел (5.39) существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*; если же этот предел не существует или бесконечен, то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

называется *расходящимся*.

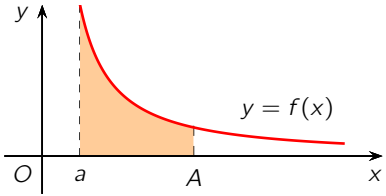

Рис. 5.13

Рассмотрим геометрическую интерпретацию несобственного интеграла первого рода. Пусть, например, функция f является неотрицательной и невозрастающей на $[a, +\infty)$ (рис. 5.13).

Интеграл $\int_a^A f(x)\,dx$ численно равен площади заштрихованной криволинейной трапеции. При возрастании A эта площадь будет увеличиваться. При этом она может неограниченно возрастать либо оставаться ограниченной и стремиться к какому-то пределу. Этот предел и есть

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Подчеркнем, что площадь фигуры, заключенной между графиком функции $y = f(x)$ и осью Ox вправо от точки $x = a$, может быть конечной, несмотря на то, что эта фигура является неограниченной.

Геометрический смысл несобственного интеграла первого рода состоит в том, что он численно равен площади полубесконечной фигуры, ограниченной графиком неотрицательной функции, прямой $x = 0$ и отрезком $[a, +\infty]$ оси Ox.

Пример 5.33. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$$

(или установить его расходимость).

Р е ш е н и е. По определению (см. выражение (5.39)) имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A} e^{-x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^A\right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}(1-e^{-A}) = 1. \quad \square$$

Пример 5.34. Вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$$

(или установить его расходимость).

Р е ш е н и е. Находим:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_1^{A}\frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty}\left(\ln x\Big|_1^A\right) = \lim_{A\to+\infty}\ln A = +\infty.$$

Следовательно, этот интеграл расходится. $\square$

Замечание 5.4. Несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha\neq 1,$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. [Доказательство]

Замечание 5.4 свидетельствует о том, что функция $f(x) = 1/x^\alpha$ в случае $\alpha > 1$ достаточно быстро стремится к нулю при $x \to +\infty$, и это обеспечивает существование несобственного интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Если же $\alpha \leqslant 1$, то $f(x) = 1/x^\alpha$ стремится к нулю медленно при $x \to +\infty$ или совсем не стремится к нулю, и поэтому рассматриваемый интеграл расходится.

Аналогично вводится понятие несобственного интеграла по промежутку $(-\infty, b)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{b \to -\infty} \int\limits_B^b f(x)\,dx.$$

Предположим, что функция f определена на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$. Теперь рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{5.40}$$

Фиксируем произвольное число $c \in \mathbb{R}$. Разобьем интеграл (5.40) на два:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{5.41}$$

где c — произвольное число.

Интеграл (5.40) называют сходящимся, если оба интеграла в правой части равенства (5.41) сходятся, и расходящимся — в противном случае.

5.5.3. Интегралы от неограниченных функций

Предположим, что функция f не ограничена на отрезке $[a, b]$. Построим обобщение интеграла на этот случай.

Пусть функция f определена на промежутке $[a, b)$. В любой окрестности точки $x = b$ функция f может быть неограниченной. Предположим, что функция f интегрируема на любом отрезке $[a, b_1] \subset [a, b)$, т.е. существует интеграл

$$\int_a^{b_1} f(x)\,dx, \quad b_1 \in [a, b).$$

Определение 5.10. *Несобственным интегралом второго рода* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел

$$\lim_{b_1 \to b-0} \int_a^{b_1} f(x)\,dx, \tag{5.42}$$

т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b_1 \to b-0} \int_a^{b_1} f(x)\,dx.$$

Если предел (5.42) существует и конечен, то рассматриваемый интеграл называется сходящимся, в противном случае — расходящимся.

Геометрический смысл несобственного интеграла второго рода состоит в том, что он численно равен площади полубесконечной фигуры, ограниченной графиком неотрицательной функции, прямыми $x = a$, $x = b$ и частью оси Ox (рис. 5.14).

Если функция f определена на промежутке $(a, b]$ и не ограничена в окрестности точки $x = a$, то полагают, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{a_1 \to a+0} \int_{a_1}^b f(x)\,dx.$$

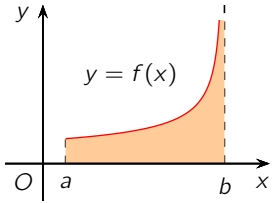

Рис. 5.14

Наконец, пусть функция f определена на интервале (a, b) и не ограничена и в окрестности точки a, и в окрестности точки b. Произвольным образом выберем число $c \in (a, b)$. Получим:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{5.43}$$

Несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

называют сходящимся, если оба интеграла в правой части равенства (5.43) сходятся, и расходящимся — в противном случае.

Пример 5.35. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(или установить его расходимость).

Р е ш е н и е. Данный интеграл является несобственным интегралом второго рода. Функция $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ не ограничена в любой окрестности точки $x = 1$. Поэтому по формуле (5.42) имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b_1 \to 1-0} \left(\arcsin x \Big|_0^{b_1} \right) = \lim_{b_1 \to 1-0} \arcsin b_1 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

Пример 5.36. Вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$$

(или установить его расходимость).

Р е ш е н и е. По определению несобственного интеграла второго рода имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a_1 \to +0} \int\limits_{a_1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a_1 \to +0} \left(\ln|x| \Big|_{a_1}^1 \right) = \lim_{a_1 \to +0} (\ln 1 - \ln a_1) = \infty.$$

Значит, указанный интеграл расходится. $\square$

Замечание 5.5. Несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$. [Доказательство]

Мы рассмотрели понятие несобственных интегралов. В расширенном курсе высшей математики подробно рассматриваются условия их сходимости и устанавливаются соответствующие признаки.

Глава 6

Дифференцирование функций двух переменных

6.1. Функция двух переменных. Дифференциал
6.2. Экстремум функции двух переменных

6.1. Функция двух переменных. Дифференциал

6.1.1. Определения
6.1.2. Предел функции двух переменных
6.1.3. Непрерывность функции двух переменных
6.1.4. Частные производные
6.1.5. Частные производные высших порядков
6.1.6. Дифференцируемость и дифференциал
6.1.7. Производная сложной функции
6.1.8. Производная по направлению. Градиент
6.1.9. Производственная функция Кобба — Дугласа

6.1.1. Определения

Определение 6.1. Обозначим через D некоторое множество точек $M(x, y)$ плоскости $\mathbb{R}^2$. Правило f, ставящее в соответствие каждой упорядоченной паре действительных чисел $(x, y) \in D$ единственное число z из множества действительных чисел $\mathbb{R}$, называется *функцией двух переменных* и обозначается $z = f(x, y)$, $z = f(M)$ либо $f : D \to \mathbb{R}$. Множество D при этом называется *областью определения функции*. Множество

$$\{ f(x, y) \mid (x, y) \in D \}$$

называется *множеством значений функции* f.

Множество значений является подмножеством множества действительных чисел $\mathbb{R}$, а область определения — подмножеством точек плоскости Oxy.

Функцию двух переменных можно изобразить графически. Для этого в каждой точке $(x, y) \in D$ вычисляется значение функции $z = f(x, y)$. Тогда тройка чисел $(x, y, z) = (x, y, f(x, y))$ определяет в системе декартовых координат в пространстве некоторую точку P (рис. 6.1).

Определение 6.2. Совокупность точек $P(x, y, f(x, y))$ (рис. 6.1) представляет собой поверхность в трёхмерном пространстве, которая называется *графиком функции* $z = f(x, y)$.

Пример 6.1. Графиком линейной функции $z = Ax + By + C$ является плоскость.

Пример 6.2. Для функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ область определения $D(f)$ есть единичный круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$, а множество значений — отрезок $[0, 1]$. График этой функции представляет собой верхнюю полусферу единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 6.2).

Наглядное представление о функции двух или трёх переменных может дать картина её линий уровня.

Определение 6.3. *Линией уровня функции* $z = f(x, y)$ называется множество точек $M(x, y)$ плоскости Oxy, удовлетворяющих равенству $f(x, y) = c$, где c — константа.

Иными словами, линия уровня — это кривая, во всех точках которой функция f принимает одно и то же постоянное значение c. Геометрически линии уровня получаются как проекции на плоскость Oxy линий пересечения графика функции f и горизонтальных плоскостей $z = c$.

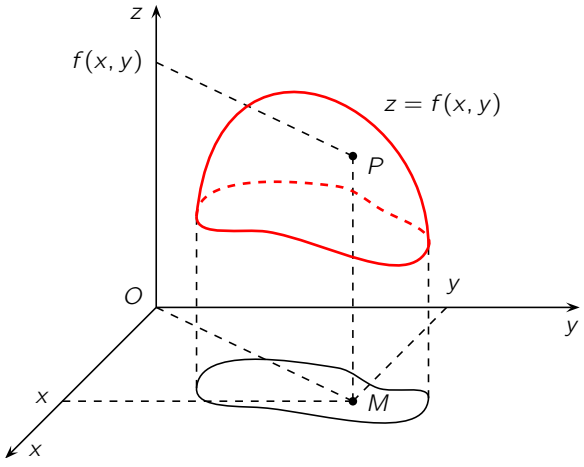

Рис. 6.1

Пример 6.3. Построить семейство линий уровня параболоида вращения $z = x^2 + y^2$.

Р е ш е н и е. Придавая постоянной c значения 0, 1, 2, ... (очевидно, что константа c не может быть отрицательной), получим уравнения некоторых линий уровня. Например:

$x^2 + y^2 = 0$ представляет собой точку $O(0, 0)$;

$x^2 + y^2 = 1$ является окружностью радиуса $R = 1$ с центром $O(0, 0)$;

$x^2 + y^2 = 2$ есть окружность радиуса $R = \sqrt{2}$ с центром $O(0, 0)$.

Таким образом, линиями уровня функции $z = x^2 + y^2$ являются концентрические окружности с центром в начале координат и радиусом $c \geqslant 0$, которые получаются в результате пересечения поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$ с плоскостями $z = c$ (рис. 6.3). □

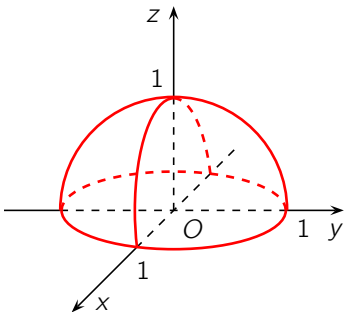

Рис. 6.2

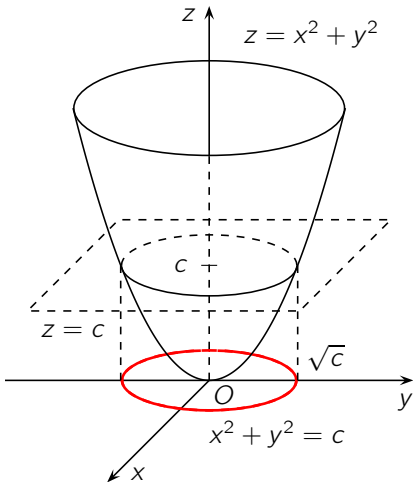

Рис. 6.3

Линии уровня используются в картографии. Так, например, на топографических картах рисуют линии равной высоты над уровнем моря, на метеорологических картах изображают линии одинакового давления — изобары.

По линиям уровня, построенным для некоторой рассматриваемой функции с одинаковыми промежутками между значениями c_1, c_2, c_3, ..., c_n, ..., можно получить представление о графике функции (т.е. о форме поверхности). В тех местах, где линии располагаются «гуще», функция при переходе от одного значения c к другому меняется быстрее, чем там, где линии распределены реже.

6.1.2. Предел функции двух переменных

Напомним, что если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат, то расстояние между двумя точками определяется формулой (1.21).

Определение 6.4. Говорят, что последовательность точек плоскости $\{M_n(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *сходится к точке* $M_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всякого $n > N_\varepsilon$

$$M_nM_0 = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon.$$

Определение 6.5. Число A называется *пределом функции f в точке M_0*, если для любой последовательности точек плоскости $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящейся к точке M_0 и такой, что $M_n \neq M_0$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(M_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к числу A.

Тот факт, что число A является пределом функции двух переменных $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, можно записать одним из следующих способов:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A, \qquad \lim_{M\to M_0} f(M) = A.$$

Замечание 6.1. Если для некоторых двух последовательностей точек $\{M'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{M''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящихся к M_0, пределы соответствующих последовательностей $\{f(M'_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{f(M''_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеют разные значения или хоть один из них не существует, то в точке M_0 функция f предела не имеет.

Пример 6.4. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$?

Р е ш е н и е. Рассмотрим последовательность точек $M'_n(1/n, 0)$, стремящуюся к началу координат по положительной части оси Ox. Для этой последовательности

$$\lim_{n\to\infty} f(M'_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot 0}{\frac{1}{n^2} + 0} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Возьмём теперь последовательность $M_n''(1/n, 1/n)$, стремящуюся к началу координат по направлению биссектрисы первого координатного угла. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n'') = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, двум разным последовательностям точек, стремящимся к началу координат по разным путям, соответствуют две последовательности значений функции, имеющие разные пределы. Значит, данный предел не существует. □

Как и для функций одной переменной, можно доказать, что данное нами определение предела функции на языке последовательностей эквивалентно приводимому ниже определению на языке $\varepsilon - \delta$.

Определение 6.6. Число A называется *пределом функции* $f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех точек $M(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Иными словами, число A называется *пределом функции* f *в точке* M_0, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, M,\ 0 < MM_0 < \delta, \quad |f(M) - A| < \varepsilon.$$

Определение 6.7. Внутренность круга с центром в точке M_0 и радиусом ε, т.е. множество

$$U(M_0, \varepsilon) = \left\{(x, y) \;\middle|\; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\right\},$$

называется *ε-окрестностью* или просто *окрестностью точки* M_0 (рис. 6.4).

«Переведем» определение предела функции двух переменных на «язык окрестностей».

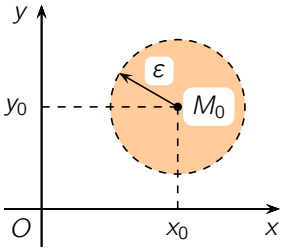

Рис. 6.4

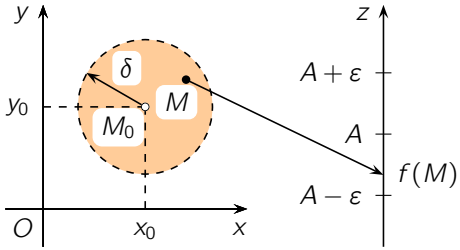

Рис. 6.5

Определение 6.8. Число A называется *пределом функции* $f(M)$ *в точке* M_0, если для любой ε-окрестности точки A найдется такая δ-окрестность точки M_0, что для всех точек $M \neq M_0$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(M)$ лежат в ε-окрестности точки A.

Определение 6.8 выражает *геометрический смысл предела функции двух переменных* (рис. 6.5).

Все положения теории пределов функции одной переменной можно перенести на функцию двух переменных.

Свойства предела функции двух переменных

1. *Если у функции* $f(M)$ *есть предел при* $M \to M_0$, *то этот предел единственный.*

2. *Если функция* $f(M)$ *имеет в точке* M_0 *предел, то существует окрестность этой точки, в которой функция* $f(M)$ *ограничена.*

3. *Если* $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = A$, $\lim\limits_{M\to M_0} g(M) = B$, *то:*

1) $\lim\limits_{M\to M_0} \Big(f(M) \pm g(M)\Big) = A \pm B,$

2) $\lim\limits_{M\to M_0} \Big(f(M)g(M)\Big) = AB,$

3) $\lim\limits_{M\to M_0} \dfrac{f(M)}{g(M)} = \dfrac{A}{B}$ *при условии, что* $B \neq 0.$

4 (о пределе промежуточной функции). *Пусть функции $f(M)$, $g(M)$ и $\varphi(M)$ определены в некоторой окрестности точки M_0, кроме, быть может, самой точки M_0, и удовлетворяют в этой окрестности неравенствам $f(M) \leqslant \varphi(M) \leqslant g(M)$. Если*

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = \lim_{M\to M_0} g(M) = A,$$

то предел функции $\varphi(M)$ в точке M_0 существует и тоже равен A.

Пример 6.5. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$?

Р е ш е н и е. Так как $|xy| \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$, то

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{|x|\dfrac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2} = \frac{|x|}{2}$$

и

$$-\frac{|x|}{2} \leqslant \frac{x^2y}{x^2+y^2} \leqslant \frac{|x|}{2}.$$

Очевидно, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{|x|}{2} = 0,$$

поэтому по свойству 4 предела промежуточной функции искомый предел существует и равен нулю. □

6.1.3. Непрерывность функции двух переменных

Определение 6.9. Функция $z = f(x, y)$, определённая в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, называется *непрерывной в точке* M_0, если в этой точке существует предел функции $f(x, y)$, равный значению функции в этой точке:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Другими словами, достаточно малые изменения независимых переменных x и y обеспечивают сколь угодно малые изменения значений функции. Геометрически это означает, что достаточно малые сдвиги точек на плоскости Oxy ведут к сколь угодно малым изменениям аппликаты точек поверхности, представляющей собой график функции $z = f(x, y)$.

По аналогии с функциями одной переменной можно доказать, что арифметические действия над непрерывными функциями и построение сложных функций из непрерывных функций приводят к непрерывным же функциям. При этом для непрерывности частного, как всегда, требуется, чтобы делитель не обращался в нуль.

Определение 6.10. Функция, непрерывная в каждой точке множества, называется *непрерывной на этом множестве*.

Пример 6.6. Функция

$$z = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{в точке } O(0, 0) \end{cases}$$

непрерывна в начале координат (см. пример 6.5). В других точках она непрерывна как элементарная функция. Таким образом, эта функция непрерывна во всей плоскости $\mathbb{R}^2$.

Определение 6.11. Точка, в которой функция не определена или определена, но не является непрерывной, называется *точкой разрыва функции*.

Пример 6.7. Для функции

$$z = \frac{1}{9x^2 - 4y^2}$$

точки разрыва образуют множество точек плоскости Oxy, определяемое равенством $9x^2 - 4y^2 = 0$, т.е. две прямые $y = \pm 3x/2$.

Приведённое выше определение описывает непрерывность функции f по совокупности переменных. Зафиксировав переменную $y = y_0$, получим функцию $\varphi(x) = f(x, y_0)$ одной переменной x.

Определение 6.12. Если функция $\varphi(x) = f(x, y_0)$ непрерывна в точке x_0, то говорят, что функция $f(x, y)$ *непрерывна в точке* (x_0, y_0) *по переменной* x. Аналогично вводится понятие *непрерывности функции* f *в точке* (x_0, y_0) *по переменной* y.

Будем придавать переменным x и y такие приращения Δx и Δy, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ принадлежала области определения функции $z = f(x, y)$.

Определение 6.13. *Частными приращениями функции* $z = f(x, y)$ по переменным x и y в точке $M_0(x_0, y_0)$ называются соответственно величины

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0), \quad \Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Определение 6.14. *Полным приращением функции* $z = f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ называется выражение

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Перефразируем определение непрерывности функции на «языке приращений».

Определение 6.15. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если её полное приращение есть величина бесконечно малая, когда приращения независимых переменных стремятся к нулю, т.е.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Непрерывность функции $f(x, y)$ по одной из переменных x или y в точке $M_0(x_0, y_0)$ означает справедливость одного из следующих равенств:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x z = 0, \quad \lim_{\Delta y \to 0} \Delta_y z = 0.$$

Замечание 6.2. Из непрерывности функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ следует её непрерывность по каждой из переменных x и y в этой точке. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. В этом несложно убедиться на примере функции

$$z = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{в точке } O(0, 0) \end{cases}$$

(см. пример 6.4).

6.1.4. Частные производные

Определение 6.16. Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, определённую в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Зафиксировав переменную $y = y_0$, получим функцию одной переменной $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Если функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

то этот предел называется *частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$* и обозначается:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad z'_x(x_0, y_0), \quad f'_x(x_0, y_0),$$

или короче:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \quad z'_x(M_0), \quad f'_x(M_0).$$

Аналогично определяется *частная производная по переменной y*:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = z'_y(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \\ = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Замечание 6.3. Из определения следует, что частную производную функции двух переменных следует вычислять как обычную производную функции одной переменной, считая вторую переменную постоянной.

Пример 6.8. Найти частные производные функции

$$z = x^3 y^2 + 2x \ln y + x^y.$$

Р е ш е н и е. При нахождении частной производной функции z по x считаем переменную y постоянной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 + 2\ln y + yx^{y-1}.$$

Вычисляя производную z по y, считаем постоянной переменную x:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + 2\frac{x}{y} + x^y \ln x.$$ □

На поверхности, являющейся графиком функции $z = f(x, y)$, выберем точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 6.6). Построим сечение этой поверхности плоскостью $y = y_0$, параллельной координатной плоскости Oyz. Получим плоскую кривую, задаваемую уравнениями

$$y = y_0, \quad z = \varphi(x) = f(x, y_0).$$

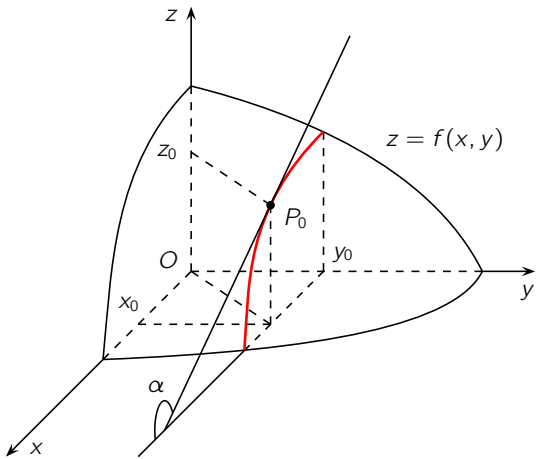

Рис. 6.6

Производная $\varphi'(x_0)$ функции одной переменной $\varphi(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к этой кривой. Но по определению частных производных верно также равенство $\varphi'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$.

Итак, если α — угол между осью Ox и касательной, проведённой к кривой $z = f(x, y_0)$ в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$, то $f_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha$. Аналогично $f_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\beta$, где β — угол между осью Oy и касательной, проведённой к кривой $z = f(x_0, y)$ в точке P_0. В этом состоит *геометрический смысл частных производных*.

6.1.5. Частные производные высших порядков

Определение 6.17. Предположим, что функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в точке $M(x, y)$ и в некоторой её окрестности. Если функции $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ сами могут быть продифференцированы, то их частные производные по переменным x и y называются *частными производными второго порядка* и обозначаются следующим образом:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$
$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Пример 6.9. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^4 + 4x^2y^3 + 10$.

Р е ш е н и е. Сначала находим частные производные первого порядка:

$$z'_x = 4x^3 + 8xy^3, \quad z'_y = 12x^2y^2.$$

Затем находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \left(4x^3 + 8xy^3\right)'_x = 12x^2 + 8y^3, \qquad z''_{yy} = \left(12x^2y^2\right)'_y = 24x^2y,$$
$$z''_{xy} = \left(4x^3 + 8xy^3\right)'_y = 24xy^2, \qquad z''_{yx} = \left(12x^2y^2\right)'_x = 24xy^2. \qquad \square$$

Частные производные третьего и *более высокого порядка* определяются и обозначаются аналогично. Например:

$$z'''_{xyx} = \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right), \quad z^{(7)}_{y^2x^5} = \frac{\partial^7 z}{\partial y^2\,\partial x^5} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^6 z}{\partial y^2\,\partial x^4}\right).$$

Определение 6.18. Частные производные по разным переменным, например z''_{xy} и z''_{yx}, называются *смешанными*.

В примере 6.9 оказалось, что смешанные производные равны, т.е. $z''_{xy} = z''_{yx}$. Приводимая ниже теорема Шварца утверждает, что это не простое совпадение.

Теорема 6.1 (Шварца). *Если частные производные порядка n непрерывны, то смешанные производные того же порядка, различающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.*

6.1.6. Дифференцируемость и дифференциал

Определение 6.19. Функция $z = f(x, y)$, определённая в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, называется *дифференцируемой в точке M_0*, если её полное приращение в этой точке

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

представимо в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \tag{6.1}$$

где A, B — постоянные, не зависящие от Δx и Δy; $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Теорема 6.2 (необходимое условие дифференцируемости). *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, т.е. её полное приращение может быть записано в виде (6.1), то она непрерывна в этой точке и имеет в ней частные производные*

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = B. \tag{6.2}$$

[Доказательство]

Замечание 6.4. Приводимый ниже пример показывает, что теорему 6.2 нельзя обратить, т.е. из непрерывности функции и существования всех её частных производных, вообще говоря, не следует дифференцируемость.

Пример 6.10. В примере 6.6 мы установили, что функция

$$z = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{в точке } O(0, 0) \end{cases}$$

непрерывна во всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Во всех точках, кроме начала координат, функция z имеет частные производные, будучи элементарной. В начале координат

$$z'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{(\Delta x)^2\cdot 0}{(\Delta x)^2+0^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Аналогично $z'_y(0,0) = 0$.

Итак, функция z непрерывна и имеет частные производные во всей плоскости $\mathbb{R}^2$.

Если функция z дифференцируема в начале координат, то по формулам (6.1) и (6.2) её полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z = \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y,$$

где $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ и $\beta(\Delta x,\Delta y)$ — бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$.

Приняв $\Delta x = \Delta y$ и подсчитав, что при этом

$$\Delta z = \frac{(\Delta x)^2\Delta x}{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2} - 0 = \frac{\Delta x}{2},$$

получим соотношение

$$\frac{\Delta x}{2} = \alpha(\Delta x,\Delta x)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta x)\Delta x.$$

После сокращения на Δx приходим к равенству

$$\alpha(\Delta x,\Delta x) + \beta(\Delta x,\Delta x) = \frac{1}{2},$$

противоречащему тому факту, что α и β — бесконечно малые. Таким образом, функция z не дифференцируема в начале координат.

Теорема 6.3 (достаточное условие дифференцируемости). *Если функция $z = f(M)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки M_0, непрерывные в точке M_0, то эта функция дифференцируема в точке M_0.*

Определение 6.20. *Дифференциалом* dz дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ называется главная линейная относительно Δx и Δy часть полного приращения (6.1):

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Из соотношений (6.2) следует, что

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \tag{6.3}$$

Полагая в формуле (6.3) $z(x, y) = x$, получаем:

$$dz = dx = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y = \Delta x.$$

Таким образом, $dx = \Delta x$. Аналогично $dy = \Delta y$. Эти рассуждения позволяют переписать дифференциал (6.3) в виде

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy. \tag{6.4}$$

Форма записи дифференциала (6.4) наиболее распространена.

Пример 6.11. Найти дифференциал функции $z = e^{x^3 y}$.

Р е ш е н и е. Находим сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2 y} 2xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2 y} x^2.$$

По формуле (6.4) искомый дифференциал

$$dz = e^{x^2 y} 2xy\,dx + e^{x^2 y} x^2\,dy = e^{x^2 y}(2xy\,dx + x^2\,dy).$$

□

6.1.7. Производная сложной функции

Теорема 6.4 (о производной сложной функции). *Если $z = f(x, y)$ — дифференцируемая по переменным x, y функция и $x(t)$, $y(t)$ — функции, дифференцируемые по переменной t, то сложная функция $z(t) = f(x(t), y(t))$ также дифференцируема. При этом её производная может быть вычислена по формуле*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{6.5}$$

[Доказательство]

Замечание 6.5. Требование дифференцируемости функции z в теореме 6.4 является существенным. Действительно, формула (6.5) теряет силу, например, для рассмотренной в примере 6.10 функции

$$z = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{в точке } O(0,0). \end{cases}$$

Эта функция непрерывна, имеет равные нулю частные производные, но не дифференцируема в начале координат. Если положить $x = t$ и $y = t$, то по формуле (6.5) получим:

$$z'(0) = z'_x(0,0)x'(0) + z'_y(0,0)y'(0) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Но на самом деле $z'(t) = \left(\dfrac{t^2\, t}{t^2 + t^2}\right)' = \left(\dfrac{t}{2}\right)' = \dfrac{1}{2}$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

6.1.8. Производная по направлению. Градиент

Выберем на плоскости точку $M_0(x_0, y_0)$. Построим луч l, выходящий из точки M_0. Тем самым мы зададим в точке M_0 *направление* l (рис. 6.7).

Определение 6.21. Луч, задающий направление l, образует с положительными направлениями осей координат Ox и Oy углы α и β. Величины $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ называются *направляющими косинусами* направления l (рис. 6.7).

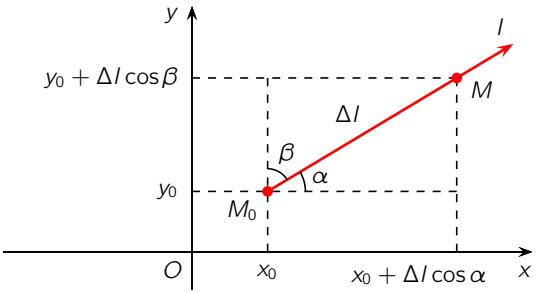

Рис. 6.7

Так как $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, то

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\alpha + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Точка $M(x, y)$, расположенная от $M_0(x_0, y_0)$ на расстоянии Δl в направлении l, имеет координаты

$$x = x_0 + \Delta l \cos\alpha, \quad y = y_0 + \Delta l \cos\beta. \tag{6.6}$$

Введём в рассмотрение единичный вектор $\mathbf{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$. Тогда соотношения (6.6) можно переписать в виде

$$M = M_0 + \Delta l \cdot \mathbf{e}. \tag{6.7}$$

Итак, любое направление задаётся некоторым единичным вектором. С другой стороны, всякий единичный вектор $\mathbf{e}$ задаёт некоторое направление l по формуле (6.7). Таким образом, понятия направления и единичного вектора могут быть отождествлены.

Определение 6.22. *Приращением функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению l* называется величина

$$\begin{aligned}\Delta_l z &= f(M_0 + \Delta l \cdot \mathbf{e}) - f(M_0) = \\ &= f(x_0 + \Delta l \cos\alpha, y_0 + \Delta l \cos\beta) - f(x_0, y_0),\end{aligned} \tag{6.8}$$

где $\mathbf{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ — единичный вектор направления l (рис. 6.8).

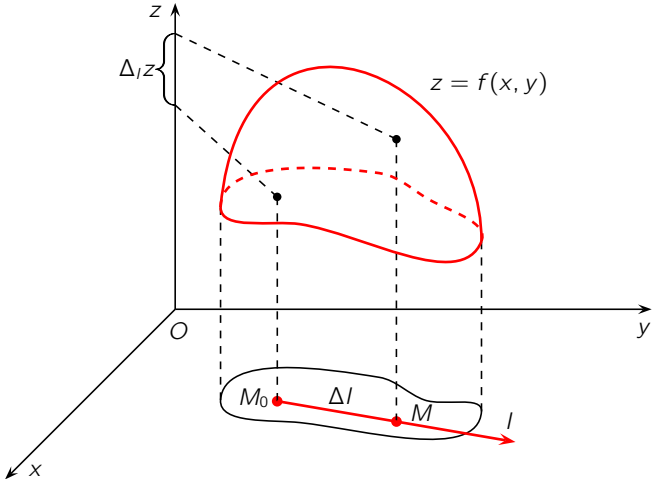

Рис. 6.8

Определение 6.23. Пусть направление l задаётся единичным вектором $\mathbf{e}$. *Производной функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 по направлению l* называется предел отношения приращения этой функции в точке M_0 по направлению l к величине Δl при стремлении последней к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(M_0 + \Delta l \cdot \mathbf{e}) - f(M_0)}{\Delta l}.$$

Замечание 6.6. Величина $\frac{\partial f}{\partial l}$ характеризует быстроту изменения функции $f(x, y)$ в точке M_0 по направлению l.

Если направление l совпадает с положительным направлением оси Ox, то производная по направлению $\frac{\partial f}{\partial l}$ совпадает с частной производной функции $f(x, y)$ по переменной x. Если l совпадает с положительным направлением оси Oy, то $\frac{\partial f}{\partial l}$ есть частная производная функции $f(x, y)$ по y.

Теорема 6.5. *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема, то её производная по направлению l существует и может быть вычислена по формуле*

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos\beta. \tag{6.9}$$

[Доказательство]

Пример 6.12. Вычислить производную функции $z = x^2 + xy^2$ в точке $A(1, 2)$ по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, если известна точка $B(3, 0)$.

Р е ш е н и е. Найдем единичный вектор $\mathbf{e}$, имеющий заданное направление:

$$\overrightarrow{AB} = (2, -2), \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}, \quad \mathbf{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Выпишем направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Вычислим частные производные функции z в точке $A(1,2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1,2) = 6, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,2) = 4.$$

По формуле (6.9) получим: $\dfrac{\partial z}{\partial l} = 6 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 4 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. □

Определение 6.24. *Градиентом* функции $z = f(x,y)$ называется вектор, координаты которого равны частным производным этой функции:

$$\operatorname{grad} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Если направление l задано единичным вектором $\mathbf{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, то по формуле (6.9)

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta) = \operatorname{grad} z \cdot \mathbf{e},$$

что свидетельствует о справедливости следующего утверждения.

Теорема 6.6. *Производная по направлению есть скалярное произведение градиента и единичного вектора, задающего это направление.*

Замечание 6.7. Как известно, скалярное произведение двух векторов максимально, если они одинаково направлены. Следовательно, градиент характеризует направление и величину максимального роста функции в выбранной точке, причём упомянутая величина равна

$$|\operatorname{grad} z| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}.$$

Замечание 6.8. Умея находить градиент, можно с некоторой погрешностью строить линии уровня функции. Вдоль своей линии уровня функция не меняется, а по направлению градиента растет с максимальной скоростью. Это наглядно иллюстрирует тот факт, что градиент перпендикулярен линии уровня. Строгое математическое доказательство данного утверждения мы опускаем.

С учётом сделанного замечания линии уровня можно строить следующим образом. Выбирается, вообще говоря, произвольно, некоторая точка M_0. Строится градиент в этой точке. Задаётся направление, перпендикулярное градиенту. Строится небольшой участок линии уровня. Рассматривается близкая к M_0 точка M_1 и строится градиент в ней. Далее построения повторяются.

Пример 6.13. Найти направление и величину максимального роста функции $z = 3x^2 + xy - 2y^2$ в точке $A(2, 1)$.

Р е ш е н и е. Вычислим частные производные функции z в точке A:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + y, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(2, 1) = 13, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x - 4y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(2, 1) = -2.$$

Отсюда $\operatorname{grad} z(2, 1) = (13, -2)$. Этот вектор задаёт искомое направление максимального роста. Величина максимального роста

$$\left|\operatorname{grad} z(2, 1)\right| = \left|(13, -2)\right| = \sqrt{13^2 + 2^2} = \sqrt{173}.$$

□

6.1.9. Производственная функция Кобба — Дугласа

Как мы уже знаем, производственная функция (ПФ) выражает зависимость объёма производства от величины затраченных ресурсов.

Определение 6.25. Производственная функция одной переменной называется *однoресурсной*.

В ряде случаев ПФ может быть сведена к зависимости *производительности труда* y, т.е. выпуска продукта в расчёте на одного работника, от *капиталовооружённости труда* x, т.е. величины капитала в расчёте на одного работника. Капиталовооружённость x может быть найдена по формуле $x = K/L$, где K — величина капитала, L — затраты труда.

Возникновение теории производственных функций относится к 1928 г., когда появилась статья американских учёных Д. Кобба и П. Дугласа, в которой впервые была введена функция, ныне известная как производственная функция Кобба — Дугласа.

Определение 6.26. Функция

$$F(K, L) = aK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad a > 0,\ 0 < \alpha < 1,$$

выражающая зависимость объёма выпускаемой продукции от объёма основных фондов K и затрат труда L, называется *производственной функцией Кобба — Дугласа*.

График производственной функции Кобба — Дугласа в трёхмерном пространстве есть коническая поверхность (рис. 6.9).

Для функции Кобба — Дугласа линии уровня, соответствующие константе $C > 0$, задаются уравнением $aK^{\alpha}L^{1-\alpha} = C$, или

$$L = \left(\frac{C}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} K^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Линии уровня производственной функции $F(K, L)$ для различных значений C изображены на рис. 6.10. Точки (K, L), лежащие на одной линии уровня, соответствуют различным наборам затрат, обеспечивающим один и тот же выпуск продукции.

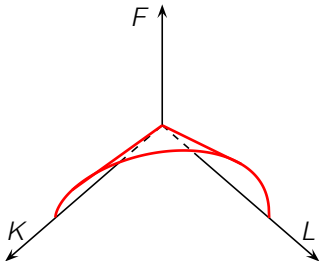

Рис. 6.9

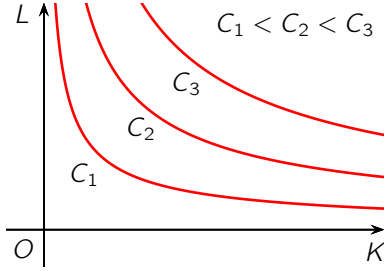

Рис. 6.10

Определение 6.27. Линии уровня производственной функции называются *изоквантами*.

Отметим, что изокванта, соответствующая значению C_3, расположена «северо-восточнее» изокванты, соответствующей значению C_2 (рис. 6.10).

Выясним, какую экономическую интерпретацию можно дать частным производным ПФ. Отношение

$$\frac{F(K_0 + \Delta K, L_0) - F(K_0, L_0)}{\Delta K}$$

показывает, какой дополнительный выпуск приходится на единицу изменения основных фондов K_0 при постоянных затратах труда L_0. Если существует конечный предел указанного выше отношения при $\Delta K \to 0$, то это есть частная производная функции $F(K, L)$ по переменной K:

$$\frac{\partial F}{\partial L}(K_0, L_0) = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{F(K_0 + \Delta K, L_0) - F(K_0, L_0)}{\Delta K}.$$

Определение 6.28. Частная производная $\partial F/\partial K$ производственной функции F называется *предельной фондоотдачей*.

Определение 6.29. Частную производную $\partial F/\partial L$ производственной функции F называют *предельной производительностью труда*.

Для производственной функции Кобба — Дугласа предельные фондоотдача и производительность труда соответственно равны:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}\left(aK^{\alpha}L^{1-\alpha}\right) = a\alpha\left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha},$$
$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(aK^{\alpha}L^{1-\alpha}\right) = a(1-\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}.$$

Определение 6.30. *Эластичностью функции* $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по переменным x и y называются соответственно пределы

$$E_{zx}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta_x z}{z}}{\frac{\Delta x}{x}}, \quad E_{zy}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\Delta_y z}{z}}{\frac{\Delta y}{y}}.$$

Из определения эластичности следует, что

$$E_{zx}(x_0, y_0) = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x}, \quad E_{zy}(x_0, y_0) = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Замечание 6.9. Эластичность приближённо показывает, на сколько процентов изменится выпуск, если затраты какого-либо одного ресурса увеличатся на 1% при неизменных объёмах другого ресурса.

Для производственной функции Кобба — Дугласа $F(K, L)$

$$E_{FK}(K_0, L_0) = \frac{K_0}{F(K_0, L_0)}\frac{\partial F}{\partial K}(K_0, L_0) = \frac{K_0}{aK_0^{\alpha}L_0^{1-\alpha}}a\alpha\left(\frac{L_0}{K_0}\right)^{1-\alpha} = \alpha,$$
$$E_{FL}(K_0, L_0) = \frac{L_0}{F(K_0, L_0)}\frac{\partial F}{\partial L}(K_0, L_0) =$$
$$= \frac{L_0}{aK_0^{\alpha}L_0^{1-\alpha}}\ a(1-\alpha)\left(\frac{K_0}{L_0}\right)^{\alpha} = 1-\alpha.$$

Сформулируем экономический смысл параметра α функции Кобба — Дугласа. Эластичность выпуска по основным фондам равна α. Значит, относительное изменение основных фондов на 1% вызывает изменение выпуска приблизительно на α%.

6.2. Экстремум функции двух переменных

6.2.1. Локальный экстремум
6.2.2. Глобальный экстремум
6.2.3. Условный экстремум
6.2.4. Метод множителей Лагранжа
6.2.5. Экстремум выпуклых функций
6.2.6. Функция полезности

6.2.1. Локальный экстремум

Определение 6.31. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой локального максимума функции* $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность M_0, для любой точки $M(x, y)$ которой выполняется неравенство $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$, и *точкой локального минимума*, если существует окрестность точки M_0, где $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$.

Определение 6.32. Точки локального максимума и локального минимума называются *точками локального экстремума*.

В начале координат верхняя часть полусферы (см. рис. 6.2) имеет *гладкий локальный максимум*, параболоид $z = x^2 + y^2$ (см. рис. 6.3) — *гладкий локальный минимум*, конус (рис. 6.11) — *острый локальный минимум*.

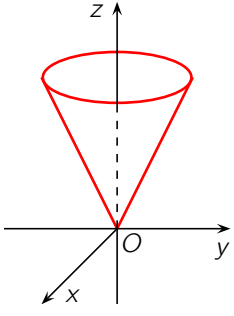

Рис. 6.11

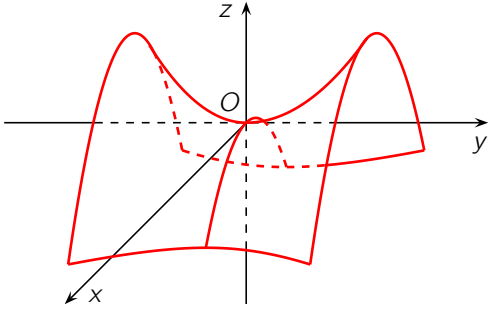

Рис. 6.12

Теорема 6.7 (необходимое условие локального экстремума). *Если дифференцируемая в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *функция* $z = f(x, y)$ *имеет в этой точке локальный экстремум, то обе её частные производные в* M_0 *обращаются в нуль:*

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \tag{6.10}$$

Замечание 6.10. Необходимое условие экстремума не является достаточным. Например, частные производные функции $z = y^2 - x^2$ равны нулю в точке $M_0(0,0)$, однако эта функция не имеет экстремума в указанной точке. В самом деле, значение функции z в точке M_0 равно нулю, но в сколь угодно малой окрестности M_0 функция принимает как положительные, так и отрицательные значения. Если, например, $x = 0$, то $z = y^2 > 0$, если $y = 0$, то $z = -x^2 < 0$.

Графиком функции $z = y^2 - x^2$ является *гиперболический параболоид* (рис. 6.12), для которого M_0 — это так называемая *седловая точка*.

Определение 6.33. Точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума (6.10), будем называть *стационарными точками*.

Теорема 6.8 (достаточное условие локального экстремума). *Пусть в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$ и некоторой её окрестности функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. Положим*

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0), \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0), \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0), \qquad \Delta = AC - B^2.$$

В этих обозначениях:

1) *если $\Delta > 0$, то в точке M_0 функция z имеет экстремум, причём при $A < 0$ либо $C < 0$ это локальный максимум; при $A > 0$ либо $C > 0$ это локальный минимум;*
2) *если $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет;*
3) *если $\Delta = 0$, то нужны дополнительные исследования, поскольку экстремум может быть, а может и отсутствовать.*

Следующие два примера иллюстрируют п. 3 теоремы.

Пример 6.14. Для функции $z = x^4 + y^4$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3.$$

Значит, точка $M_0(0,0)$ является стационарной. Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2,$$

то в точке M_0 имеем: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$. Таким образом, $\Delta = 0$. При этом M_0 — точка минимума функции z, поскольку $z(M_0) = 0$ и на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ верно неравенство $z(x,y) \geqslant 0$.

Пример 6.15. Для функции $z = x^3 + y^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Таким образом, $M_0(0,0)$ — стационарная точка, для которой $\Delta = 0$.

В данном случае $z(M_0) = 0$ и в каждой окрестности точки M_0 есть точки вида $M(x,0)$, в которых функция z равна x^3 и потому принимает положительные значения для $x > 0$ и отрицательные для $x < 0$.

Итак, в любой окрестности точки M_0 функция z принимает значения, как бóльшие, так и меньшие $z(M_0)$. Значит, в точке M_0 экстремума нет.

Пример 6.16. Найти точки локального экстремума функции

$$z = x^4 + y^4 - xy.$$

Р е ш е н и е. Находим сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - x.$$

Согласно необходимому условию локального экстремума экстремум возможен только в тех точках, где частные производные равны нулю. Составим и решим соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x^3 - y = 0, \\ 4y^3 - x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4x^3, \\ 4(4x^3)^3 - x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4x^3, \\ x(256x^8 - 1) = 0. \end{cases}$$

Имеем три стационарные точки: $M_1(0,0)$, $M_2(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $M_3(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Найдем частные производные второго порядка:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2,\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-1,\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2.$$

Отсюда $\Delta = AC - B^2 = 144x^2y^2 - 1$.

Вычислим значение Δ в каждой стационарной точке. Так как

$$\Delta(M_1)=\Delta(0,0)=-1<0,$$

то в точке M_1 нет экстремума. Далее:

$$\Delta(M_2)=\Delta\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=8>0,\quad A(M_2)=A\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)>0,$$

поэтому M_2 — точка локального минимума. Наконец,

$$\Delta(M_3)=\Delta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=8>0,\quad A(M_3)=A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)>0.$$

Значит, M_3 — точка локального минимума. □

6.2.2. Глобальный экстремум

В прикладных дисциплинах часто встречаются задачи на отыскание *глобального экстремума*, когда требуется вычислить наибольшее и наименьшее значения функции в некоторой области двухмерного пространства, ограниченной заданным набором линий.

Глобальный экстремум может достигаться либо внутри, либо на границе области. В первом случае экстремум окажется также локальным и для него будет выполнено необходимое условие экстремума (6.10). Из сказанного становится ясно, что для отыскания глобального экстремума следует:

1) найти стационарные точки, расположенные внутри области, и вычислить значения функции в них;
2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;
3) из всех найденных значений выбрать самое большое и самое маленькое.

Пример 6.17. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2+2y^2-2x-8y$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x + 2y = 8$.

Р е ш е н и е. Прямая $x + 2y = 8$ пересечёт ось Oy в точке $A(0, 4)$, а ось Ox — в точке $B(8, 0)$. Таким образом, функцию z мы будем исследовать в треугольнике OAB (рис. 6.13).

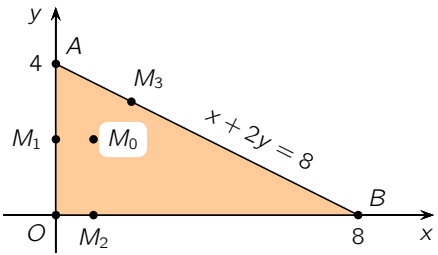

Рис. 6.13

Находим стационарные точки внутри треугольника OAB:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 4y - 8 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 2, \\ 4y = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Имеем единственное решение $M_0(1, 2)$. Вычисляем значение функции z в стационарной точке M_0:

$$z(M_0) = z(1, 2) = 1^2 + 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 1 - 8 \cdot 2 = 1 + 8 - 2 - 16 = -9.$$

Теперь исследуем функцию z на каждой из сторон треугольника OAB в отдельности. На стороне OA, задаваемой уравнением $x = 0$, функция z принимает вид $z_{OA} = 2y^2 - 8y$, где $y \in [0, 4]$. Находим стационарные точки функции одной переменной z_{OA}:

$$z'_{OA}(y) = 0, \quad 4y - 8 = 0, \quad 4y = 8, \quad y = 2.$$

Корню $y = 2$ соответствует точка $M_1(0, 2)$ на стороне OA. Вычисляем значения функции z в точке M_1, а также на концах O и A стороны OB:

$$z(M_1) = z_{OA}(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 = -8,$$
$$z(O) = z_{OA}(0) = 0, \quad z(A) = z_{OA}(4) = 2 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 = 0.$$

Сторона OB задаётся уравнением $y = 0$. На ней функция z принимает вид $z_{OB} = x^2 - 2x$, где $x \in [0, 8]$. Находим стационарные точки функции z_{OB}:

$$z'_{OB}(x) = 0, \quad 2x - 2 = 0, \quad 2y = 2, \quad x = 1.$$

Имеем точку $M_2(1, 0)$. Так как значение $z(O)$ нам уже известно, осталось вычислить $z(M_2)$ и $z(B)$:

$$z(M_2) = z_{OB}(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1, \quad z(B) = z_{OB}(8) = 8^2 - 2 \cdot 8 = 48.$$

На стороне AB имеем $x = 8 - 2y$, следовательно, функция z принимает вид

$$z_{AB} = (8 - 2y)^2 + 2y^2 - 2(8 - 2y) - 8y = 6y^2 - 36y + 48, \quad y \in [0, 4].$$

Ищем стационарные точки функции z_{AB}:

$$z'_{AB}(y) = 0, \quad 12y - 36 = 0, \quad 12y = 36, \quad y = 3.$$

Получена точка $M_3(2, 3)$, для которой

$$z(M_3) = z_{AB}(3) = 6 \cdot 3^2 - 36 \cdot 3 + 48 = -6.$$

Сравнивая найденные значения, приходим к выводу, что

$$z_{\min} = z(M_0) = -9, \quad z_{\max} = z(B) = 48.$$

□

6.2.3. Условный экстремум

Начнём рассмотрение понятия *условного экстремума* с конкретного примера.

Пример 6.18. Найти минимум и максимум функции $z = x - y$ на единичной окружности, т.е. при условии, что координаты x и y связаны соотношением $x^2 + y^2 = 1$.

Р е ш е н и е. Геометрически эта задача означает, что на эллипсе, полученном при пересечении цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ плоскостью $z = x - y$, требуется найти максимальное и минимальное значения аппликаты z (рис. 6.14).

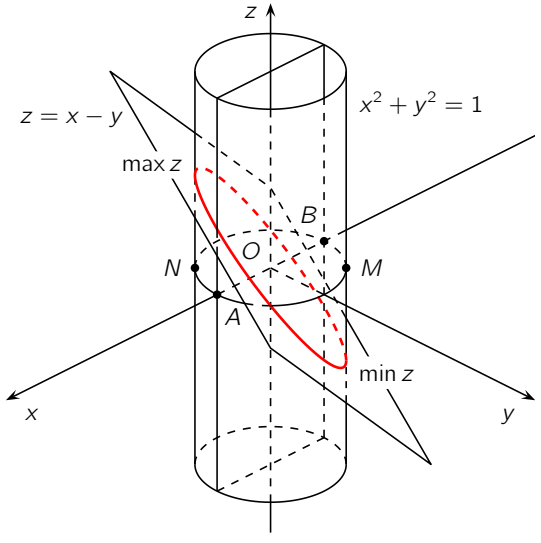

Рис. 6.14

Точками $A(1,0)$ и $B(-1,0)$ разделим окружность $x^2+y^2=1$ на две полуокружности, каждую из которых можно представить в явном виде следующим образом:

$$y_1=\sqrt{1-x^2}, \quad y_2=-\sqrt{1-x^2}, \qquad x\in[-1,1].$$

На первой полуокружности имеем:

$$z_1(x)=x-y_1(x)=x-\sqrt{1-x^2}, \quad x\in[-1,1].$$

Ищем стационарные точки функции z_1 на интервале $(-1,1)$:

$$z_1'(x)=0, \quad 1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0, \quad \frac{\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

Отсюда

$$x=-\sqrt{1-x^2}, \quad \begin{cases} x^2=1-x^2, \\ x<0, \end{cases} \qquad x=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Этой стационарной точке соответствует точка $M(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ первой полуокружности. Вычисляем значения функции z в точке M и на концах A и B:

$$z(M)=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}, \quad z(A)=1-0=1, \quad z(B)=-1-0=-1.$$

Аналогичным образом исследуя вторую полуокружность, приходим к точке $N(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$, для которой $z(N)=\sqrt{2}$. Сравнивая значения функции z в точках A, B, M и N, находим, что максимум достигается в точке N и равен $\sqrt{2}$, минимум достигается в точке M и равен $-\sqrt{2}$. □

Определение 6.34. Отыскание *условного экстремума* — это задача о нахождении экстремума целевой функции $z=f(x,y)$ при условии, что переменные x и y подчиняются ограничению $g(x,y)=0$, называемому *уравнением связи*.

Определение 6.35. Точка $M_0(x_0, y_0)$, удовлетворяющая уравнению связи $g(x, y) = 0$, называется *точкой локального условного максимума функции* $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для любых точек M из этой окрестности, удовлетворяющих уравнению связи $g(x, y) = 0$, выполнено неравенство $f(M) \leqslant f(M_0)$.

Аналогично при определении *точки локального условного минимума* требуется выполнение неравенства $f(M) \geqslant f(M_0)$.

6.2.4. Метод множителей Лагранжа

На примере 6.18 мы могли убедиться, что задача нахождения условного экстремума может быть сведена к задаче нахождения экстремума функции одной переменной. Такой подход, однако, имеет следующие недостатки:

1) из уравнения связи приходится находить явное выражение одной переменной через другую, что может быть весьма сложной, а иногда и неразрешимой задачей;
2) функцию приходится исследовать в искусственно выбираемых точках, с помощью которых линия, задаваемая уравнением связи, разбивается на части.

Преодолеть указанные недостатки позволяет так называемый метод множителей Лагранжа.

Определение 6.36. Функция переменных x, y и λ

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

где $g(x, y) =$ уравнение связи, называется *функцией Лагранжа*, а λ — *множителем Лагранжа*.

Метод множителей Лагранжа состоит в применении следующей теоремы.

Теорема 6.9. *Если точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой условного экстремума функции $z = f(x, y)$ на множестве, определяемом уравнением связи $g(x, y) = 0$, то существует такое значение $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, при котором точка (x_0, y_0, λ_0) является точкой безусловного экстремума функции Лагранжа $L(x, y, \lambda)$.*

Согласно теореме 6.9 для нахождения точек, подозрительных на локальный экстремум, следует решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0. \end{cases} \tag{6.11}$$

Пример 6.19. Решить пример 6.18, применяя метод множителей Лагранжа.

Р е ш е н и е. В данном случае уравнение связи имеет вид

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = x - y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Выпишем и решим систему (6.11):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -1 + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda}, \\ y = \dfrac{1}{2\lambda}, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Подставим x и y в последнее уравнение:

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1, \quad 2\lambda^2 = 1, \quad \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Корням λ_1 и λ_2 соответствуют точки

$$M\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad N\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

значения $z(M) = -\sqrt{2}$ и $z(N) = \sqrt{2}$ в которых являются искомыми минимумом и максимумом функции z. □

6.2.5. Экстремум выпуклых функций

Определение 6.37. Множество $B \subset \mathbb{R}^2$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми своими точками a и b оно целиком содержит соединяющий их отрезок.

На рис. 6.15 изображены выпуклые множества, а на рис. 6.16 — множества, не обладающие свойством выпуклости.

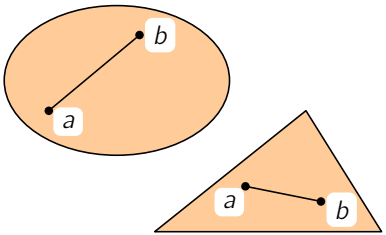

Рис. 6.15

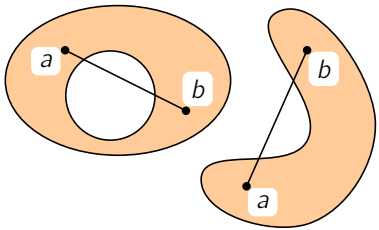

Рис. 6.16

Определение 6.38. Функция, заданная на выпуклом множестве B, называется *выпуклой вниз*, если все точки графика этой функции, соответствующие произвольному отрезку $[a, b]$ из множества B, лежат не выше хорды, соединяющей точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$.

Аналогично функция называется *выпуклой вверх*, если для всякого отрезка из множества B график функции в точках этого отрезка лежит не ниже соответствующей хорды (рис. 6.17).

Можно доказать, что для выпуклой функции равенство нулю частных производных является не только необходимым, но и достаточным условием экстремума. Более того, экстремум выпуклой функции является *глобальным*, т.е. *наименьшим значением* во всей области определения в случае функции, выпуклой вниз, и *наибольшим* — в случае функции, выпуклой вверх.

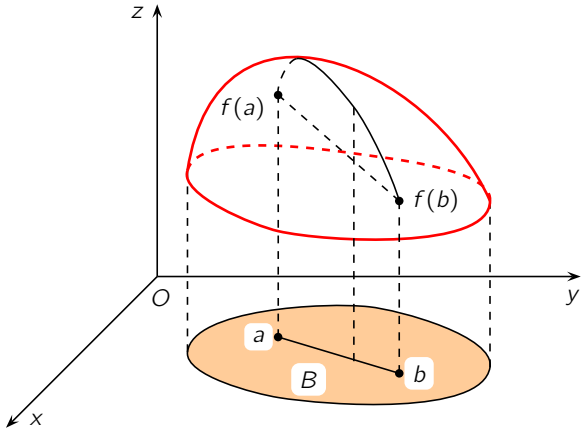

Рис. 6.17

6.2.6. Функция полезности

В основе модели поведения потребителей лежит гипотеза, что каждый из них, выбирая набор благ при заданных ценах и имеющемся доходе, стремится максимизировать уровень удовлетворения своих потребностей.

Пусть на рынке потребителю предлагается n различных благ. Через $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_i — количество i-го блага в натуральных единицах, будем обозначать конкретный набор благ. Блага приобретаются по рыночным ценам p_1, p_2, $\ldots$, p_n соответственно. Стоимость набора благ есть сумма

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i.$$

В распоряжении потребителя имеется ограниченное количество денег R (доход), поэтому существует *бюджетное ограничение*

$$\sum_{i=1}^{n} p_ix_i \leqslant R.$$

Полезность блага — это способность удовлетворять ту или иную потребность. Потребитель выбирает наиболее предпочтительный набор среди всех доступных.

В XIX в. была введена функция полезности u для предпочтения одного набора другому. Основное её свойство в том, что потребитель предпочитает набор X, а не Y, если $u(X) > u(Y)$. Таким образом, функция полезности упорядочивает наборы имеющихся благ по предпочтению.

Определение 6.39. *Функция полезности* $u = u(x, y)$, заданная на пространстве двух благ (товаров), — это субъективная числовая оценка полезности набора товаров (x, y).

Определение 6.40. Линии уровня функции полезности называют *кривыми безразличия* (рис. 6.18).

Если $u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2)$, то потребителю безразлично, каким набором обладать, потому что они имеют одинаковую полезность. Чем «северо-восточнее» расположена кривая безразличия, тем большему уровню она соответствует (рис. 6.18). Кривые безразличия являются убывающими.

В теории потребительского выбора большую роль играют предельные полезности.

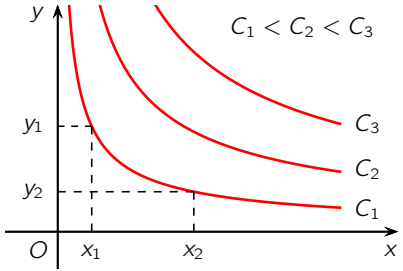

Рис. 6.18

Определение 6.41. *Предельные полезности* выражают дополнительное удовлетворение от потребления одной дополнительной единицы блага. Математически это описывается частными производными функции полезности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta y}.$$

Предельные полезности положительны, так как с увеличением потребления блага его полезность возрастает.

Определение 6.42. Вектор градиента функции полезности

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

координаты которого есть предельные полезности, называется *вектором предельных полезностей*.

Закон убывающей полезности гласит, что с увеличением потребления блага его предельная полезность убывает, т.е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0.$$

Определение 6.43. Если потребитель обладает доходом R, то множество всех наборов товаров стоимостью не более R называется *бюджетным множеством*. *Граница бюджетного множества* — это множество наборов, которые стóят ровно R.

Задача потребительского выбора (ЗПВ), или *задача рационального поведения потребителя на рынке*, заключается в выборе такого набора товаров x и y, который максимизирует функцию полезности при заданном бюджетном ограничении, т.е.

$$u(x,y) \to \max, \quad p_1x + p_2y \leqslant R, \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,$$

где p_1, p_2 — цена первого и второго товаров соответственно.

Таким образом, на бюджетном множестве требуется найти точку, принадлежащую кривой безразличия с максимальным уровнем полезности. Графически поиск означает последовательный переход на линии все более высокого уровня полезности до тех пор, пока линии ещё имеют общие точки с бюджетным множеством. Следовательно, искомая точка лежит на границе бюджетного множества. В ней кривая безразличия касается линии бюджетного ограничения. Следовательно, ЗПВ можно заменить задачей на условный экстремум

$$u(x,y) \to \max, \quad R - (p_1x + p_2y) = 0.$$

Так как функция полезности является выпуклой, то на бюджетном множестве существует единственная точка максимума функции полезности. Значит, у потребителя даже нет выбора в том, как с наибольшей пользой потратить свои деньги, поскольку существует единственный набор (x^0, y^0), максимизирующий полезность.

Определение 6.44. Точка (x^0, y^0) максимума функции полезности называется *точкой спроса* (рис. 6.19).

Чтобы решить задачу на условный экстремум, построим функцию Лагранжа

$$L(x,y,\lambda) = u(x,y) + \lambda(R - p_1x - p_2y),$$

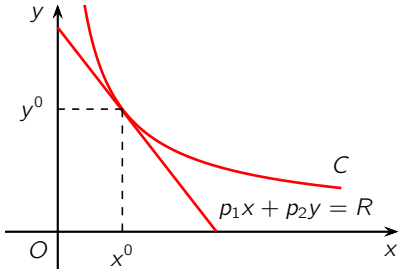

Рис. 6.19

для которой выпишем систему (6.11):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \lambda(-p_1) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \lambda(-p_2) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = R - (p_1x + p_2y) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \lambda p_1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \lambda p_2, \\ p_1x + p_2y = R, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1x + p_2y = R. \end{cases}$$

Отсюда можно сделать вывод, что:

1) точка спроса лежит на границе бюджетного множества;
2) в этой точке вектор предельных полезностей пропорционален вектору цен.

Определение 6.45. Координаты точки спроса есть функции параметров p_1, p_2, R. Они называются *функциями спроса на первый и второй товары* соответственно:

$$x^0 = x^0(p_1, p_2, R), \quad y^0 = y^0(p_1, p_2, R).$$

Это однородные функции нулевой степени относительно цен и дохода, т.е. пропорциональное изменение цен и дохода не влечёт изменения спроса на товары:

$$x^0(tp_1, tp_2, tR) = t^0 x^0(p_1, p_2, R) = x^0(p_1, p_2, R),$$
$$y^0(tp_1, tp_2, tR) = t^0 y^0(p_1, p_2, R) = y^0(p_1, p_2, R).$$

Пример 6.20. Найти точку спроса для функции полезности $u(x, y)$ при ценах на товары p_1 и p_2 и доходе R, если:

а) $u(x, y) = \min\{x, 2y\}$;

б) $u(x, y) = \sqrt{x}\sqrt{y}$.

Р е ш е н и е. а) Функция $u(x, y) = \min\{x, 2y\}$ означает, что излишки первого и второго товаров сверх отношения $2 : 1$ не приносят пользы потребителю. Он получает бóльшую пользу только при увеличении потребления обоих товаров в пределах сохранения пропорции $2 : 1$. Товары с такой функцией полезности называются *взаимодополняемыми*. Составляем и решаем систему для нахождения точки спроса (x^0, y^0):

$$\begin{cases} p_1 x + p_2 y = R, \\ x = 2y, \end{cases} \qquad x^0 = \frac{R}{2p_1 + p_2}, \quad y^0 = \frac{2R}{2p_1 + p_2}.$$

б) Рассмотрим систему уравнений для поиска точки спроса:

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x + p_2 y = R, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x + p_2 y = R, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x + p_2 y = R. \end{cases}$$

Видно, что $x^0 = \dfrac{R}{2p_1}$, $y^0 = \dfrac{R}{2p_2}$. □

Глава 7

Дифференциальные уравнения

7.1. Дифференциальные уравнения первого порядка
7.2. Решение уравнений первого порядка
7.3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

7.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

7.1.1. Общее дифференциальное уравнение первого порядка
7.1.2. Составление дифференциальных уравнений
7.1.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

7.1.1. Общее дифференциальное уравнение первого порядка

Многие процессы физики, химии, астрономии, биологии, экологии, экономики описываются некоторой зависимостью от независимой переменной x, функции $y = y(x)$ и ее производных, например скорости, ускорения, темпа роста. Тогда возникают математические модели процессов, описываемые дифференциальными уравнениями или их системами.

Пусть некоторый процесс описывается функцией $y = y(x)$, заданной и дифференцируемой на некотором интервале (a, b). Эта функция неизвестна, но известна функциональная зависимость между независимой переменной x, $y(x)$ и ее производной $y'(x)$. Такая зависимость определяет дифференциальное уравнение.

Определение 7.1. *Дифференциальным уравнением (ДУ) первого порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0,$$

где F — заданная функция трех переменных x, y, y'; x — аргумент; $y = y(x)$ — искомая функция; $y' = y'(x)$ — ее производная.

Определение 7.2. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y), \tag{7.1}$$

где f — заданная функция двух переменных x, y, называется *разрешенным относительно* y'.

Дифференциальное уравнение (7.1) считается заданным в некоторой области D, если в этой области задана функция $f(x, y)$.

Определение 7.3. Уравнение

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0,$$

где x, y имеют тот же смысл, что и выше; dx, dy — дифференциалы; $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — заданные функции, называется *уравнением, записанным в дифференциалах*.

В теории дифференциальных уравнений y можно принять за аргумент, $x(y)$ — за функцию; dy, $dx = x'(y)\,d(y)$ — соответственно за дифференциалы.

Определение 7.4. *Решением ДУ* называется такая заданная и дифференцируемая на некотором интервале (a, b) функция $y = y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество при допустимых значениях x, например $F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0$ или $y'(x) \equiv f(x, y(x))$.

Процесс нахождения всех решений ДУ называется *интегрированием ДУ*. График решения $y = y(x)$ ДУ называется *интегральной кривой этого уравнения*.

Пример 7.1. Проинтегрировать простейшее ДУ $y' = f(x)$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x)\,dx \Rightarrow \int dy = \int f(x)\,dx \Rightarrow y = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — первообразная (неопределенный интеграл) функции $f(x)$; C — произвольная постоянная. □

Приведенный пример показывает, что решение ДУ представляет собой целое семейство функций, зависящее от произвольного параметра C.

Определение 7.5. *Задачей Коши* или *начальной задачей* называют задачу нахождения решения $y = y(x)$ уравнения (7.1), удовлетворяющего *начальному условию*

$$y(x_0) = y_0. \tag{7.2}$$

Геометрический смысл задачи Коши состоит в том, что ищется интегральная кривая уравнения (7.1), проходящая через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости Oxy (рис. 7.1).

Для дифференциальных уравнений важное значение имеет вопрос о существовании решения задачи Коши и единственность этого решения.

Теорема 7.1 (Коши). *Если правая часть уравнения (7.1) непрерывна и имеет непрерывную производную $\frac{df}{dy}$ в области D, то решение ДУ (7.1) с начальным условием (7.2), где $(x_0, y_0) \in D$, существует и единственно, т.е. через точку $(x_0, y_0) \in D$ проходит единственная интегральная кривая данного уравнения.*

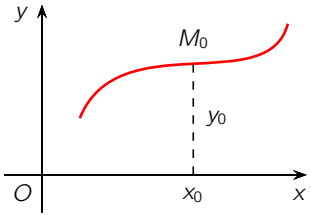

Рис. 7.1

Определение 7.6. Если во всех точках решения $y = \psi(x)$ уравнения (7.1) условие единственности не выполняется, то такое решение называется *особым*.

Через каждую точку $M_0(x_0, y_0)$ графика особого решения кроме этого решения проходит и другое решение уравнения (7.1), которое не совпадает с $y = \psi(x)$ в сколь угодно малой окрестности этой точки.

Для существования особого решения уравнения (7.1) необходимо, чтобы не выполнялись условия теоремы Коши.

Пример 7.2. Исследовать решение уравнения $y = 3y^{2/3}$.

Р е ш е н и е. Правая часть этого уравнения $f(x, y) = 3y^{2/3}$ определена и непрерывна во всех точках плоскости Oxy. Частная производная

$$\frac{df}{dy} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$$

обращается в бесконечность при $y = 0$, т.е. на оси Ox, так что при $y = 0$ нарушается одно из условий теоремы Коши.

Следовательно, в точках оси Ox возможно нарушение единственности. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что функция $y = (x + C)^3$ (семейство кубических парабол) есть решение уравнения. Кроме того, данное уравнение имеет очевидное решение $y \equiv 0$ (рис. 7.2), которое нельзя получить из $y = (x + C)^3$ ни при каком значении C.

Таким образом, через каждую точку оси Ox проходят по крайней мере две интегральные кривые, следовательно, в точках этой оси нарушается единственность, т.е. $y = 0$ — особое решение исходного уравнения.

□

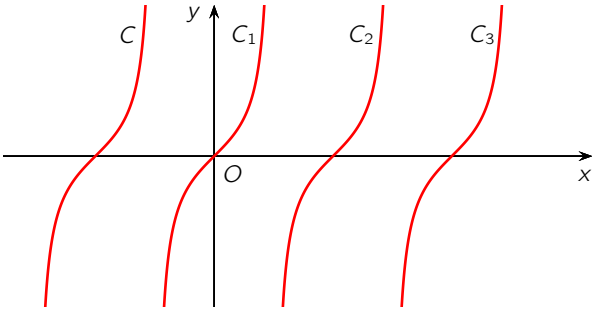

Рис. 7.2

Определение 7.7. *Общим решением ДУ* (7.1) называется функция

$$y = \varphi(x, C), \tag{7.3}$$

зависящая от одной произвольной постоянной C и такая, что выполняются условия:

1) она удовлетворяет уравнению (7.1) при любых допустимых значениях постоянной C;
2) каково бы ни было начальное условие (7.2), можно подобрать такое значение C_0 постоянной C, что решение $y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять заданному начальному условию (7.2).

При этом предполагается, что точка (x_0, y_0) принадлежит области D, где выполняются условия существования и единственности решения задачи Коши (7.1), (7.2).

Определение 7.8. *Частным решением ДУ* (7.1) называется решение, получаемое из общего решения (7.3) при каком-либо определенном значении произвольной постоянной C.

Пример 7.3. Проверить, является ли функция $y = Ce^x$ общим решением уравнения $y' - y = 0$, и найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = -1$.

Р е ш е н и е. Имеем: $y = Ce^x$ и $y' = Ce^x$. Подставляя в данное уравнение выражения y и y', получаем $Ce^x - Ce^x \equiv 0$, т.е. функция $y = Ce^x$ удовлетворяет данному уравнению при любых значениях постоянной C.

Зададим любое начальное условие $y(x_0) = y_0$. Подставляя в функцию $y = Ce^x$, будем иметь $y_0 = Ce^{x_0}$, откуда $C = y_0 e^{-x_0}$. Функция $y = y_0 e^{x-x_0}$ удовлетворяет данному начальному условию, поэтому функция $y = Ce^x$ — общее решение данного уравнения.

При $x_0 = 1$ и $y_0 = -1$ получим частное решение $y = -e^{x-1}$.

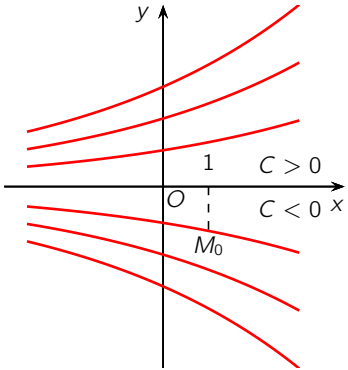

Рис. 7.3

С геометрической точки зрения общее решение определяет семейство интегральных кривых, которыми являются графики показательных функций; частное решение есть интегральная кривая, проходящая через точку $M_0(1, -1)$ (рис. 7.3). □

Иногда общее решение ДУ в виде (7.3) найти нелегко. В связи с этим введем следующее определение.

Определение 7.9. Соотношение вида $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно определяющее общее решение, называется *общим интегралом* ДУ первого порядка; соотношение, получаемое из общего интеграла при конкретном значении постоянной C, называется *частным интегралом* ДУ первого порядка.

7.1.2. Составление дифференциальных уравнений

К составлению и интегрированию ДУ приводят многие задачи математики и других наук — физики, биологии, химии, экономики и т.д.

В экономике ДУ часто может быть составлено исходя из экономического смысла производной. В качестве примера рассмотрим динамику рыночных цен (*макромодель Домара*), где независимой переменной служит время t. Допустим, что для конкретного продукта функции спроса Q_d и предложения Q_s имеют следующий вид:

$$Q_d = \alpha - \beta P, \quad Q_s = -\gamma + \delta P, \tag{7.4}$$

где α, β, γ, δ — некоторые положительные постоянные; $P = P(t)$ — цена продукта.

Цена равновесия $\overline{P}$ находится из условия $Q_d = Q_s$ и будет равна конкретной положительной постоянной: $\overline{P} = (\alpha + \gamma)/(\beta + \delta)$.

Если случится, что начальная цена $P(0)$ точно равна $\overline{P}$, то очевидно, что рынок находится в положении равновесия и динамический анализ не нужен. В более интересном случае $P(0) \neq \overline{P}$. Если $\overline{P}$ будет достижимой, то только после соответствующего процесса приспособления, во время которого меняется не только цена, но и Q_d, Q_s как функции P, причем все эти переменные можно трактовать как функции времени. Поставим вопрос, который касается динамики цен, так: пусть есть достаточно времени на то, чтобы произошел процесс приспособления; будет ли цена $P(t)$ со временем приведена к цене равновесия, т.е. будет ли $P(t)$ стремиться к $\overline{P}$, когда $t \to \infty$?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно сначала найти $P(t)$. Последнее, в свою очередь, требует описания структуры изменения цен. Вообще говоря, цены определяются через релятивное воздействие сил спроса и предложения на рынке. Для простоты допустим, что уровень (скорость) изменения цены (относительно времени) в каждый момент времени прямо пропорционален разности $Q_d - Q_s$ в этот момент. Такая структура изменения цены может быть выражена следующим образом:

$$\frac{dP}{dt} = j(Q_d - Q_s), \tag{7.5}$$

где j — некоторый установленный положительный множитель (коэффициент) приспособления.

Подставим выражение (7.4) в формулу (7.5) и получим:

$$\frac{dP}{dt} = j(\alpha - \beta P + \gamma - \delta P) = j(\alpha + \gamma) - j(\beta\,\delta)P,$$

или

$$\frac{dP}{dt} + j(\beta + \delta)P = j(\alpha + \gamma). \tag{7.6}$$

Уравнение (7.6) и есть ДУ для цены продукта $P(t)$ в макромодели Домара. Решение уравнения (7.6) и его анализ будут приведены после изложения методов интегрирования ДУ первого порядка.

7.1.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим ДУ первого порядка, записанное в дифференциалах:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \tag{7.7}$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ — заданные функции двух переменных x и y.

Определение 7.10. Пусть $P(x,y) = P_1(x)$, $Q(x,y) = Q_2(y)$, тогда уравнение (7.7) называют *ДУ с разделенными переменными*.

Интегрируя, получаем общее решение

$$\int P_1(x)\,dx + \int Q_2(y)\,dy = C,$$

т.е. ДУ с разделенными переменными решается простым интегрированием.

Определение 7.11. Дифференциальное уравнение первого порядка (7.1) или (7.7) называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если его можно представить в виде

$$y' = f_1(x)\,f_2(y)$$

или

$$P_1(x)P_2(y)\,dx + Q_1(x)Q_2(y)\,dy = 0.$$

Разделив это уравнение на $P_2(y)Q_1(x) \neq 0$, тем самым сведем его к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,dx + \int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\,dy = C.$$

При таком преобразовании можно потерять решения $x = x_0$, где $Q_1(x_0) = 0$, и $y = y_0$, где $P_2(y_0) = 0$. Эти случаи нужно рассматривать отдельно. А именно: найти x_k и y_m такие, что $Q_1(x_k) = 0$, $P_2(y_m) = 0$, и проверить, являются ли $x = x_k$ и $y = y_m$ решениями исходного уравнения и содержатся ли они в общем интеграле при каком-либо значении C_k и C_m соответственно.

Пример 7.4. Решить уравнение $x(1+y^2)\,dx + y(1+x^2)\,dy = 0$.

Р е ш е н и е. Разделим данное уравнение на $(1+x^2)(1+y^2)$. Переменные разделяются:

$$\frac{2x\,dx}{1+x^2} + \frac{2y\,dy}{y^2+1} = 0, \quad \ln(x^2+1) + \ln(y^2+1) = \ln C.$$

Значит, $(x^2+1)(y^2+1) = C$ — общий интеграл данного уравнения.

Функции $Q_1(x) = 1+x^2$ и $Q_2(y) = y^2+1$ при вещественных x и y в нуль не обращаются. Поэтому полученная формула содержит все решения рассматриваемого уравнения. □

7.2. Решение уравнений первого порядка

7.2.1. Однородные уравнения
7.2.2. Линейные уравнения
7.2.3. Уравнение Бернулли

7.2.1. Однородные уравнения

Определение 7.12. Функция $P(x, y)$ называется *однородной степени* m, если для любого t она удовлетворяет равенству

$$P(tx, ty) = t^m P(x, y).$$

Пример 7.5. Проверить на однородность следующие функции:

$$P_1(x, y) = 2x^2 + 3y^2, \qquad P_2(x, y) = \frac{x^3}{2y} - 3xy,$$

$$P_3(x, y) = \frac{xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}, \qquad P_4(x, y) = e^{xy}.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $P_1(x, y)$:

$$P_1(tx, ty) = 2(t^2x^2) + 3(t^2y^2) = t^2 P_1(x, y).$$

Аналогично

$$P_2(tx, ty) = t^2 P_2(x, y),$$

$$P_3(tx, ty) = \frac{txty + t^2y^2 e^{-\frac{tx}{ty}}}{t^2x^2} = P_3(x, y),$$

$$P_4(tx, ty) = e^{txty} = (e^{xy})^{t^2} = (P_4(x, y))^{t^2} \neq t^m P_4(x, y)$$

ни при каком m. Значит, $P_1(x, y), P_2(x, y)$ — однородные функции степени $m = 2$; $P_3(x, y)$ — однородная функция степени $m = 0$; $P_4(x, y)$ — неоднородная функция. □

Определение 7.13. Дифференциальное уравнение (7.7) называют *однородным*, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции одной степени.

Отметим также, что однородное уравнение можно записать в виде

$$y' = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ — однородная функция нулевой степени.

Однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $y = ux$, где u — новая искомая функция. Действительно, положив $t = 1/x$ $(x \neq 0)$, будем иметь:

$$P\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^m} P(x, y), \quad Q\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^m} Q(x, y).$$

Получим уравнение

$$P\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + Q\left(1, \frac{y}{x}\right) dy = 0,$$

или

$$P_1\left(\frac{y}{x}\right) dx + Q_1\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0.$$

Учитывая $dy = u\,dx + x\,du$, имеем уравнение

$$P_1(u)\,dx + Q_1(u)(u\,dx + x\,du) = 0,$$

или

$$(P_1(u) + uQ_1(u))\,dx + xQ_1(u)\,du = 0,$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными.

Пример 7.6. Проинтегрировать уравнение $y' = \dfrac{xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$.

Р е ш е н и е. Несложно проверить, что данное уравнение является однородным. Положим $y = xu$. Тогда

$$u + xu' = u + u^2 e^{-\frac{1}{u}}.$$

Интегрируя, получаем:

$$-e^{\frac{1}{u}} = \ln|x| - C,$$

т.е. $e^{\frac{x}{y}} + \ln|x| = C$ — общий интеграл этого уравнения. □

Замечание 7.1. К однородным уравнениям сводятся также уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + a_2y + c_1}{b_1x + b_2y + c_2}\right) \tag{7.8}$$

при

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для сведéния уравнения (7.8) к однородному нужно решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = -c_1, \\ b_1x + b_2y = -c_2. \end{cases}$$

Если ее решение (x_0, y_0), то, выполнив преобразование $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$, получим однородное уравнение

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + a_2Y}{b_1X + b_2Y}\right).$$

7.2.2. Линейные уравнения

Определение 7.14. Уравнения, которые можно записать в виде

$$y' + p(x)y = q(x)$$

или

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y),$$

называются *линейными*, первое — относительно y, $\frac{dy}{dx}$, а второе — относительно x, $\frac{dx}{dy}$.

Если $q(x) \equiv 0$ ($q(y) \equiv 0$), то уравнение называется *линейным однородным*, если $q(x) \neq 0 \quad (q(y) \neq 0)$, — *линейным неоднородным*.

Линейное однородное уравнение — это уравнение с разделяющимися переменными.

Вначале рассмотрим решение линейного однородного уравнения

$$y' + p(x)y = 0. \tag{7.9}$$

Имеем:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + p(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} + \int p(x)\,dx = C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| + \int p(x)\,dx = \ln|C| \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)\,dx} = C\overline{y}, \tag{7.10}$$

где

$$\overline{y} = e^{-\int p(x)\,dx}; \quad C \neq 0.$$

Поскольку $y = 0$ — также решение уравнения (7.9), то формула (7.10) будет давать все решения (в данном случае — общее решение) уравнения (7.9), если считать параметр C произвольным.

Для решения линейного неоднородного уравнения

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{7.11}$$

применим метод Лагранжа. Решение уравнения ищем в виде, подобном решению однородного уравнения

$$y = C(x)\overline{y}, \tag{7.12}$$

где $C(x)$ — неизвестная функция; $\overline{y} = \overline{y}(x)$ — решение однородного уравнения $y' + p(x)y = 0$. Подставляя (7.12) в (7.11), имеем:

$$C'(x)\overline{y} + \underbrace{C(x)\overline{y}' + C(x)p(x)\overline{y}}_{\Downarrow\ C(x)[\overline{y}'+p(x)\overline{y}]=0} = q(x).$$

Значит,

$$C'(x)\overline{y} = q(x) \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx} = \frac{q(x)}{\overline{y}} \Rightarrow C(x) = \int \frac{q(x)}{\overline{y}}\,dx + C.$$

Подставляя найденную функцию $C(x)$ в (7.12), получаем:

$$y = C\overline{y} + \overline{y}\int \frac{q(x)}{\overline{y}}\,dx.$$

Последняя формула называется *формулой Бернулли*.

Пример 7.7. Решить уравнение $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\overline{y} = e^{-\int \cos x\,dx} = e^{-\sin x},\ C'(x)e^{-\sin x} = e^{-\sin x} \Rightarrow C'(x) = 1,$$

т.е. $C(x) = x + C$.

Общее решение:

$$y = (x + C)e^{-\sin x}. \qquad \square$$

Пример 7.8. Решить уравнение (7.6)

$$\frac{dP}{dt} + j(\beta + \delta)P = j(\alpha + \gamma).$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$P(t) = \left(P(0) - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right) e^{-j(\beta+\delta)t} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \left(P(0) - \overline{P}\right) e^{-kt} + \overline{P},$$

где

$$k = j(\beta+\delta); \quad \overline{P} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}.$$

Геометрический смысл решения показан на рис. 7.4. □

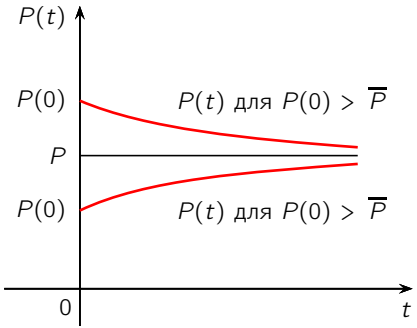

Рис. 7.4

Отметим, что линейные уравнения можно решить также методом Бернулли, представляя искомое решение в виде произведения двух дифференцируемых функций $y(x) = u(x)\,v(x)$. Этот прием будет продемонстрирован ниже при решении уравнения Бернулли.

7.2.3. Уравнение Бернулли

Определение 7.15. *Уравнением Бернулли* называют нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \tag{7.13}$$

где α, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, — произвольное вещественное число.

Подстановка $y = u^{1-\alpha}$ приводит уравнение (7.13) к линейному неоднородному уравнению. Это уравнение можно решать также подстановкой $y(x) = u(x)v(x)$. Тогда, записав его в виде

$$u'v + (v' + p(x)v)u = q(x)u^{\alpha}v^{\alpha},$$

решим два уравнения с разделяющимися переменными:

1) $v' + p(x)v = 0$ (берем только одно решение $v \neq 0$);
2) $u' = q(x)u^{\alpha}v^{\alpha-1}$ (берем его общее решение).

Подставляя их в соотношение $y(x) = u(x)v(x)$, получаем общее решение уравнения Бернулли.

Пример 7.9. Решить уравнение $xy' + y = y^2 \ln x$.

Р е ш е н и е. Это уравнение Бернулли. Полагаем $y = uv$. Тогда уравнение запишется так:

$$xuv' + v(xu' + u) = u^2v^2 \ln x.$$

Из $xu' + u = 0$ имеем $u = \dfrac{1}{x}$, а из

$$xv' = \frac{v^2 \ln x}{x}, \quad \frac{dv}{v^2} = \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

получим:

$$v = \frac{x}{1 + Cx + \ln x}.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$y = uv = \frac{1}{1 + Cx + \ln x}.$$

□

7.3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

7.3.1. Уравнения второго порядка. Общие понятия
7.3.2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами
7.3.3. Метод Эйлера решения однородного уравнения
7.3.4. Решение неоднородного уравнения. Метод вариации произвольных постоянных
7.3.5. Метод нахождения частного решения неоднородного уравнения со специальной правой частью
7.3.6. Приложение уравнений второго порядка в экономике

7.3.1. Уравнения второго порядка. Общие понятия

Определение 7.16. Уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

где F — заданная функция четырех переменных x, y, y', y''; x — аргумент; $y = y(x)$ — искомая функция, называется *дифференциальным уравнением второго порядка*.

Будем рассматривать уравнения, которые можно записать в виде, разрешенном относительно второй производной

$$y'' = f(x, y', y''). \tag{7.14}$$

Определение 7.17. *Решением уравнения* (7.14) называется функция, определенная на некотором интервале (a, b), непрерывная и имеющая непрерывные производные до второго порядка включительно, которая обращает это уравнение в тождество на (a, b). График решения называется *интегральной кривой*.

Имеет место теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения второго порядка.

Теорема 7.2 (Коши). *Пусть функция $f(x, y', y'')$ и ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial y'}$ непрерывны в некоторой области D. Тогда для любой внутренней точки $M_0(x_0, y_0, y'_0)$ этой области существует единственное решение уравнения* (7.14)*, удовлетворяющее начальным условиям*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \tag{7.15}$$

Геометрический смысл теоремы Коши состоит в том, что через заданную точку (x_0, y_0) на координатной плоскости Oxy проходит единственная кривая с заданным угловым коэффициентом касательной.

Определение 7.18. *Задачей Коши* называют задачу отыскания решения уравнения (7.14) по заданным начальным условиям (7.15).

Определение 7.19. *Общим решением уравнения* (7.14) в некоторой области D называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, если она является решением этого уравнения при любых постоянных величинах C_1 и C_2, которые могут быть определены единственным образом при заданных начальных условиях (7.15).

Определение 7.20. *Частным решением уравнения* (7.14) называют общее решение этого уравнения при фиксированных значениях постоянных.

7.3.2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Определение 7.21. Уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{7.16}$$

где p, q — действительные числа; $f(x)$ — некоторая функция, называется *линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*.

Определение 7.22. Если $f(x) = 0$, то уравнение

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{7.17}$$

называется *однородным*. Уравнение (7.16) — *неоднородное*.

Изучим сначала решение однородного уравнения.

Теорема 7.3. *Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два частных решения однородного уравнения (7.17), то их линейная комбинация*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{7.18}$$

где C_1, C_2 — некоторые константы, также является частным решением этого уравнения. [Доказательство]

Иными словами, формула (7.18) дает способ построения новых решений уравнения (7.17) из уже имеющихся. Возникает вопрос: как построить общее решение однородного уравнения?

Определение 7.23. Два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (7.17) называются *линейно независимыми* на интервале (a, b), если

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv \text{const};$$

в противном случае эти решения называются *линейно зависимыми*.

Если хотя бы одно из решений ($y_1(x)$ или $y_2(x)$) тождественно равно нулю на рассматриваемом интервале, то эти решения будут линейно зависимыми.

Теорема 7.4. *Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два линейно независимых частных решения уравнения (7.17), то общее решение этого уравнения является их линейной комбинацией.*

7.3.3. Метод Эйлера решения однородного уравнения

Будем искать решения уравнения (7.17) в виде

$$y(x) = e^{\lambda x},$$

где λ — некоторое число. Подставив эту функцию в уравнение (7.17), получим:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0.$$

Поскольку $e^{\lambda x} \neq 0$, то

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{7.19}$$

Определение 7.24. Уравнение (7.19) называется *характеристическим* для дифференциального уравнения (7.17).

Теорема 7.5. *Если число λ — действительный корень характеристического уравнения (7.19), то функция $y = e^{\lambda x}$ является решением уравнения (7.17).*

Вид решения уравнения (7.17) существенно зависит от того, какие корни имеет характеристическое уравнение.

Пусть характеристическое уравнение (7.19) уравнения (7.17) имеет действительные корни $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тогда общее решение уравнения (7.17) задается формулой

$$y_* = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{7.20}$$

Если характеристическое уравнение (7.19) имеет один корень λ (кратности 2), то общее решение уравнения (7.17) задается формулой

$$y_* = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}. \tag{7.21}$$

Если характеристическое уравнение (7.19) не имеет действительных корней, то общее решение уравнения (7.17) задается формулой

$$y_* = C_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin\beta x, \tag{7.22}$$

где C_1, C_2 — произвольные константы; $\alpha = -\dfrac{p}{2}$; $\beta = \dfrac{\sqrt{-D}}{2}$.

Замечание 7.2. Задача нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка ($n > 2$) с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0,$$

где p_i — некоторые числа, может быть решена аналогично рассмотренному случаю.

Соответствующее характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0.$$

Если все корни этого характеристического уравнения действительные и простые, то общее решение запишется в виде

$$y_* = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Пусть все корни этого характеристического уравнения действительные, но не все простые (есть корни, имеющие кратность $m > 1$). Тогда каждому корню λ кратности $m > 1$ соответствует m частных решений:

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2 e^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{m-1} e^{\lambda x}.$$

Поэтому если, например, характеристическое уравнение имеет корни λ_1, λ_2, причем корень λ_1 — простой, а λ_2 имеет кратность $m > 1$, то общее решение запишется в виде

$$y_* = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 x e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_{m+1} x^{m-1} e^{\lambda_2 x}.$$

7.3.4. Решение неоднородного уравнения. Метод вариации произвольных постоянных

Перейдем теперь к решению линейного неоднородного уравнения (7.16). Оно может быть решено методом вариации произвольных постоянных, который состоит в следующем.

Сначала находится общее решение

$$y_* = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

соответствующего однородного уравнения, затем решение исходного неоднородного уравнения ищется в виде

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x), \tag{7.23}$$

т.е. предполагается, что постоянные C_1 и C_2 являются неизвестными функциями независимой переменной x (говорят, что переменные варьируются, изменяются).

Найдем производную:

$$y' = C_1'(x) y_1(x) + C_1(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_2(x) y_2'(x).$$

Подберем функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ так, чтобы

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} y' &= C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x), \\ y'' &= C_1'(x) y_1'(x) + C_1(x) y_1''(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x). \end{aligned}$$

Подставляя выражения для y, y', y'' в исходное уравнение (7.16), получаем:

$$\begin{aligned} &C_1'(x) y_1'(x) + C_1(x) y_1''(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x) + \\ &\quad + p\big(C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x)\big) + q\big(C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)\big) = f(x) \end{aligned}$$

или

$$C_1(x)\big(y_1''(x)+py_1'(x)+qy_1(x)\big)+C_2(x)\big(y_2''(x)+py_2'(x)+qy_2(x)\big)+ \\ +C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x).$$

Поскольку $y_1(x)$, $y_2(x)$ — решения однородного уравнения, то выражения в скобках равны нулю, а потому

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x).$$

Окончательно заключаем, что функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ найдутся как решение системы

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0, \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'y_2'(x)=f(x), \end{cases}$$

из которой они определяются однозначно. Проинтегрировав полученные функции, найдем $C_1(x)$ и $C_2(x)$, а затем по формуле (7.23) найдем и решение неоднородного уравнения (7.16).

Теорема 7.6 (о структуре общего решения неоднородного уравнения). *Общее решение неоднородного уравнения (7.16) есть сумма любого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.*

Исходя из приведенной теоремы, остается рассмотреть вопрос о нахождении частного решения, так как общее решение однородного уравнения мы находить умеем.

7.3.5. Метод нахождения частного решения неоднородного уравнения со специальной правой частью

Решение неоднородных уравнений методом вариации произвольных постоянных часто приводит к необходимости вычисления достаточно сложных интегралов. Поэтому в некоторых случаях удобно отыскивать частное решение неоднородного уравнения другим способом, не прибегая к нахождению интегралов. Перечислим эти случаи.

1. Пусть правая часть имеет вид

$$f(x) = P_n(x),$$

где $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен степени n. Тогда частное решение можно искать в виде

$$\varphi(x) = \overline{P}_n(x)x^r,$$

где $\overline{P}_n(x)$ — многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, но с неопределенными коэффициентами; r — число корней характеристического уравнения, равных нулю.

2. Пусть правая часть уравнения (7.16) имеет вид

$$f(x) = P_n(x)e^{\gamma x},$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n. Тогда частное решение следует искать в виде

$$\varphi(x) = \overline{P}_n(x)e^{\gamma x}x^r,$$

где $\overline{P}_n(x)$ — многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, но с неопределенными коэффициентами; r — число корней характеристического уравнения, равных γ.

3. Пусть правая часть уравнения (7.16) имеет вид

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x + Q_m(x)e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно.

Обозначим $l = \max\{m, n\}$. Положим $r = 1$, если дискриминант характеристического уравнения отрицателен и при этом одновременно выполняются равенства $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$ (см. формулу (7.22)). В противном случае $r = 0$. Тогда частное решение следует искать в виде

$$\varphi(x) = x^r e^{\alpha_1 x}\big(\overline{P}_l(x)\cos\beta_1 x + \overline{Q}_l(x)\sin\beta_1 x\big),$$

где $\overline{P}_l(x)$, $\overline{Q}_l(x)$ — многочлены степени l с неопределенными коэффициентами.

Теорема 7.7 (принцип суперпозиции решений). *Если $\varphi_1(x)$ — частное решение уравнения*

$$y'' + py' + qy = f_1(x),$$

а $\varphi_2(x)$ — частное решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f_2(x),$$

то сумма $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ является частным решением уравнения

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$$

Пример 7.10. Найти общее решение уравнения

$$y'' - y' = 2x + 6e^{2x}.$$

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \lambda = 0.$$

Найдем его корни: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_* = C_1 + C_2 e^x.$$

Рассмотрим уравнение

$$y'' - y' = 2x. \tag{7.24}$$

Его частное решение ищем в виде (первый из рассмотренных случаев специальной правой части)

$$\varphi_1(x) = Ax^2 + Bx.$$

Для нахождения A и B найдем производные:

$$\varphi_1'(x) = 2Ax + B, \quad \varphi_1''(x) = 2A$$

и подставим в уравнение (7.24):

$$2A - 2Ax - B = 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем: $A = -1$, $B = -2$. Значит,

$$\varphi_1(x) = -x^2 - 2x.$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$y'' - y' = 6e^{2x}.$$

Его частное решение ищем в виде (второй из рассмотренных случаев специальной правой части) $\varphi_2(x) = Ae^{2x}$. Поступая аналогичным образом, находим: $A = 3$, т.е.

$$\varphi_2(x) = 3e^{2x}.$$

На основании теоремы 7.6 и принципа суперпозиции заключаем, что общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = y_* + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = C_1 + C_2e^x - x^2 - 2x + 3e^{2x}.$$ □

7.3.6. Приложение уравнений второго порядка в экономике

Теория дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами находит приложение и в построении экономических моделей.

Рассмотрим модель рынка с прогнозируемыми ценами. В простых моделях обычно полагают, что спрос и предложение зависят только от текущей цены товара. Но они зависят также и от тенденции ценообразования, и от темпов изменения цены. В моделях эти характеристики описываются соответственно первой и второй производными функции цены $P(t)$.

Пусть функции спроса D и предложения S имеют следующие зависимости от цены P и ее производных:

$$D(t) = 3P'' - P' - 2P + 18,$$
$$S(t) = 4P'' + P' + 3P + 3.$$

Спрос «подогревается» темпом изменения цены (если темп роста цены растет, т.е. $P'' > 0$, то рынок увеличивает интерес к товару, и наоборот), а быстрый рост цены отпугивает покупателей. Поэтому слагаемое с первой производной цены входит в функцию $D(t)$ со знаком «$-$».

Предложение еще в большей мере усиливается темпом изменения цены, поэтому коэффициент при P'' в функции $S(t)$ больше, чем в $D(t)$. Рост цены также увеличивает предложение, поэтому слагаемое, содержащее P', входит в $S(t)$ со знаком «$+$».

Требуется установить зависимость цены от времени. Поскольку рыночное равновесие определяется равенством $D = S$, получим:

$$P'' + 2P' + 5P = 15.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $P(t)$. Его общее решение дается формулой

$$P(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 3.$$

Отметим, что частное решение $P(t) = 3$ исследуемого уравнения можно рассматривать как установившуюся цену. При $t \to \infty$ $P(t) \to 3$, т.е. все интегральные кривые имеют горизонтальную асимптоту $P = 3$ и колеблются около нее.

Глава 8

Ряды

8.1. Числовые ряды
8.2. Функциональные ряды

8.1. Числовые ряды

8.1.1. Понятие числового ряда
8.1.2. Необходимое условие сходимости числового ряда
8.1.3. Достаточные условия сходимости
8.1.4. Абсолютная и условная сходимость
8.1.5. Приложения рядов в экономике

8.1.1. Понятие числового ряда

Пусть $\{a_n\}$ — числовая последовательность, $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 8.1. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{8.1}$$

называется *числовым рядом*. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами ряда*, а a_n — *n-м* или *общим членом ряда* (8.1).

Определение 8.2. Сумма первых n членов ряда (8.1) называется *n-й частичной суммой ряда* и обозначается S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Будем иметь:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots,$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad \ldots .$$

Получим последовательность частичных сумм ряда (8.1)

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots .$$

Определение 8.3. Если последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ имеет конечный предел S, то числовой ряд (8.1) называется *сходящимся*, а число S — *суммой ряда*:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

т.е.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если же предел последовательности $\{S_n\}$ не существует или бесконечен, то ряд (8.1) называется *расходящимся*.

Пример 8.1. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad q \in \mathbb{R}.$$

Р е ш е н и е. Составим n-ю частичную сумму:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}.$$

Легко найти, что

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \lim_{n\to\infty} (1 - q^n).$$

Если $|q| < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} (1 - q^n) = 1,$$

а сумма

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1 - q},$$

т.е.

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1.$$

Мы получили известную формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Если $|q| > 1$ или $q = 1$, то очевидно, что последовательность $\{S_n\}$ является ББП, если же $q = -1$, то предел $\{S_n\}$ не существует. □

Определение 8.4. Выражение вида

$$a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots = \sum_{k=i+1}^{\infty} a_k \tag{8.2}$$

также представляет собой ряд, и он называется *i-м остатком ряда* (8.1). Обозначается r_i.

Теорема 8.1. *Числовой ряд и любой его остаток сходятся или расходятся одновременно.*

[Доказательство]

Из теоремы 8.1 следует, что сходимость ряда не нарушается, если изменить конечное число его членов. Заметим также, что если ряд (8.1) сходится, то

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \text{ или } S = S_n + r_n, \tag{8.3}$$

где S_n — частичная сумма ряда (8.1); r_n — его n-й остаток.

Теорема 8.2. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} C a_n, \quad C = \text{const},$$

причем $CS = \sum_{n=1}^{\infty} C a_n$. *Если же сходятся ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

и их суммы равны соответственно S *и* σ, *то сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n).$$

Его сумма равна $S \pm \sigma$. [Доказательство]

Подчеркнем, что утверждение, обратное только что доказанному, вообще говоря, неверно. Например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-1)$$

сходится, а ряды $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)$ расходятся.

8.1.2. Необходимое условие сходимости числового ряда

Исследование сходимости ряда является важнейшей задачей теории числовых рядов.

Теорема 8.3 (необходимое условие сходимости). *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{8.4}$$

[Доказательство]

Итак, если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда следует, что если

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

или не существует, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

расходится. Однако подчеркнем, что условие (8.4) не является достаточным, т.е. если оно выполняется, то это не означает, что ряд сходится.

Пример 8.2. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \tag{8.5}$$

называемый *гармоническим*.

Р е ш е н и е. Очевидно, что необходимое условие сходимости числовых рядов выполняется:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Однако этот ряд расходится. Действительно, предположим противное. Пусть ряд (8.5) сходится и

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0. \tag{8.6}$$

В то же время,

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geqslant n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

что противоречит условию (8.6). Таким образом, гармонический ряд расходится. □

Пример 8.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$.

Р е ш е н и е. Проверим выполнение необходимого условия:

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1\neq 0,$$

т.е. данный ряд расходится. □

8.1.3. Достаточные условия сходимости

Вначале достаточные условия сходимости будем искать для рядов с неотрицательными членами, т.е. будем рассматривать ряды:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \quad a_n \geqslant 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8.7}$$

Теорема 8.4. *Для того чтобы ряд (8.7) сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной.* [Доказательство]

Теорема 8.5 (признак сравнения). *Пусть даны два ряда с неотрицательными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (A), \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (B)$$

и пусть $a_n \leqslant b_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. *Тогда из сходимости ряда (B) следует сходимость ряда (A), а из расходимости ряда (A) — расходимость ряда (B).*

Образно говоря, признак сравнения свидетельствует о том, что если сходится некоторый ряд с неотрицательными членами, то ряд с меньшими неотрицательными членами также сходится. Наоборот, если ряд с неотрицательными членами расходится, то ряд с бóльшими неотрицательными членами также расходится.

Пример 8.4. Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $0 < p \leqslant 1$.

Р е ш е н и е. Применим признак сравнения, воспользовавшись тем, что гармонический ряд (см. пример 8.2) расходится. Очевидно, что

$$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < p \leqslant 1,$$

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится. Поэтому расходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad 0 < p \leqslant 1. \qquad \square$$

Можно показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

при $p > 1$ сходится. Это объясняется тем, что при $p > 1$ общий член $a_n = 1/n^p$ стремится к нулю достаточно быстро.

Теорема 8.6 (признак Д'Аламбера). *Пусть дан ряд с неотрицательными числами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Тогда если $q < 1$, то ряд сходится, если $q > 1$, то ряд расходится. Если $q = 1$, то ряд может сходиться, а может и расходиться. [Доказательство]

Приведем без доказательства еще один признак.

Теорема 8.7 (признак Коши). *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

с неотрицательными членами и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Тогда если $q < 1$, то ряд сходится, если $q > 1$, то ряд расходится. Если $q = 1$, то ряд может сходиться, а может и расходиться.

В некоторых случаях удобно пользоваться следующим признаком.

Теорема 8.8 (интегральный признак). *Пусть функция f убывает и неотрицательна на $[1, +\infty)$. Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

и несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Пример 8.5. Исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{n+2}\right)^n$.

Р е ш е н и е. а) Применим признак Д'Аламбера. Имеем:

$$a_n = \frac{2^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Ряд сходится.

б) К данному ряду удобно применить признак Коши:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 2 > 1.$$

Ряд расходится. □

Приведенные выше достаточные условия сходимости относятся к рядам с неотрицательными членами. Теперь рассмотрим еще один тип рядов — знакочередующиеся ряды.

Определение 8.5. *Знакочередующимся рядом* называется ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \tag{8.8}$$

где $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 8.9 (признак Лейбница). *Если члены ряда (8.8) удовлетворяют условиям:*

1) $a_n \geqslant a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

то ряд (8.8) сходится и его сумма S не превосходит a_1, т.е. $S \leqslant a_1$.

Пример 8.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Р е ш е н и е. Данный ряд знакочередующийся. Он удовлетворяет условиям признака Лейбница, так как

$$a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1},\ n \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Значит, рассматриваемый ряд сходится. □

8.1.4. Абсолютная и условная сходимость

Рассмотрим теперь числовые ряды с членами произвольных знаков. Такие ряды называются *знакопеременными*.

Определение 8.6. Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Теорема 8.10. *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение 8.7. Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется *условно сходящимся*, если этот ряд сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

расходится.

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ является условно сходящимся.

Исследование знакопеременных рядов на абсолютную сходимость можно провести с помощью признаков Д'Аламбера, Коши и признаков сравнения, так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

является рядом с неотрицательными членами.

8.1.5. Приложения рядов в экономике

В экономике ряды и их суммы появляются в основном в теоретических исследованиях. Предположим, что рассматривается вопрос о рыночной цене бессрочной облигации номиналом 1000 ден. ед. и трехпроцентным купоном. Это значит, что владелец облигации будет каждый год получать 30 ден. ед. Но как определить истинную цену всей бесконечной последовательности платежей? Как правило, любая валюта подвержена инфляции. Если инфляция составляет 2% в год, то 30 ден. ед., которые получит владелец через год, сейчас эквивалентны $30/(1+0{,}02)$ ден. ед., а те же 30 ден. ед., которые он планирует получить через 2 года, сейчас эквиваленты $30/(1+0{,}02)^2$ ден. ед. и т.д.

Выходит, что бесконечный ряд платежей в 30 ден. ед. в год, которые владелец облигации будет получать каждый год в будущем, сейчас эквивалентны сумме ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{30}{(1+0{,}02)^n},$$

т.е. сумме бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Воспользовавшись формулой суммы, найдем, что все выплаты составят 1530 ден. ед.

Такого рода дисконтирование, т.е. нахождение сегодняшних эквивалентов будущих платежей, применяется и в других ситуациях.

Пусть, например, рассматриваются две стратегии действий фирмы в будущем. Для выяснения того, какая из них лучше, приходится дисконтировать к сегодняшнему моменту прибыли по каждой из стратегий. Сегодняшний эквивалент этих дисконтированных прибылей представляет собой сумму бесконечного ряда. Какая из этих сумм больше, ту стратегию, возможно, и стоит выбрать.

8.2. Функциональные ряды

8.2.1. Основные определения. Область сходимости
8.2.2. Степенные ряды
8.2.3. Разложение функций в степенные ряды
8.2.4. Разложение некоторых функций в ряд Маклорена

8.2.1. Основные определения. Область сходимости

Определение 8.8. Ряд вида

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \tag{8.9}$$

где $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, — некоторые функции аргумента x, заданные на множестве X, называется *функциональным рядом*, заданным на множестве X.

Если фиксировать какое-либо $x = x_0 \in X$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) \tag{8.10}$$

является числовым рядом.

Определение 8.9. Если числовой ряд (8.10) сходится, то говорят, что функциональный ряд (8.9) *сходится в точке* $x = x_0$. В противном случае функциональный ряд (8.9) *расходится в точке* $x = x_0$.

Определение 8.10. Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его *областью сходимости*.

Область сходимости может совпадать с множеством X, но может и не совпадать, в частности может быть пустым множеством.

Пусть D — область сходимости ряда (8.9). Тогда для каждого фиксированного $x \in D$ соответствующий числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

сходится и имеет сумму. Если каждому $x \in D$ поставить в соответствие число, равное этой сумме, то на множестве D будет определена некоторая функция $S = S(x)$, называемая *суммой функционального ряда* (8.9). Тогда записывают:

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots, \quad x \in D.$$

Пример 8.7. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Р е ш е н и е. В данном случае $f_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, \ldots$. Эти функции определены на $\mathbb{R}$. Из примера 8.1 следует, что функциональный ряд сходится в любой точке $x \in \mathbb{R}$, для которой $|x| < 1$. Если же $|x| \geqslant 1$, то соответствующий числовой ряд расходится. Таким образом, областью сходимости данного ряда является интервал $(-1, 1)$.

Очевидно, что суммой этого функционального ряда является функция

$$S(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1),$$

т.е.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1). \qquad \square$$

Определение 8.11. Функциональный ряд (8.9) называется *абсолютно сходящимся* на множестве D_1, если в каждой точке $x \in D_1$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Так как абсолютно сходящийся ряд сходится, то $D_1 \subset D$.

Образуем n-ю частичную сумму ряда (8.9):

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \ x \in D.$$

Очевидно, что если фиксировать $x = x_0$, $x_0 \in D$, то $\{S_n(x_0)\}$ есть числовая последовательность. Если существует конечный

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0),$$

то он равен $S(x_0)$. По определению предела это означает, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_0 \quad |S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon.$$

Подчеркнем, что здесь номер N_0 зависит, вообще говоря, и от ε, и от точки x_0. Особый интерес представляет случай, когда можно указать номер N_0 такой, что он зависит только от ε и не зависит от выбора точки x_0.

Определение 8.12. Говорят, что функциональный ряд (8.8) *равномерно сходится на множестве* D, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad \forall x \in D \quad |S_n - S| < \varepsilon.$$

Весьма удобным для исследования ряда на равномерную сходимость является следующий признак Вейерштрасса.

Теорема 8.11 (признак Вейерштрасса). *Если члены ряда удовлетворяют неравенствам*

$$|f_n(x)| \leqslant a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in D,$$

и числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, то ряд (8.9) равномерно сходится в D.

Пример 8.8. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}.$$

Р е ш е н и е. Очевидно, что

$$\left|\frac{\sin nx}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

сходится. Значит, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$. □

Если предположить, что члены ряда (8.9) являются функциями, непрерывными в его области сходимости D, то возникает вопрос: будет ли непрерывной его сумма $S(x)$ в D? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 8.12. *Если члены функционального ряда являются непрерывными в области D функциями и ряд (8.9) равномерно сходится в D, то его сумма является функцией, непрерывной в D.*

Например, сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$$

является функцией, непрерывной на $\mathbb{R}$.

8.2.2. Степенные ряды

Определение 8.13. Функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \tag{8.11}$$

где $c_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \ldots$; $a \in \mathbb{R}$, называется *степенным рядом*. Числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$ называются *коэффициентами степенного ряда* (8.11).

Если $a = 0$, то ряд (8.11) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{8.12}$$

Именно такие степенные ряды будем изучать.

Если в выражении (8.11) положить $x - a = y$, то придем к ряду вида (8.12).

Степенной ряд (8.12) всегда сходится в точке $x = 0$. Если $x \neq 0$, то ряд (8.12) может сходиться, а может и расходиться.

Важную роль в теории степенных рядов играет следующая теорема.

Теорема 8.13 (Абеля). *Если степенной ряд (8.12) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно в любой точке x, $|x| < |x_0|$.* [Доказательство]

Следствие 8.1. *Если в точке $x_1 \neq 0$ степенной ряд (8.12) расходится, то он расходится во всех точках x таких, что $|x| > |x_1|$.* [Доказательство]

Теорема Абеля и ее следствие дают ясное представление об области сходимости степенного ряда. Пусть x_0 — точка сходимости степенного ряда. Тогда интервал $(-|x_0|, |x_0|)$ состоит из точек сходимости (рис. 8.1).

Если степенной ряд расходится в точке x_0, то он расходится и во всех точках интервалов $(-\infty, -|x_0|)$ и $(|x_0|, +\infty)$ (рис. 8.2).

Естественно возникает вопрос: можно ли подобрать некоторое число R таким образом, чтобы степенной ряд сходился на интервале $(-R, R)$ и расходился на интервалах $(-\infty, -R)$ и $(R, +\infty)$?

Рис. 8.1

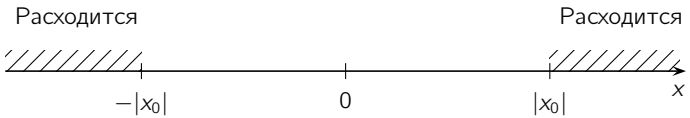

Рис. 8.2

Определение 8.14. Число R такое, что при всех x, $|x| < R$, ряд (8.12) сходится, а при всех x, $|x| > R$, расходится (рис. 8.3), называется *радиусом сходимости ряда* (8.12).

Рис. 8.3

Определение 8.15. Интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости ряда* (8.12).

Если ряд (8.12) сходится только в точке $x = 0$, то $R = 0$; если ряд сходится для всех $x \in \mathbb{R}$, то $R = \infty$.

Подчеркнем, что в каждой точке $x \in (-R, R)$ ряд (8.12) будет сходиться абсолютно, в точках $x = \pm R$ он может сходиться, а может и расходиться.

Теорема 8.14. *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = l,$$

то радиус сходимости R ряда (8.11) равен $1/l$. [Доказательство]

Теорема 8.15. *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = l,$$

то радиус сходимости ряда (8.11) *равен* $1/l$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 8.14.

Пример 8.9. Найти радиус сходимости и интервал сходимости следующих степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$.

Р е ш е н и е. а) Для отыскания радиуса сходимости в данном случае применим формулу из теоремы 8.15:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = \lim_{n\to\infty} = 2, \quad R = \frac{1}{2}.$$

Данный степенной ряд сходится абсолютно на интервале $(-1/2, 1/2)$.

б) Воспользуемся формулой из теоремы 8.14:

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty, \quad R = 0,$$

т.е. данный степенной ряд сходится только в точке $x = 0$.

в) Поступаем аналогично, как в примере б):

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0, \quad R = \infty,$$

т.е. ряд сходится на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$.

г) Этот ряд имеет вид (8.11). Найдем радиус сходимости по формуле из теоремы 8.15:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}} = e^{-1}.$$

Интервал сходимости определяется из условия $|x-1| < e^{-1}$. Получаем $(1-e^{-1}, 1+e^{-1})$. □

Пример 8.10. Найти интервал сходимости следующих степенных рядов и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$.

Р е ш е н и е. а) Имеем:

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 3^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3(n+1)} = \frac{1}{3}, \quad R = 3.$$

Значит, интервал сходимости есть $(-3, 3)$. Исследуем поведение ряда в граничных точках. Пусть $x = 3$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Это гармонический ряд, и он расходится.

Пусть теперь $x = -3$. Имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Это знакочередующийся ряд; по признаку Лейбница он сходится. Таким образом, данный степенной ряд сходится на промежутке $[-3, 3)$.

б) Имеем:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1.$$

Тогда интервал сходимости $(-1, 1)$.

Если $x = \pm 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}(\pm 1)^n \neq 0.$$

Согласно необходимому условию данный ряд в точках $x = \pm 1$ расходится. □

Рассмотрим степенной ряд (8.12), интервал сходимости которого $(-R, R)$. На этом интервале ряд имеет сумму. Обозначим ее f, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x), \quad x \in (-R, R). \tag{8.13}$$

Свойства степенных рядов

1. *Сумма f степенного ряда является функцией, непрерывной на интервале сходимости $(-R, R)$.*

2. *Сумма f степенного ряда является функцией, дифференцируемой на $(-R, R)$, причем ее производную можно найти по формуле*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad x \in (-R, R). \tag{8.14}$$

В этом случае говорят, что степенной ряд можно почленно дифференцировать на интервале сходимости.

Данное утверждение можно применять снова уже к степенному ряду (8.14). Это означает, что сумма степенного ряда является функцией, бесконечно дифференцируемой на $(-R, R)$.

3. *Для любого отрезка $[a, b] \subset (-R, R)$ справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b c_n x^n\,dx, \tag{8.15}$$

т.е. интеграл от суммы степенного ряда по любому отрезку $[a, b] \subset (-R, R)$ может быть вычислен почленным интегрированием ряда (8.13).

4. *Степенные ряды*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

имеющие радиусы сходимости соответственно R_1 и R_2, можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости произведения, суммы и разности рядов не меньше, чем меньшее из чисел R_1 и R_2.

Все вышесказанное справедливо для рядов вида (8.11) на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$, где R — радиус сходимости ряда (8.11).

8.2.3. Разложение функций в степенные ряды

Если функция f является суммой ряда

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x - x_0)^n, \tag{8.16}$$

т.е.

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots, \tag{8.17}$$

где $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, то говорят, что функция f разлагается в степенной ряд по степеням $(x - x_0)$.

Разложение функции в степенные ряды является одной из важнейших задач, так как функцию можно приближенно заменить суммой нескольких первых членов ряда, т.е. многочленом.

Теорема 8.16. *Если функция $f(x)$ разлагается на интервале сходимости в сходящийся степенной ряд, то это разложение единственно.* [Доказательство]

Определение 8.16. Ряд (Д.16) называется *рядом Тейлора* функции f в окрестности точки $x = x_0$.

Определение 8.17. Если $x_0 = 0$, то ряд (Д.16) называется *рядом Маклорена* и имеет вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots. \tag{8.18}$$

Для дальнейших рассуждений напомним, что частичная сумма ряда (Д.16)

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x - x_0)^k$$

называется *многочленом Тейлора*, разность

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

называется *остаточным членом ряда Тейлора*, а запись

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad c \in (x_0, x), \tag{8.19}$$

называется *остаточным членом в форме Лагранжа*.

Если просто предположить, что функция f имеет в окрестности точки $x = x_0$ производные любого порядка, т.е. бесконечно дифференцируема в окрестности точки $x = x_0$, и формально составить для нее ряд Тейлора, то из этого не следует, что данный ряд сходится при $x \neq x_0$. Если же полученный ряд сходится, то необязательно к функции $f(x)$.

Теорема 8.17 (критерий сходимости ряда Тейлора). *Для того чтобы ряд Тейлора, составленный для бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$, сходился на интервале сходимости и имел своей суммой $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю на указанном интервале.*

На практике пользуются следующим утверждением.

Теорема 8.18 (достаточное условие сходимости ряда Тейлора). *Если функция f является бесконечно дифференцируемой на интервале (x_0-R, x_0+R) и все ее производные ограничены одной и той же постоянной M на $(x_0 - R, x_0 + R)$, то ряд Тейлора (Д.16) сходится к функции f на этом интервале.* [Доказательство]

8.2.4. Разложение некоторых функций в ряд Маклорена

В п. 4.3.2 были приведены разложения основных элементарных функций. Рассмотрим вывод этих формул.

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}.$ [Доказательство]

2. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$ [Доказательство]

Аналогичным образом можно получить разложения и некоторых других элементарных функций.

Предметный указатель

А Б В Г Д Е З И К Л М Н О П
Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Э

А

Абеля теорема
Абсолютно сходящийся ряд
Алгебраическое дополнение
Арифметическая прогрессия
Асимптоты
    гиперболы

Б

Базис векторного пространства
Базисный минор
Бернулли
    ДУ
    формула
Бесконечно большая
    последовательность (ББП)
    функция (ББФ)
Бесконечно малая
    последовательность (БМП)
    функция (БМФ)
Больцано — Коши теоремы
Бюджетное
    множество
    ограничение

В

Вейерштрасса
- признак
- теоремы

Вектор
- n-мерный
- валового выпуска
- конечного продукта
- предельных полезностей

Векторное пространство

Возрастающая
- последовательность
- функция

Выпуклая функция
- двух переменных

Вырожденная матрица

Г

Гармонический ряд
Гаусса метод решения СЛАУ
Геометрическая прогрессия
    бесконечная
Геометрический смысл
    бесконечно малой последовательности
    дифференциала функции
    интеграла с переменным верхним пределом
    неопределенного интеграла
    непрерывности в точке
    несобственного интеграла
        второго рода
        первого рода
    ограниченной последовательности
    определенного интеграла
    предела
        последовательности
        функции
        функции двух переменных
    производной
    частных производных
Гипербола
Градиент
График функции
    двух переменных

Д

Д'Аламбера признак
ДУ, *см.* Дифференциальное уравнение
Действительные числа
Диагональная матрица
Директриса параболы
Дирихле функция
Дисконтирование
Дифференциал функции
  двух переменных
Дифференциальное уравнение
  записанное в дифференциалах
  разрешенное относительно производной
  с разделенными переменными
  с разделяющимися переменными
Дифференциальный бином
Дифференцирование
Дифференцируемая функция
  двух переменных
Домара макромодель
Достаточное условие
  выпуклости
  дифференцируемости функции двух переменных
  точки перегиба
  экстремума
    второе
    первое
    функции двух переменных

E

Евклидово пространство
Единичная матрица

З

Замечательные пределы
Знакопеременный ряд
Знакочередующийся ряд

И

Изокванты
Интегральная кривая ДУ
Интегральный признак
Интервал сходимости
Иррациональные числа

К

Капиталовооружённость
Касательная
Кванторы
Коллинеарные векторы
Координаты вектора
    n-мерного
Коши
    задача
        для ДУ второго порядка
    признак
    теорема
        для ДУ второго порядка
        для ДУ первого порядка
Коэффициенты прямых затрат
Крамера метод решения СЛАУ
Криволинейная трапеция
Кривые безразличия
Кронекера — Капелли критерий

Л

Лагранжа
- множителей метод
- теорема
- форма остаточного члена

Лапласа теорема
Лейбница
- признак
- формула

Леонтьева модель
Линейная зависимость
Линейно зависимые решения
Линейное ДУ
Линия уровня
Логарифм
Логарифмическая производная
Лопиталя правило

M

Маклорена
- ряд
- формула

Матрица
- полных затрат
- прямых затрат
- системы векторов

Мексиканская шляпа
Минор
Многочлен
Множество
Монотонная
- последовательность
- функция

Н

Натуральные числа
Начальное условие
Необходимое условие
- дифференцируемости
- сходимости
- точки перегиба
- экстремума
  - функции двух переменных

Неопределённость
Неопределенный интеграл
Непрерывность функции
- двух переменных
- на отрезке
- односторонняя

Непрерывные проценты
Несобственный интеграл
- второго рода
- первого рода

Нечетная функция
Неявно заданная функция
Нормаль
Ньютона — Лейбница формула

О

Область сходимости
Обратная
    матрица
    функция
Общее решение СЛАУ
Общий интеграл
Ограниченная
    последовательность
    функция
Однородная СЛАУ
Однородное ДУ
Окрестность
    на плоскости
Окружность
Определенный интеграл
Определитель
Орт
Ортогональные
    n-мерные векторы
    векторы
Ортогональный базис
Особое решение ДУ
Остаток числового ряда

П

Парабола
Паскаля треугольник
Первообразная
Периодическая функция
Подпространство
Показательная функция
Полное приращение
Последовательность
Потребительского выбора задача
Предел
  последовательности
  функции
    двух переменных
    на языке окрестностей
    односторонний
    по Гейне
    по Коши
    при $x \to \infty$
Предельная
  выручка
  производительность труда
  фондоотдача
Предельные
  издержки производства
  полезности
Признак сравнения
Присоединённая матрица
Продуктивная матрица
Производительность труда
Производная
  по направлению
  порядка n
Производственная функция
  Кобба — Дугласа
Прямая

Р

Равновесная цена
Равномерная сходимость ряда
Радиус сходимости
Размерность подпространства
Ранг
- матрицы
- системы векторов

Рациональная функция
- правильная
- простейшая

Рациональные числа
Решение
- ДУ
- СЛАУ

Ролля теорема

С

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)
Скалярное произведение *n*-мерных векторов
Скачок функции
Сложная функция
Смешанные производные
Собственное значение
Собственный вектор
Совместная СЛАУ
Соотношения баланса
Сопряжённые гиперболы
Спектр матрицы
Стационарная точка функции двух переменных
Степенная функция
Степенной ряд
Сумма ряда
Суперпозиции решений принцип
Сходящаяся последовательность на плоскости
Сходящийся ряд

Т

Таблица
- основных интегралов
- основных производных
- эквивалентностей

Тейлора
- ряд
  - критерий сходимости
  - условие сходимости
- формула

Теорема
- аннулирования
- о непрерывности
  - обратной функции
  - сложной функции
  - элементарных функций
- о производной сложной функции
- о сжатой последовательности
- о среднем значении определенного интеграла
- о структуре решения неоднородного уравнения
- об устойчивости знака
  - непрерывной функции
  - последовательности

Точка
- безубыточности
- перегиба
- разрыва
- рыночного равновесия
- спроса

Транспонированная матрица

Тригонометрические функции
- обратные

У

Убывающая
- последовательность
- функция

Угловой коэффициент прямой
Угол между
- n-мерными векторами
- векторами
- кривыми
- прямыми

Уравнение связи
Условно сходящийся ряд
Условный экстремум

Ф

Факториал
Ферма теорема
Формула конечных приращений
Фундаментальная система решений
однородной СЛАУ
Функции
выручки
двух переменных
издержек
полезности
двух товаров
прибыли
спроса и предложения
спроса на товары
Функциональный ряд

X

Характеристическое уравнение
ДУ
матрицы

Ц

Целые числа

Ч

Чётная функция
Частичная сумма ряда
Частное решение СЛАУ
Частные производные
Частный интеграл
Числовая функция
Числовой ряд

Ш

Шварца теорема

Э

Эйлера постоянная
Эквивалентные
- БМФ
- матрицы
- системы уравнений

Экстремум
- глобальный
- функции двух переменных

Эксцентриситет
- гиперболы
- эллипса

Эластичность функции
- двух переменных

Элементарные
- преобразования
- функции

Эллипс

Список основных сокращений

$\mathbf{0}$	—	нулевой вектор
$A \sim B$	—	эквивалентные матрицы
A^*	—	матрица, присоединённая к матрице A
A^{-1}	—	матрица, обратная к матрице A
$\lvert A\rvert = \det A$	—	определитель матрицы A
C_n^k	—	биномиальные коэффициенты
$D(f)$	—	область определения функции f
$E(f)$	—	множество значений функции f
$\mathbb{N}$	—	множество натуральных чисел
$\mathbb{Q}$	—	множество рациональных чисел
$\mathbb{R}$	—	множество действительных чисел
$X \subset Y$	—	X является подмножеством Y
$\mathbb{Z}$	—	множество целых чисел
$\alpha(x) \sim \beta(x)$	—	эквивалентные бесконечно малые функции
$\exists$	—	квантор существования
$\forall$	—	квантор всеобщности
$\dfrac{\partial z}{\partial l}$	—	производная функции z по направлению l
$\dfrac{\partial z}{\partial x} = z'_x$	—	частная производная функции $z = z(x, y)$ по переменной x
∞	—	знак бесконечности

$\int_a^b f(x)\,dx$ — определённый интеграл от функции f

$\int f(x)\,dx$ — неопределённый интеграл от функции f

$\pi \approx 3{,}14$ — число π

$\prod_{k=m}^{n} p_k$ — конечное произведение

$\sum_{k=m}^{n} f_k$ — конечная сумма

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — бесконечный числовой ряд

$a \in A$ — элемент a принадлежит множеству A

$a \notin A$ — элемент a не принадлежит множеству A

$(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$\mathbf{a} \downarrow\uparrow \mathbf{b}$ — противоположно направленные векторы

$\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$ — сонаправленные векторы

$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ — ортогональные векторы

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

dy — дифференциал функции y

$e \approx 2{,}72$ — постоянная Эйлера

$f'(x) = \frac{dy}{dx}$ — производная функции $y = f(x)$

$f^{(n)}(x)$ — производная порядка n функции f

f^{-1} — функция, обратная к f

$\operatorname{grad} z$ — градиент функции $z = z(x, y)$

$\lim_{n\to\infty} x_n$ — предел последовательности x_n при $n \to \infty$

$\lim_{x\to a} f(x)$ — предел функции $f(x)$ в точке a

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ — предел функции $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0)

$n!$ — факториал натурального числа n

$\operatorname{rank} A$ — ранг матрицы A

$\operatorname{sign} x$ — знак числа x

$\{x_n\}$ — числовая последовательность

Определения

n-мерное векторное пространство
n-мерный вектор
Абсолютно сходящийся ряд
Абсолютно сходящийся функциональный ряд
Алгебраическое дополнение
Арифметические операции с последовательностями
Асимптоты гиперболы
Базис *n*-мерного векторного пространства
Базис подпространства
Базис системы векторов
Базисный минор
Бесконечно большая последовательность
Бесконечно большие функции
Бесконечно малая последовательность
Бесконечно малые функции
Бюджетное множество
Вектор валового выпуска
Вектор конечного продукта
Вектор предельных полезностей
Вектор
Вектор-столбец и вектор-строка
Вертикальная асимптота
Вершина параболы
Вершины гиперболы
Вершины эллипса
Возрастающая и убывающая последовательности
Возрастающая и убывающая функции
Второй замечательный предел
Выпуклая вверх (выпуклая) функция
Выпуклая вниз (вогнутая) функция
Выпуклое множество
Выпуклые функции
Гипербола
Градиент
График функции двух переменных
График функции
Диагонали матрицы
Диагональная матрица
Директриса параболы
Дифференциал функции двух переменных
Дифференциал функции
Дифференциальное уравнение Бернулли

Дифференциальное уравнение второго порядка
Дифференциальное уравнение первого порядка
Дифференциальное уравнение с разделенными переменными
Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными
Дифференциальный бином
Дифференцируемая функция
Дифференцируемость функции двух переменных
Длина вектора
Евклидово пространство
Единичная матрица
Единичные векторы n-мерного пространства
Единичный вектор
Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка
Задача Коши
Знакочередующийся ряд
Изокванты
Интеграл с переменным верхним пределом
Интегральная кривая
Интервал монотонности
Интервал сходимости
Касательная
Квадратная матрица
Классификация точек разрыва
Коллинеарные векторы
Координаты n-мерного вектора в системе векторов
Координаты вектора
Крамера метод и формулы
Кривые безразличия
Левый предел
Линейная зависимость
Линейная комбинация
Линейная независимость
Линейно независимые функции
Линейное дифференциальное уравнение второго порядка
Линейное дифференциальное уравнение
Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка
Линейные операции над n-векторами
Линейные операции над векторами
Линии уровня
Локальные минимум и максимум функции двух переменных
Локальный максимум
Локальный минимум
Локальный экстремум функции двух переменных
Локальный экстремум
Матрица прямых затрат
Матрица системы векторов
Матрицы
Матричное уравнение
Матричный метод решения системы линейных уравнений
Минор матрицы

Минор элемента матрицы
Многочлен Тейлора
Многочлен от квадратной матрицы
Модуль n-мерного вектора
Монотонная последовательность
Монотонная функция
Наклонная асимптота
Направляющие косинусы
Невырожденная и вырожденные матрицы
Неопределенный интеграл
Непрерывная на множестве функция
Непрерывная на отрезке функция
Непрерывность функции двух переменных по одной из переменных
Непрерывность функции двух переменных
Непрерывность функции на языке приращений
Непрерывность функции
Непрерывность функций двух переменных на языке приращений
Непрерывные справа и слева функции
Несобственный интеграл второго рода
Несобственный интеграл первого рода
Неэлементарные функции
Нулевая матрица
Нулевой вектор
Область сходимости
Обратная матрица
Обратная функция
Общее решение дифференциального уравнения второго порядка
Общее решение дифференциального уравнения
Общее уравнение прямой
Общий интеграл
Ограниченная и неограниченная функции
Ограниченная последовательность
Одноресурсная производственная функция
Однородная функция
Однородное дифференциальное уравнение
Однородные и неоднородные системы линейных уравнений
Односторонние пределы на бесконечности
Односторонние пределы
Окрестность точки
Окружность
Определённая и неопределённая системы
Определенный интеграл
Определители второго порядка
Определители первого порядка
Определители третьего порядка
Определитель произвольного порядка
Ортогональная система векторов
Ортогональные n-мерные векторы
Ортогональные векторы
Ортогональный базис
Ортонормированный базис
Оси гиперболы
Оси эллипса
Основная матрица системы
Основной прямоугольник гиперболы

Особое решение дифференциального уравнения
Остаток числового ряда
Остаточный член в форме Лагранжа
Ось параболы
Парабола
Параметр параболы
Первообразная
Первый замечательный предел
Перестановочные матрицы
Периодическая функция
Подпространство
Полное приращение функции
Полуоси гиперболы
Полуоси эллипса
Последовательность числовая
Постоянная последовательность
Постоянная функция
Правый предел
Предел последовательности
Предел функции двух переменных на языке окрестностей
Предел функции двух переменных по Гейне
Предел функции двух переменных по Коши
Предел функции на бесконечности
Предел функции на языке окрестностей
Предел функции по Гейне
Предел функции по Коши
Предельная производительность труда
Предельная фондоотдача
Предельные полезности
Приращение аргумента и функции
Приращение функции по направлению
Присоединённая матрица
Продуктивная модель Леонтьева
Произведение вектора на число
Произведение матриц
Произведение матрицы на число
Производная n-го порядка
Производная второго порядка
Производная по направлению
Производная
Производственная функция Кобба — Дугласа
Производственная функция
Простейшие рациональные дроби
Противоположная матрица
Противоположный вектор
Равенство матриц
Равнобочная гипербола
Равномерно сходящийся функциональный ряд
Равные векторы
Радиус сходимости
Размерность подпространства
Разность векторов
Разность матриц
Ранг матрицы
Ранг системы векторов
Расстояние между n-мерными точками
Рациональные функции

Решение дифференциального уравнения второго порядка
Решение дифференциального уравнения
Решение системы уравнений
Ряд Маклорена
Ряд Тейлора
Ряд матрицы
Свободный вектор
Система линейных уравнений
Скалярное произведение n-векторов
Скалярное произведение
Сложная функция
Смешанные производные
Собственные значения и векторы
Совместные и несовместные системы уравнений
Согласованные матрицы
Соотношения баланса
Сопряжённые гиперболы
Спектр матрицы
Стационарная точка
Стационарные точки функции двух переменных
Степенной ряд
Степень квадратной матрицы
Строго возрастающая и строго убывающая последовательности
Строго возрастающие и строго убывающие функции
Строго монотонная последовательность
Строго монотонная функция
Ступенчатая матрица
Сумма векторов
Сумма матриц
Сходимость в точке
Сходящаяся и расходящаяся последовательности
Сходящаяся последовательность на плоскости
Сходящийся несобственный интеграл
Сходящийся числовой ряд
Точка безубыточности
Точка перегиба
Точка разрыва функции двух переменных
Точка рыночного равновесия
Точка спроса
Точки локального условного максимума и минимума
Точки разрыва
Транспонированная матрица
Треугольная матрица
Угловой коэффициент прямой
Угол между n-мерными векторами
Угол между векторами
Угол между прямыми
Угол наклона прямой
Уравнение прямой в отрезках
Уравнение прямой с угловым коэффициентом
Уравнение, записанное в дифференциалах
Уравнение, разрешенное относительно производной
Условно сходящийся ряд

Условный экстремум
Фокальные радиусы гиперболы
Фокальные радиусы эллипса
Фокальный радиус параболы
Фокус параболы
Фокусы гиперболы
Фокусы эллипса
Формула Маклорена
Формула Тейлора
Фундаментальная система решений
Функции спроса и предложения
Функциональный ряд
Функция Лагранжа
Функция выручки
Функция двух переменных
Функция издержек
Функция полезности двух товаров
Функция полезности
Функция прибыли
Функция спроса на товары
Функция
Характеристический многочлен
Характеристическое уравнение
Характеристическое уравнение
Центр гиперболы
Центр эллипса
Чётные и нечётные функции
Частичная сумма ряда
Частное и общее решения системы уравнений
Частное приращение функции
Частное решение дифференциального уравнения второго порядка
Частное решение дифференциального уравнения
Частные производные второго порядка
Частные производные
Число e
Числовая функция
Числовой ряд
Эквивалентные бесконечно малые функции
Эквивалентные матрицы
Эквивалентные системы уравнений
Эксцентриситет гиперболы
Эксцентриситет эллипса
Эластичность функции двух переменных
Эластичность функции
Элементарные преобразования
Элементарные функции
Элементы матрицы
Эллипс
Эпсилон-окрестность на плоскости

n-мерное векторное пространство

Совокупность всех n-мерных векторов, для которых определены линейные операции, называется *n-мерным векторным пространством* и обозначается $\mathbb{R}^n$. [Перейти к основному тексту]

n-мерный вектор

n-мерным вектором **x** назовём упорядоченную совокупность n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые будем называть *координатами вектора* **x**. [Перейти к основному тексту]

Абсолютно сходящийся ряд

Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

[Перейти к основному тексту]

Абсолютно сходящийся функциональный ряд

Функциональный ряд (О.33) называется *абсолютно сходящимся* на множестве D_1, если в каждой точке $x \in D_1$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

[Перейти к основному тексту]

Алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением A_{ij} *элемента* a_{ij} квадратной матрицы A называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

[Перейти к основному тексту]

Арифметические операции с последовательностями

Последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n / y_n\}$ называются соответственно *суммой*, *разностью*, *произведением* и *частным* двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ (для частного $y_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$).

[Перейти к основному тексту]

Асимптоты гиперболы

Две прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ (рис. 2.10) называются *асимптотами гиперболы*. [Перейти к основному тексту]

Базис n-мерного векторного пространства

Базисом n-мерного векторного пространства назовём любые n линейно независимых векторов этого пространства.

[Перейти к основному тексту]

Базис подпространства

Любую максимальную линейно независимую систему векторов подпространства W будем называть *базисом этого подпространства*.

[Перейти к основному тексту]

Базис системы векторов

Базисом системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ называется содержащая максимально возможное количество векторов её линейно независимая подсистема.

[Перейти к основному тексту]

Базисный минор

Отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу матрицы, называется *базисным*.

[Перейти к основному тексту]

Бесконечно большая последовательность

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой* (ББП), если для всякого $A > 0$ существует номер $N_A \in \mathbb{N}$ такой, что для любого $n > N_A$ верно неравенство $|x_n| > A$, т.е.

$$\forall\, A > 0 \quad \exists\, N_A \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_A \quad |x_n| > A.$$

В таком случае пишут:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Если дополнительно известно, что последовательность $\{x_n\}$ для достаточно больших n сохраняет знак, т.е.

$$\forall\, A > 0 \quad \exists\, N_A \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_A \quad x_n > A \quad \Big(x_n < -A\Big),$$

то к символу бесконечности «∞» добавляют соответствующий знак:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \Big(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\Big).$$

[Перейти к основному тексту]

Бесконечно большие функции

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой при $x \to a$* (ББФ), если для любого числа $A > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > A$, т.е.

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |f(x)| > A.$$

В этом случае применяется обозначение

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Если известно, что при $0 < |x-a| < \delta$ функция $f(x)$ принимает только положительные (отрицательные) значения, то данное обозначение может быть дополнено путём указания знака бесконечности:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \left(\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \right).$$

[Перейти к основному тексту]

Бесконечно малая последовательность

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой* (БМП), если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

[Перейти к основному тексту]

Бесконечно малые функции

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой при $x \to a$* (БМФ), если

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

[Перейти к основному тексту]

Бюджетное множество

Если потребитель обладает доходом R, то множество всех наборов товаров стоимостью не более R называется *бюджетным множеством*. *Граница бюджетного множества* — это множество наборов, которые сто́ят ровно R.

[Перейти к основному тексту]

Вектор валового выпуска

Вектором валового выпуска назовём вектор-столбец $X = (x_i)$, где x_i — общий, или валовой, объём продукции i-й отрасли. [Перейти к основному тексту]

Вектор конечного продукта

Вектором конечного продукта назовём вектор-столбец $Y = (y_i)$, где y_i — объём конечного продукта i-й отрасли для непроизводственного потребления.

[Перейти к основному тексту]

Вектор предельных полезностей

Вектор градиента функции полезности

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

координаты которого есть предельные полезности, называется *вектором предельных полезностей*.

[Перейти к основному тексту]

Вектор

Вектором $\overrightarrow{AB}$ называется направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B. Определённый таким образом вектор называют ещё *связанным*. [Перейти к основному тексту]

Вектор-столбец и вектор-строка

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *вектором-столбцом* или *вектором-строкой*.

[Перейти к основному тексту]

Вертикальная асимптота

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ равен $+\infty$ либо $-\infty$. [Перейти к основному тексту]

Вершина параболы

Начало координат $O(0, 0)$ называется *вершиной параболы*.

[Перейти к основному тексту]

Вершины гиперболы

Точки $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ (рис. 2.10) лежат на гиперболе и называются *вершинами гиперболы*.

[Перейти к основному тексту]

Вершины эллипса

Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ (рис. 2.8), принадлежащие эллипсу, называются *вершинами эллипса*.

[Перейти к основному тексту]

Возрастающая и убывающая последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, если для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \leqslant x_{n+1}$, и *убывающей*, если для $n \in \mathbb{N}$ верно, что $x_{n+1} \leqslant x_n$. [Перейти к основному тексту]

Возрастающая и убывающая функции

Функция $f : X \to Y$ называется *возрастающей* (*убывающей*) *на множестве* $A \subset X$, если для любых $x_1, x_2 \in A$ из того, что $x_1 < x_2$, следует неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$. [Перейти к основному тексту]

Второй замечательный предел

Равенство (3.7), представляющее собой обобщение уже известного предела (O.35), называется *вторым замечательным пределом*. [Перейти к основному тексту]

Выпуклая вверх (выпуклая) функция

Функция f называется *выпуклой вверх (выпуклой)* на интервале (a, b), если ее график расположен ниже любой касательной на (a, b) (рис. 4.7). [Перейти к основному тексту]

Выпуклая вниз (вогнутая) функция

Функция f называется *выпуклой вниз (вогнутой)* на интервале (a, b), если ее график расположен выше любой касательной на (a, b) (рис. 4.7). [Перейти к основному тексту]

Выпуклое множество

Множество $B \subset \mathbb{R}^2$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми своими точками a и b оно целиком содержит соединяющий их отрезок.

[Перейти к основному тексту]

Выпуклые функции

Функция, заданная на выпуклом множестве B, называется *выпуклой вниз*, если все точки графика этой функции, соответствующие произвольному отрезку $[a, b]$ из множества B, лежат не выше хорды, соединяющей точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$.

Аналогично функция называется *выпуклой вверх*, если для всякого отрезка из множества B график функции в точках этого отрезка лежит не ниже соответствующей хорды (рис. 6.17).

[Перейти к основному тексту]

Гипербола

Гипербола (рис. 2.10) — это геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a, b > 0, \tag{O.1}$$

называемому *каноническим уравнением гиперболы*.

[Перейти к основному тексту]

Градиент

Градиентом функции $z = f(x, y)$ называется вектор, координаты которого равны частным производным этой функции:

$$\operatorname{grad} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

[Перейти к основному тексту]

График функции двух переменных

Совокупность точек $P(x, y, f(x, y))$ (рис. 6.1) представляет собой поверхность в трёхмерном пространстве, которая называется *графиком функции* $z = f(x, y)$. [Перейти к основному тексту]

График функции

Графиком функции называется множество всех точек плоскости вида $\big(x; f(x)\big)$, т.е. координаты x и y точек графика связаны соотношением $y = f(x)$.

[Перейти к основному тексту]

Диагонали матрицы

Элементы a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} квадратной матрицы порядка n образуют её *главную диагональ*. Другая диагональ, состоящая из элементов a_{n1}, $a_{n-1,2}$, ..., a_{1n}, называется *побочной*. [Перейти к основному тексту]

Диагональная матрица

Квадратная матрица называется *диагональной*, если все её элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю.

[Перейти к основному тексту]

Директриса параболы

Прямая L, задаваемая уравнением $x = -\frac{p}{2}$ (см. рис. 2.12), называется *директрисой параболы*.

[Перейти к основному тексту]

Дифференциал функции двух переменных

Дифференциалом dz дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ называется главная линейная относительно Δx и Δy часть полного приращения (О.4):

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

[Перейти к основному тексту]

Дифференциал функции

Главная линейная относительно Δx часть приращения функции

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

в точке x называется *дифференциалом функции* $y = f(x)$ в этой точке.

[Перейти к основному тексту]

Дифференциальное уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называют нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \tag{O.2}$$

где α, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, — произвольное вещественное число.

[Перейти к основному тексту]

Дифференциальное уравнение второго порядка

Уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

где F — заданная функция четырех переменных x, y, y', y''; x — аргумент; $y = y(x)$ — искомая функция, называется *дифференциальным уравнением второго порядка*. [Перейти к основному тексту]

Дифференциальное уравнение первого порядка

Дифференциальным уравнением (ДУ) первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0,$$

где F — заданная функция трех переменных x, y, y'; x — аргумент; $y = y(x)$ — искомая функция; $y' = y'(x)$ — ее производная.

[Перейти к основному тексту]

Дифференциальное уравнение с разделенными переменными

Пусть $P(x, y) = P_1(x)$, $Q(x, y) = Q_2(y)$, тогда уравнение (7.7) называют *ДУ с разделенными переменными*.

[Перейти к основному тексту]

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка (7.1) или (7.7) называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если его можно представить в виде

$$y' = f_1(x)\, f_2(y)$$

или

$$P_1(x)P_2(y)\, dx + Q_1(x)Q_2(y)\, dy = 0.$$

[Перейти к основному тексту]

Дифференциальный бином

Выражение $x^m(a + bx^n)^p\,dx$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ называется *дифференциальным биномом*.

[Перейти к основному тексту]

Дифференцируемая функция

Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x, если существует такое число A, что приращение функции в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad \Delta x \to 0, \tag{O.3}$$

где $\alpha(\Delta x)$ — БМФ при $\Delta x \to 0$.

[Перейти к основному тексту]

Дифференцируемость функции двух переменных

Функция $z = f(x, y)$, определённая в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, называется *дифференцируемой в точке* M_0, если её полное приращение в этой точке

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

представимо в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \qquad \text{(O.4)}$$

где A, B — постоянные, не зависящие от Δx и Δy; $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

[Перейти к основному тексту]

Длина вектора

Длиной или *модулем вектора* называется длина соответствующего направленного отрезка. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначается $|\overrightarrow{AB}|$.

[Перейти к основному тексту]

Евклидово пространство

Евклидово пространство — это *n*-мерное векторное пространство, в котором задано скалярное произведение.

[Перейти к основному тексту]

Единичная матрица

Диагональная матрица называется *единичной* и обозначается E, если все её элементы, расположенные на главной диагонали, равны единице. [Перейти к основному тексту]

Единичные векторы n-мерного пространства

Единичными векторами n-мерного пространства назовём векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ \mathbf{e}_3 &= (0, 0, 1, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned} \tag{O.5}$$

[Перейти к основному тексту]

Единичный вектор

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* или *ортом* и обозначается **e**.

[Перейти к основному тексту]

Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка

Задачей Коши называют задачу отыскания решения уравнения (7.14) по заданным начальным условиям (7.15).

[Перейти к основному тексту]

Задача Коши

Задачей Коши или *начальной задачей* называют задачу нахождения решения $y = y(x)$ уравнения (O.32), удовлетворяющего *начальному условию*

$$y(x_0) = y_0. \tag{O.6}$$

[Перейти к основному тексту]

Знакочередующийся ряд

Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \tag{O.7}$$

где $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

[Перейти к основному тексту]

Изокванты

Линии уровня производственной функции называются *изоквантами*.

[Перейти к основному тексту]

Интеграл с переменным верхним пределом

Функция $\Phi(x)$, задаваемая формулой (5.25), называется *интегралом с переменным верхним пределом*.

[Перейти к основному тексту]

Интегральная кривая

График каждой первообразной называется *интегральной кривой*.

[Перейти к основному тексту]

Интервал монотонности

Интервалы, на которых функция монотонна, называются *интервалами монотонности* этой функции.

[Перейти к основному тексту]

Интервал сходимости

Интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости ряда* (8.12). [Перейти к основному тексту]

Касательная

Касательной к кривой в точке M называется предельное положение (если оно существует) секущей MP, когда точка P неограниченно приближается к точке M. [Перейти к основному тексту]

Квадратная матрица

Матрица, число строк которой равно числу столбцов и равно n, называется *квадратной матрицей порядка* n.

[Перейти к основному тексту]

Классификация точек разрыва

Точка разрыва a функции $f(x)$ называется:

1) *точкой разрыва первого рода*, если в ней существуют левосторонний и правосторонний пределы функции $f(x)$, причём если они:

   а) равны, т.е.
   $$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x),$$
   то a называется *точкой устранимого разрыва*;

   б) различны, т.е.
   $$\lim_{x \to a-0} f(x) \neq \lim_{x \to a+0} f(x),$$
   то a называется *точкой конечного разрыва*, а модуль разности левостороннего и правостороннего пределов
   $$h = \left| \lim_{x \to a-0} f(x) - \lim_{x \to a+0} f(x) \right|$$
   называется *скачком функции $f(x)$ в точке a*;

2) *точкой разрыва второго рода*, если она не является точкой разрыва первого рода, т.е. если в ней не существует хотя бы один из односторонних пределов.

[Перейти к основному тексту]

Коллинеарные векторы

Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ могут быть *одинаково направлены*, иначе сонаправлены, или *противоположно направлены*, что соответственно обозначается $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ или $\overrightarrow{AB} \downarrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

[Перейти к основному тексту]

Координаты n-мерного вектора в системе векторов

Если вектор $\mathbf{a}$ является линейной комбинацией векторов линейно независимой системы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$, т.е.

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \ldots + a_k\mathbf{b}_k, \tag{O.8}$$

то числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называются *координатами вектора* $\boldsymbol{a}$ *в системе* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$.

[Перейти к основному тексту]

Координаты вектора

Рассмотрим произвольный вектор **a** на плоскости. Поместим его начало в начало выбранной прямоугольной декартовой системы координат. Тогда конец вектора **a** однозначно определит некоторую точку M плоскости, координаты x, y которой будем называть *координатами вектора* **a** (рис. 1.9). [Перейти к основному тексту]

Крамера метод и формулы

Формулы (1.13) называются *формулами Крамера*. Метод решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей по формулам Крамера называется *методом Крамера*.

[Перейти к основному тексту]

Кривые безразличия

Линии уровня функции полезности называют *кривыми безразличия* (рис. 6.18).

[Перейти к основному тексту]

Левый предел

Число b называется *левым пределом функции* f *в точке* $x = a$, если (рис. 3.46)

$$\forall \{x_n\},\ x_n < a\ (n \in \mathbb{N}),\ \lim_{n\to\infty} x_n = a,\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

В этом случае применяется обозначение $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$.

[Перейти к основному тексту]

Линейная зависимость

Система векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{b}_k = \mathbf{0}. \tag{O.9}$$

[Перейти к основному тексту]

Линейная комбинация

Вектор $\mathbf{a}$ называется *линейной комбинацией системы векторов* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, что

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{b}_k.$$

[Перейти к основному тексту]

Линейная независимость

Система векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$, которая не является линейно зависимой, называется *линейно независимой*. Для линейно независимой системы равенство (O.9) возможно лишь в случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

[Перейти к основному тексту]

Линейно независимые функции

Два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (O.11) называются *линейно независимыми* на интервале (a, b), если

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv \text{const};$$

в противном случае эти решения называются *линейно зависимыми*.

Если хотя бы одно из решений ($y_1(x)$ или $y_2(x)$) тождественно равно нулю на рассматриваемом интервале, то эти решения будут линейно зависимыми. [Перейти к основному тексту]

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка

Уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{O.10}$$

где p, q — действительные числа; $f(x)$ — некоторая функция, называется *линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*. [Перейти к основному тексту]

Линейное дифференциальное уравнение

Уравнения, которые можно записать в виде

$$y' + p(x)y = q(x)$$

или

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y),$$

называются *линейными*, первое — относительно y, $\frac{dy}{dx}$, а второе — относительно x, $\frac{dx}{dy}$.

Если $q(x) \equiv 0$ ($q(y) \equiv 0$), то уравнение называется *линейным однородным*, если $q(x) \neq 0 \quad (q(y) \neq 0)$, — *линейным неоднородным*.

[Перейти к основному тексту]

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

Если $f(x) = 0$, то уравнение

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{O.11}$$

называется *однородным*. Уравнение (O.10) — *неоднородное*.

[Перейти к основному тексту]

Линейные операции над n-векторами

Линейные операции над n-векторами

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

определяются как обобщение линейных операций (1.19) над векторами в пространстве в координатной форме:

$$\begin{aligned} k\mathbf{x} &= (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n), \\ \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y} &= (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n). \end{aligned}$$

[Перейти к основному тексту]

Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называются операции сложения и вычитания векторов и операция умножения вектора на число.

[Перейти к основному тексту]

Линии уровня

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество точек $M(x, y)$ плоскости Oxy, удовлетворяющих равенству $f(x, y) = c$, где c — константа.

[Перейти к основному тексту]

Локальные минимум и максимум функции двух переменных

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой локального максимума функции* $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность M_0, для любой точки $M(x, y)$ которой выполняется неравенство $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$, и *точкой локального минимума*, если существует окрестность точки M_0, где $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$.

[Перейти к основному тексту]

Локальный максимум

Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум*, если существует δ-окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такая, что

$$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

[Перейти к основному тексту]

Локальный минимум

Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный минимум*, если существует δ-окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такая, что

$$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

[Перейти к основному тексту]

Локальный экстремум функции двух переменных

Точки локального максимума и локального минимума называются *точками локального экстремума*.

[Перейти к основному тексту]

Локальный экстремум

Локальные максимумы и локальные минимумы функции называются *локальными экстремумами*.

[Перейти к основному тексту]

Матрица прямых затрат

Матрицей прямых затрат назовём квадратную матрицу $A = (a_{ij})$, где a_{ij} — *коэффициенты прямых затрат*, показывающие затраты продукции i-й отрасли на производство единицы продукции j-й отрасли.

[Перейти к основному тексту]

Матрица системы векторов

Пусть известны координаты системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ в линейно независимой системе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$:

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1k}), \quad \mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2k}), \ldots,$$
$$\mathbf{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mk}).$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} \end{pmatrix}, \tag{O.12}$$

составленная из этих координат, называется *матрицей системы векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ в системе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$.

[Перейти к основному тексту]

Матрицы

Прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов, называется *матрицей размера* $m \times n$. Матрицы, как правило, обозначают прописными буквами латинского алфавита и записывают в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или коротко $A = (a_{ij})$.

[Перейти к основному тексту]

Матричное уравнение

Уравнение, где неизвестной является матрица, называется *матричным уравнением*.

[Перейти к основному тексту]

Матричный метод решения системы линейных уравнений

Метод решения системы линейных уравнений $AX = B$ с невырожденной квадратной матрицей A по формуле $X = A^{-1}B$ называется *матричным*.

[Перейти к основному тексту]

Минор матрицы

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$. Для $1 \leqslant k \leqslant \min\{m, n\}$ *минорами порядка* k *матрицы* A называются определители, которые состоят из элементов матрицы A, стоящих на пересечении любых k строк и k столбцов матрицы A. [Перейти к основному тексту]

Минор элемента матрицы

Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A порядка n называется определитель квадратной матрицы $(n-1)$-го порядка, получаемой вычёркиванием в матрице A i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых расположен этот элемент. [Перейти к основному тексту]

Многочлен Тейлора

Многочлен $P_n(x)$, определяемый формулой (4.23), называется *многочленом Тейлора* для функции $y = f(x)$ в точке x_0.

[Перейти к основному тексту]

Многочлен от квадратной матрицы

Многочленом степени n от квадратной матрицы A называется выражение вида

$$P_n(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A^1 + a_0 A^0,$$

где a_0, a_1, $\ldots$, a_n — произвольные числа.

[Перейти к основному тексту]

Модуль n-мерного вектора

Модулем n-мерного вектора $\mathbf{x}$ называется корень квадратный из скалярного произведения этого вектора на самого себя:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

[Перейти к основному тексту]

Монотонная последовательность

Возрастающая и убывающая последовательности называются *монотонными*.

[Перейти к основному тексту]

Монотонная функция

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*. [Перейти к основному тексту]

Наклонная асимптота

Прямая $y = kx + l$ называется *наклонной асимптотой графика функции* $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если функция f представима в виде

$$f(x) = kx + l + \alpha(x), \tag{O.13}$$

где $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to +\infty$.

[Перейти к основному тексту]

Направляющие косинусы

Луч, задающий направление l, образует с положительными направлениями осей координат Ox и Oy углы α и β. Величины $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ называются *направляющими косинусами* направления l (рис. 6.7).

[Перейти к основному тексту]

Невырожденная и вырожденные матрицы

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если её определитель не равен нулю: $\det A \neq 0$. В противном случае, когда $\det A = 0$, матрица называется *вырожденной*. [Перейти к основному тексту]

Неопределенный интеграл

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех первообразных этой функции. Обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования*.

[Перейти к основному тексту]

Непрерывная на множестве функция

Функция, непрерывная в каждой точке множества, называется *непрерывной на этом множестве*.

[Перейти к основному тексту]

Непрерывная на отрезке функция

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a, b), непрерывна справа в точке $x = a$ и непрерывна слева в точке $x = b$. [Перейти к основному тексту]

Непрерывность функции двух переменных по одной из переменных

Если функция $\varphi(x) = f(x, y_0)$ непрерывна в точке x_0, то говорят, что функция $f(x, y)$ *непрерывна в точке* (x_0, y_0) *по переменной* x. Аналогично вводится понятие *непрерывности функции* f *в точке* (x_0, y_0) *по переменной* y.

[Перейти к основному тексту]

Непрерывность функции двух переменных

Функция $z = f(x, y)$, определённая в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, называется *непрерывной в точке* M_0, если в этой точке существует предел функции $f(x, y)$, равный значению функции в этой точке:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

[Перейти к основному тексту]

Непрерывность функции на языке приращений

Функция f называется *непрерывной в точке a*, если её приращение в этой точке есть БМФ, когда приращение аргумента стремится к нулю.

[Перейти к основному тексту]

Непрерывность функции

Функция f, определённая в некоторой окрестности точки $x = a$, включая саму точку a, называется *непрерывной в точке a*, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \tag{O.14}$$

т.е. предел функции и её значение в точке a равны.

[Перейти к основному тексту]

Непрерывность функций двух переменных на языке приращений

Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если её полное приращение есть величина бесконечно малая, когда приращения независимых переменных стремятся к нулю, т.е.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

[Перейти к основному тексту]

Непрерывные справа и слева функции

Функция f называется *непрерывной справа в точке a* (рис. 3.49), если

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a),$$

и *непрерывной слева в точке a* (рис. 3.50), если

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a).$$

[Перейти к основному тексту]

Несобственный интеграл второго рода

Несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел

$$\lim_{b_1 \to b-0} \int_a^{b_1} f(x)\,dx, \tag{O.15}$$

т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b_1 \to b-0} \int_a^{b_1} f(x)\,dx.$$

[Перейти к основному тексту]

Несобственный интеграл первого рода

Несобственным интегралом первого рода или *несобственным интегралом с бесконечным пределом интегрирования*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

называется предел

$$\lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)\,dx, \tag{O.16}$$

т.е.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)\,dx.$$

[Перейти к основному тексту]

Неэлементарные функции

Функции, не являющиеся элементарными, называются *неэлементарными*. [Перейти к основному тексту]

Нулевая матрица

Матрица O называется *нулевой* или *нуль-матрицей*, если все её элементы равны нулю.

[Перейти к основному тексту]

Нулевой вектор

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* и обозначается $\mathbf{0}$.

[Перейти к основному тексту]

Область сходимости

Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его *областью сходимости*.

[Перейти к основному тексту]

Обратная матрица

Пусть A — квадратная матрица. Матрица A^{-1} называется *обратной* для A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E — единичная матрица.

[Перейти к основному тексту]

Обратная функция

Пусть дана функция $f : X \to Y$. Если каждому $y \in Y$ соответствует единственное значение $x \in X$, для которого $y = f(x)$ (рис. 3.11), то задана функция $\varphi : Y \to X$ такая, что $x = \varphi(y)$. Эта функция называется *обратной* к функции $f(x)$ и записывается в виде

$$x = \varphi(y) = f^{-1}(y).$$

Поскольку функция $f(x)$ является обратной к $f^{-1}(x)$, то функции $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ называют ещё *взаимно обратными*.

[Перейти к основному тексту]

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка

Общим решением уравнения (7.14) в некоторой области D называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, если она является решением этого уравнения при любых постоянных величинах C_1 и C_2, которые могут быть определены единственным образом при заданных начальных условиях (7.15).

[Перейти к основному тексту]

Общее решение дифференциального уравнения

Общим решением ДУ (7.1) называется функция

$$y = \varphi(x, C), \tag{O.17}$$

зависящая от одной произвольной постоянной C и такая, что выполняются условия:

1) она удовлетворяет уравнению (O.32) при любых допустимых значениях постоянной C;
2) каково бы ни было начальное условие (O.6), можно подобрать такое значение C_0 постоянной C, что решение $y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять заданному начальному условию (O.6).

[Перейти к основному тексту]

Общее уравнение прямой

Уравнение вида $Ax + By + C = 0$ называется *общим уравнением прямой* или *полным уравнением прямой*. При различных значениях A, B, C оно определяет всевозможные прямые. [Перейти к основному тексту]

Общий интеграл

Соотношение вида $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно определяющее общее решение, называется *общим интегралом* ДУ первого порядка; соотношение, получаемое из общего интеграла при конкретном значении постоянной C, называется *частным интегралом* ДУ первого порядка. [Перейти к основному тексту]

Ограниченная и неограниченная функции

Функция $f : X \to Y$ называется *ограниченной*, если

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in X \quad |f(x)| \leqslant M.$$

В противном случае, т.е. когда

$$\forall M > 0 \quad \exists x \in X \quad |f(x)| > M,$$

функция f называется *неограниченной*.

[Перейти к основному тексту]

Ограниченная последовательность

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant M$. В противном случае она называется *неограниченной*.

[Перейти к основному тексту]

Одноресурсная производственная функция

Производственная функция одной переменной называется *одноресурсной*. [Перейти к основному тексту]

Однородная функция

Функция $P(x, y)$ называется *однородной степени* m, если для любого t она удовлетворяет равенству

$$P(tx, ty) = t^m P(x, y).$$

[Перейти к основному тексту]

Однородное дифференциальное уравнение

Дифференциальное уравнение (7.7) называют *однородным*, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции одной степени.

[Перейти к основному тексту]

Однородные и неоднородные системы линейных уравнений

Однородной называется система линейных уравнений, свободные члены b_i уравнений которой равны нулю. В противном случае, т.е. когда хотя бы один из свободных членов b_i отличен от нуля, система называется *неоднородной*.

[Перейти к основному тексту]

Односторонние пределы на бесконечности

Число b называется *пределом функции f при $x \to +\infty$*, если для любой такой ББП $\{x_n\}$, что $x_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Аналогично определяется *предел функции при $x \to -\infty$*. Для записи таких пределов применяются обозначения:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

[Перейти к основному тексту]

Односторонние пределы

Правый и левый пределы функции в точке называются *односторонними*. [Перейти к основному тексту]

Окрестность точки

Окрестностью точки называется любой интервал, содержащий эту точку; *ε-окрестностью точки* $x = a$ называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

[Перейти к основному тексту]

Окружность

Окружность — это множество точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии $r > 0$, называемом *радиусом окружности*, от точки $C(x_0, y_0)$ — *центра* (рис. 2.7). [Перейти к основному тексту]

Определённая и неопределённая системы

Совместная система называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой*, если она имеет более одного решения.

[Перейти к основному тексту]

Определенный интеграл

Пусть интегральная сумма (5.17) имеет предел A, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$, ни от выбора точек ξ_k. Другими словами, для произвольного положительного числа ε можно найти такое число δ, что для любого разбиения отрезка $[a, b]$ точками x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющего условию $\lambda < \delta$, при любом выборе точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ выполняется неравенство

$$|\sigma - A| = \left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - A \right| < \varepsilon.$$

Тогда этот предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{O.18}$$

В этом случае функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$, а числа a и b — соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

[Перейти к основному тексту]

Определители второго порядка

Определителем второго порядка квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \qquad (O.19)$$

[Перейти к основному тексту]

Определители первого порядка

Определитель первого порядка квадратной матрицы $A = (a_{11})$ равен самому элементу этой матрицы, а именно $\det A = |A| = a_{11}$.

[Перейти к основному тексту]

Определители третьего порядка

Определителем третьего порядка квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad (O.20)$$

[Перейти к основному тексту]

Определитель произвольного порядка

Определителем квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n называется сумма произведений элементов первой строки матрицы A на их алгебраические дополнения:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}. \qquad (O.21)$$

[Перейти к основному тексту]

Ортогональная система векторов

Набор ненулевых взаимно ортогональных векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ будем называть *ортогональной системой векторов*.

[Перейти к основному тексту]

Ортогональные n-мерные векторы

Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ n-мерного пространства назовём *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. если $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

[Перейти к основному тексту]

Ортогональные векторы

Если $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \pi/2$, то говорят, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ *ортогональны*, и пишут $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

[Перейти к основному тексту]

Ортогональный базис

Базис, образованный ортогональной системой векторов, называется *ортогональным базисом*.

[Перейти к основному тексту]

Ортонормированный базис

Ортогональный базис, длины векторов которого равны единице, называется *ортонормированным*.

[Перейти к основному тексту]

Оси гиперболы

Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, где $B_1 = (0, -b)$ и $B_2 = (0, b)$ (рис. 2.10), а также их длины $2a$ и $2b$ называют соответственно *действительной* и *мнимой осями гиперболы*. [Перейти к основному тексту]

Оси эллипса

Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 (рис. 2.8), а также их длины $2a$ и $2b$ называют соответственно *большой* и *малой осями эллипса*.

[Перейти к основному тексту]

Основная матрица системы

Системе линейных уравнений (О.26) ставят в соответствие матрицу и два вектора-столбца:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

называемые соответственно *основной матрицей*, *вектором неизвестных* и *вектором свободных членов*. *Расширенной матрицей* называется матрица

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

получаемая присоединением к основной матрице вектора-столбца свободных членов.

[Перейти к основному тексту]

Основной прямоугольник гиперболы

Прямоугольник, образованный прямыми $x = -a$, $x = a$, $y = -b$ и $y = b$ (рис. 2.10), называется *основным прямоугольником гиперболы*. [Перейти к основному тексту]

Особое решение дифференциального уравнения

Если во всех точках решения $y = \psi(x)$ уравнения (O.32) условие единственности не выполняется, то такое решение называется *особым*. [Перейти к основному тексту]

Остаток числового ряда

Выражение вида

$$a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots = \sum_{k=i+1}^{\infty} a_k \tag{O.22}$$

также представляет собой ряд, и он называется *i-м остатком ряда* (8.1). Обозначается r_i.

[Перейти к основному тексту]

Остаточный член в форме Лагранжа

Функция $R_n(x)$, определяемая формулой (4.24), называется *остаточным членом в форме Лагранжа*.

[Перейти к основному тексту]

Ось параболы

Ось абсцисс, которая является осью симметрии параболы, называется *осью параболы*.

[Перейти к основному тексту]

Парабола

Парабола (рис. 2.12) — это геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$y^2 = 2px, \quad p > 0, \tag{O.23}$$

называемому *каноническим уравнением параболы*.

[Перейти к основному тексту]

Параметр параболы

Расстояние от фокуса до директрисы, равное p, называется *параметром параболы*.

[Перейти к основному тексту]

Первообразная

Функция F, определенная на интервале (a, b), называется *первообразной* для функции f на этом же интервале, если для всех $x \in (a, b)$ $F'(x) = f(x)$.

[Перейти к основному тексту]

Первый замечательный предел

Равенство (3.6) называется *первым замечательным пределом*.

[Перейти к основному тексту]

Перестановочные матрицы

Матрицы A и B, для которых $AB = BA$, называются *перестановочными*. [Перейти к основному тексту]

Периодическая функция

Функция $f : X \to Y$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для всякого $x \in X$ значение $x + T$ также принадлежит области определения X и $f(x + T) = f(x)$. При этом число T называют *периодом функции*. Наименьший положительный период называют *основным периодом*.

[Перейти к основному тексту]

Подпространство

Подмножество W пространства $\mathbb{R}^n$ будем называть *подпространством*, если для любых двух векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ из W и любого числа k векторы $k\mathbf{a}$ и $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ принадлежат W. [Перейти к основному тексту]

Полное приращение функции

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ называется выражение

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

[Перейти к основному тексту]

Полуоси гиперболы

Отрезки OA_2 и OB_2 (рис. 2.10), представляющие собой половины действительной и мнимой осей, и их длины a и b называют соответственно *действительной* и *мнимой полуосями гиперболы*.

[Перейти к основному тексту]

Полуоси эллипса

Отрезки OA_2 и OB_2 (рис. 2.8), представляющие собой половины большой и малой осей, и их длины a и b называют соответственно *большой* и *малой полуосями эллипса*. [Перейти к основному тексту]

Последовательность числовая

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x_n, то говорят, что определена *числовая последовательность*. Числа x_n, $n \in \mathbb{N}$, называют *элементами* или *членами последовательности*. Для числовой последовательности мы будем использовать следующие обозначения:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots, \quad \{x_n\}, \quad x_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

[Перейти к основному тексту]

Постоянная последовательность

Последовательность x_n называется *постоянной*, если

$$\exists\, a \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad x_n = a,$$

т.е. все элементы последовательности равны некоторому числу a.

[Перейти к основному тексту]

Постоянная функция

Функция, все значения которой равны между собой, называется *постоянной*. Постоянную функцию часто обозначают так же, как и то единственное значение, которое она принимает. [Перейти к основному тексту]

Правый предел

Число c называется *правым пределом функции* f *в точке* $x = a$, если для любой сходящейся к a последовательности $\{y_n\}$, члены которой больше a, соответствующая последовательность $\{f(y_n)\}$ сходится к c (рис. 3.46). Символически это записывается следующим образом:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = c.$$

[Перейти к основному тексту]

Предел последовательности

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n > N_\varepsilon$ имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. На языке кванторов это записывается так:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_\varepsilon \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Для обозначения предела используется выражение

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

[Перейти к основному тексту]

Предел функции двух переменных на языке окрестностей

Число A называется *пределом функции* $f(M)$ *в точке* M_0, если для любой ε-окрестности точки A найдется такая δ-окрестность точки M_0, что для всех точек $M \neq M_0$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(M)$ лежат в ε-окрестности точки A. [Перейти к основному тексту]

Предел функции двух переменных по Гейне

Число A называется *пределом функции f в точке M_0*, если для любой последовательности точек плоскости $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящейся к точке M_0 и такой, что $M_n \neq M_0$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(M_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к числу A.

Тот факт, что число A является пределом функции двух переменных $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, можно записать одним из следующих способов:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A, \qquad \lim_{M\to M_0} f(M) = A.$$

[Перейти к основному тексту]

Предел функции двух переменных по Коши

Число A называется *пределом функции* $f(x,y)$ *в точке* $M_0(x_0,y_0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех точек $M(x,y)$, удовлетворяющих условию

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta,$$

выполняется неравенство $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

Иными словами, число A называется *пределом функции* f *в точке* M_0, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, M,\ 0 < MM_0 < \delta, \quad |f(M) - A| < \varepsilon.$$

[Перейти к основному тексту]

Предел функции на бесконечности

Число b называется *пределом функции f при $x \to \infty$* (или *на бесконечности*), если для любой ББП $\{x_n\}$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b. Для обозначения предела функции на бесконечности применяется запись

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b.$$

[Перейти к основному тексту]

Предел функции на языке окрестностей

Число b называется *пределом функции f в точке $x = a$*, если для любой ε-окрестности точки b найдется такая δ-окрестность точки a, что для всех $x \neq a$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки b.

[Перейти к основному тексту]

Предел функции по Гейне

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $x = a$, за исключением, быть может, самой точки a. Возьмём последовательность точек $\{x_n\}$ из этой окрестности, сходящуюся к точке a. Значения функции в точках последовательности, в свою очередь, образуют последовательность $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, ... (рис. О.1).

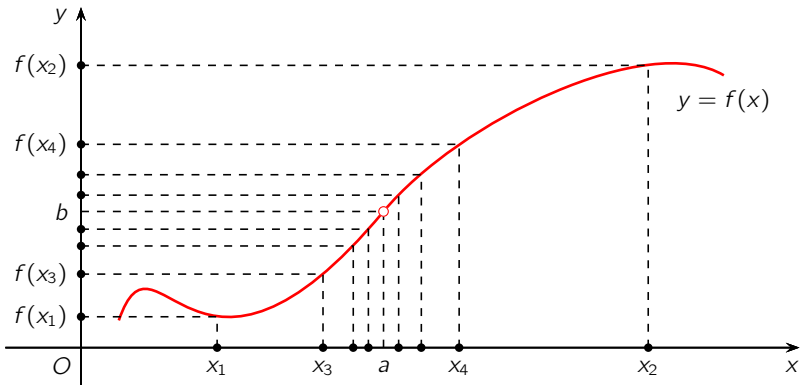

Рис. О.1

Число b называется *пределом функции f в точке $x = a$* (или при $x \to a$), если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a и такой, что $x_n \neq a$ для всех $n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Другими словами, число b называется *пределом функции f в точке $x = a$*, если

$$\forall \{x_n\},\ x_n \neq a\ (n \in \mathbb{N}),\ \lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

Данное определение называется определением *предела функции по Гейне* или *на языке последовательностей*.

Предел функции f в точке $x = a$ обозначается следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

[Перейти к основному тексту]

Предел функции по Коши

Число b называется *пределом функции f в точке $x = a$*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует положительное число δ такое, что для всякого x, удовлетворяющего условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Другими словами, число b называется *пределом функции f в точке $x = a$*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Данное определение называется определением *предела функции по Коши* или *на языке $\varepsilon - \delta$*.

[Перейти к основному тексту]

Предельная производительность труда

Частную производную $\partial F/\partial L$ производственной функции F называют *предельной производительностью труда*.

[Перейти к основному тексту]

Предельная фондоотдача

Частная производная $\partial F/\partial K$ производственной функции F называется *предельной фондоотдачей*.

[Перейти к основному тексту]

Предельные полезности

Предельные полезности выражают дополнительное удовлетворение от потребления одной дополнительной единицы блага. Математически это описывается частными производными функции полезности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}.$$

[Перейти к основному тексту]

Приращение аргумента и функции

Разность $x - a$ называется *приращением аргумента x в точке a* и обозначается Δx, а разность $f(x) - f(a)$ называется *приращением функции f в точке a* и обозначается Δy:

$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = f(x) - f(a),$$

иначе $x = a + \Delta x$, $y = f(a) + \Delta y$.

[Перейти к основному тексту]

Приращение функции по направлению

Приращением функции $z = f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *по направлению* l называется величина

$$\begin{aligned}\Delta_l z &= f(M_0 + \Delta l \cdot \mathbf{e}) - f(M_0) = \\ &= f(x_0 + \Delta l \cos\alpha, y_0 + \Delta l \cos\beta) - f(x_0, y_0),\end{aligned} \tag{O.24}$$

где $\mathbf{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ — единичный вектор направления l (рис. 6.8). [Перейти к основному тексту]

Присоединённая матрица

Матрица A^*, транспонированная к матрице, составленной из алгебраических дополнений квадратной матрицы A, называется *присоединённой к матрице A*. [Перейти к основному тексту]

Продуктивная модель Леонтьева

Неотрицательная матрица A называется *продуктивной*, если для любого неотрицательного вектора Y существует неотрицательное решение X системы (1.17). В этом случае и модель Леонтьева, определяемая матрицей A, также называется продуктивной. [Перейти к основному тексту]

Произведение вектора на число

Произведением вектора $\boldsymbol{a}$ *на число* k называется вектор $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$, длина которого $|\mathbf{b}| = |k||\mathbf{a}|$ и направление совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$, если $k > 0$, и противоположно ему, если $k < 0$ (рис. 1.4).

[Перейти к основному тексту]

Произведение матриц

Произведением AB *согласованных матриц* $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{n\times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ik})$, элемент c_{ik} которой вычисляется как сумма произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk}.$$

Вычисление элемента c_{ik} проиллюстрировано на рис. 1.1. [Перейти к основному тексту]

Произведение матрицы на число

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ *на число* k называется матрица $kA = (ka_{ij})$ того же размера, что и матрица A, полученная умножением всех элементов матрицы A на число k. [Перейти к основному тексту]

Производная n-го порядка

Производной n-го порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка, если она существует. Производная n-го порядка обозначается

$$y^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n y}{dx^n}.$$

[Перейти к основному тексту]

Производная второго порядка

Производной второго порядка функции $f(x)$ называется производная от функции $f'(x)$, если она существует. Ее обозначают

$$y'', \quad f''(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

[Перейти к основному тексту]

Производная по направлению

Пусть направление l задаётся единичным вектором $\mathbf{e}$. *Производной функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 по направлению l* называется предел отношения приращения этой функции в точке M_0 по направлению l к величине Δl при стремлении последней к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(M_0 + \Delta l \cdot \mathbf{e}) - f(M_0)}{\Delta l}.$$

[Перейти к основному тексту]

Производная

Производной функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

[Перейти к основному тексту]

Производственная функция Кобба — Дугласа

Функция

$$F(K, L) = aK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad a > 0,\ 0 < \alpha < 1,$$

выражающая зависимость объёма выпускаемой продукции от объёма основных фондов K и затрат труда L, называется *производственной функцией Кобба — Дугласа*. [Перейти к основному тексту]

Производственная функция

Производственная функция выражает зависимость результатов производства от обусловливающих его факторов.

[Перейти к основному тексту]

Простейшие рациональные дроби

Простейшими рациональными дробями назовем следующие функции:

1) $\dfrac{A}{x-a}$;

2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $\quad k>1,\ k\in\mathbb{N}$;

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+2px+q}\,dx$, $\quad p^2-q<0$;

4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^k}\,dx$, $\quad k>1,\ k\in\mathbb{N},\ p^2-q<0$.

[Перейти к основному тексту]

Противоположная матрица

Матрицу $-A = (-1) \cdot A$ будем называть *противоположной* матрице A.

[Перейти к основному тексту]

Противоположный вектор

Противоположным вектором $-\mathbf{a}$ называется произведение вектора $\mathbf{a}$ на число -1, т.е. $-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a}$.

[Перейти к основному тексту]

Равенство матриц

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинаковых размеров называются *равными*, если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$. [Перейти к основному тексту]

Равнобочная гипербола

Если $a = b$, т.е. действительная и мнимая полуоси равны, то уравнение гиперболы принимает вид $x^2 - y^2 = a^2$. Такая гипербола называется *равнобочной*. Её асимптоты образуют прямой угол и являются биссектрисами координатных углов.

[Перейти к основному тексту]

Равномерно сходящийся функциональный ряд

Говорят, что функциональный ряд (8.8) *равномерно сходится на множестве* D, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad \forall x \in D \quad |S_n - S| < \varepsilon.$$

[Перейти к основному тексту]

Равные векторы

Два вектора называются *равными*, если они имеют равные длины и сонаправлены.

[Перейти к основному тексту]

Радиус сходимости

Число R такое, что при всех x, $|x| < R$, ряд (8.12) сходится, а при всех x, $|x| > R$, расходится (рис. 8.3), называется *радиусом сходимости ряда* (8.12). [Перейти к основному тексту]

Размерность подпространства

Число векторов в базисе подпространства назовём *размерностью подпространства*.

[Перейти к основному тексту]

Разность векторов

Разностью двух векторов **a** и **b** называется сумма вектора **a** и вектора $-\mathbf{b}$, противоположного **b** (рис. 1.8).

[Перейти к основному тексту]

Разность матриц

Разностью матриц A и B одинаковых размеров называется сумма матрицы A и матрицы, противоположной к B, т.е. $A - B = A + (-B)$.

[Перейти к основному тексту]

Ранг матрицы

Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A называется *рангом матрицы* A и обозначается $\operatorname{rank} A$.

[Перейти к основному тексту]

Ранг системы векторов

Число элементов базиса называется *рангом системы векторов*.

[Перейти к основному тексту]

Расстояние между n-мерными точками

Расстоянием M_1M_2 между точками

$$M_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad M_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

называется длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$M_1M_2 = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$

[Перейти к основному тексту]

Рациональные функции

Простейшими элементарными функциями являются *целая рациональная функция*, или *алгебраический многочлен*

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

а также *дробная рациональная функция*

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Множество целых и дробных рациональных функций образует класс *рациональных функций*.

[Перейти к основному тексту]

Решение дифференциального уравнения второго порядка

Решением уравнения (7.14) называется функция, определенная на некотором интервале (a, b), непрерывная и имеющая непрерывные производные до второго порядка включительно, которая обращает это уравнение в тождество на (a, b). График решения называется *интегральной кривой*. [Перейти к основному тексту]

Решение дифференциального уравнения

Решением ДУ называется такая заданная и дифференцируемая на некотором интервале (a, b) функция $y = y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество при допустимых значениях x, например $F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0$ или $y'(x) \equiv f(x, y(x))$. [Перейти к основному тексту]

Решение системы уравнений

Решением системы (О.26) называется набор значений неизвестных

$$x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad \ldots, \quad x_n = c_n,$$

обращающих все уравнения системы в верные равенства. *Решить систему* — значит найти все её решения.

[Перейти к основному тексту]

Ряд Маклорена

Если $x_0 = 0$, то ряд (Д.16) называется *рядом Маклорена* и имеет вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots. \tag{О.25}$$

[Перейти к основному тексту]

Ряд Тейлора

Ряд (Д.16) называется *рядом Тейлора* функции f в окрестности точки $x = x_0$.

[Перейти к основному тексту]

Ряд матрицы

Строки и столбцы матриц объединяют общим названием *ряды*. [Перейти к основному тексту]

Свободный вектор

Свободным вектором или *параллельным переносом* называется совокупность равных между собой векторов.

[Перейти к основному тексту]

Система линейных уравнений

Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (СЛАУ) называется система уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{O.26}$$

Числа a_{ij} называются *коэффициентами* при неизвестных, а b_i — *свободными членами* уравнений системы.

[Перейти к основному тексту]

Скалярное произведение n-векторов

Скалярным произведением n-мерных векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется число, равное сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

[Перейти к основному тексту]

Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначается $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ или просто $\mathbf{ab}$. Итак,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}). \tag{O.27}$$

[Перейти к основному тексту]

Сложная функция

Пусть заданы функции $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ (рис. 3.14). Функция $\varphi : X \to Z$, определяемая по формуле $\varphi(x) = g(f(x))$, называется *сложной функцией* или *суперпозицией функций* $y = f(x)$ и $z = g(y)$.

[Перейти к основному тексту]

Смешанные производные

Частные производные по разным переменным, например z''_{xy} и z''_{yx}, называются *смешанными*.

[Перейти к основному тексту]

Собственные значения и векторы

Число λ называется *собственным значением квадратной матрицы* A, если существует такой ненулевой вектор-столбец X, для которого

$$AX = \lambda X. \tag{O.28}$$

При этом вектор-столбец X, удовлетворяющий равенству (O.28), называется *собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению λ*.

[Перейти к основному тексту]

Совместные и несовместные системы уравнений

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения. [Перейти к основному тексту]

Согласованные матрицы

Две матрицы называются *согласованными*, если число столбцов первой равно числу строк второй.

[Перейти к основному тексту]

Соотношения баланса

Уравнения (1.16) называются *соотношениями баланса* и задают *модель Леонтьева многоотраслевой экономики*.

[Перейти к основному тексту]

Сопряжённые гиперболы

Уравнение

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \tag{O.29}$$

задаёт гиперболу, действительной и мнимой осями которой служат соответственно мнимая и действительная оси гиперболы (O.1). Гиперболы (2.18) и (2.20) имеют общие полуоси, асимптоты и основной прямоугольник и называются *сопряжёнными*.

[Перейти к основному тексту]

Спектр матрицы

Совокупность всех собственных значений квадратной матрицы A с учётом их кратности как корней характеристического уравнения называется *спектром матрицы* A. [Перейти к основному тексту]

Стационарная точка

Стационарной точкой функции f называется точка, в которой производная $f'(x)$ равна нулю.

[Перейти к основному тексту]

Стационарные точки функции двух переменных

Точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума (6.10), будем называть *стационарными точками*.

[Перейти к основному тексту]

Степенной ряд

Функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \tag{O.30}$$

где $c_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \ldots$; $a \in \mathbb{R}$, называется *степенным рядом*. Числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$ называются *коэффициентами степенного ряда* (8.11).

[Перейти к основному тексту]

Степень квадратной матрицы

Если $k \in \mathbb{N}$, то *k-й степенью квадратной матрицы* A называется произведение k матриц A:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ раз}}.$$

По определению считают, что $A^0 = E$.

[Перейти к основному тексту]

Строго возрастающая и строго убывающая последовательности

Если для всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $x_n < x_{n+1}$, то последовательность $\{x_n\}$ называется *строго возрастающей*; если же для $n \in \mathbb{N}$ верно, что $x_{n+1} < x_n$, — то *строго убывающей*. [Перейти к основному тексту]

Строго возрастающие и строго убывающие функции

Функция $f : X \to Y$ называется *строго возрастающей* (*строго убывающей*) *на множестве* $A \subset X$, если для любых $x_1, x_2 \in A$ из того, что $x_1 < x_2$, следует строгое неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

[Перейти к основному тексту]

Строго монотонная последовательность

Строго возрастающие и строго убывающие последовательности называются *строго монотонными*.

[Перейти к основному тексту]

Строго монотонная функция

Строго возрастающие и строго убывающие функции называются *строго монотонными*.

[Перейти к основному тексту]

Ступенчатая матрица

Ступенчатой называется матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,r-1} & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,r-1} & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}, \tag{О.31}$$

где элементы a_{11}, a_{22}, $\dots$, a_{rr} отличны от нуля. Ступенчатыми считаются также матрицы, приводимые к виду (О.31) перестановкой параллельных рядов.

[Перейти к основному тексту]

Сумма векторов

Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — любые два вектора. Поместим начало вектора $\mathbf{b}$ в конец вектора $\mathbf{a}$. Вектор, соединяющий начало вектора $\mathbf{a}$ с концом вектора $\mathbf{b}$, назовём *суммой векторов* $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и будем обозначать $\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Это правило сложения векторов называют *правилом треугольника* (рис. 1.5). [Перейти к основному тексту]

Сумма матриц

Суммой двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ *одинаковых размеров* называется матрица того же размера $A + B = C_{m\times n} = (c_{ij})$, элементы которой равны сумме элементов матриц A и B, расположенных на соответствующих местах:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

[Перейти к основному тексту]

Сходимость в точке

Если числовой ряд (8.10) сходится, то говорят, что функциональный ряд (O.33) *сходится в точке* $x = x_0$. В противном случае функциональный ряд (O.33) *расходится в точке* $x = x_0$. [Перейти к основному тексту]

Сходящаяся и расходящаяся последовательности

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а последовательность, не имеющая предела, — *расходящейся*. Если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к a.

[Перейти к основному тексту]

Сходящаяся последовательность на плоскости

Говорят, что последовательность точек плоскости $\{M_n(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *сходится к точке* $M_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всякого $n > N_\varepsilon$

$$M_nM_0 = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon.$$

[Перейти к основному тексту]

Сходящийся несобственный интеграл

Если предел (5.39) существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*; если же этот предел не существует или бесконечен, то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

называется *расходящимся*.

[Перейти к основному тексту]

Сходящийся числовой ряд

Если последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ имеет конечный предел S, то числовой ряд (О.36) называется *сходящимся*, а число S — *суммой ряда*:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

т.е.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если же предел последовательности $\{S_n\}$ не существует или бесконечен, то ряд (О.36) называется *расходящимся*.

[Перейти к основному тексту]

Точка безубыточности

Точка безубыточности — это такой объём выпуска q, при котором издержки равны выручке: $C(q) = R(q)$.

[Перейти к основному тексту]

Точка перегиба

Точка $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$, называется *точкой перегиба* непрерывной функции f, если слева и справа от этой точки функция f имеет разные направления выпуклости. [Перейти к основному тексту]

Точка разрыва функции двух переменных

Точка, в которой функция не определена или определена, но не является непрерывной, называется *точкой разрыва функции*. [Перейти к основному тексту]

Точка рыночного равновесия

Точка рыночного равновесия (p_0, Q_0) — это точка пересечения линий спроса и предложения (рис. 3.42). При этом цена p_0 называется *равновесной ценой*, а объём продаж Q_0 — *равновесным объёмом продаж*.

[Перейти к основному тексту]

Точка спроса

Точка (x^0, y^0) максимума функции полезности называется *точкой спроса* (рис. 6.19).

[Перейти к основному тексту]

Точки локального условного максимума и минимума

Точка $M_0(x_0, y_0)$, удовлетворяющая уравнению связи $g(x, y) = 0$, называется *точкой локального условного максимума функции* $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для любых точек M из этой окрестности, удовлетворяющих уравнению связи $g(x, y) = 0$, выполнено неравенство $f(M) \leqslant f(M_0)$.

Аналогично при определении *точки локального условного минимума* требуется выполнение неравенства $f(M) \geqslant f(M_0)$.

[Перейти к основному тексту]

Точки разрыва

Точками разрыва функции f называются те точки, в которых функция f не является непрерывной.

[Перейти к основному тексту]

Транспонированная матрица

Матрица A^T, столбцы которой составлены из строк матрицы A с теми же номерами и тем же порядком следования элементов, называется *транспонированной* к матрице A. [Перейти к основному тексту]

Треугольная матрица

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все её элементы ниже главной диагонали равны нулю.

[Перейти к основному тексту]

Угловой коэффициент прямой

Тангенс угла наклона прямой к оси Ox называют *угловым коэффициентом этой прямой* и обозначают буквой k:

$$k = \operatorname{tg} \alpha.$$

[Перейти к основному тексту]

Угол между n-мерными векторами

Косинус угла между n-мерными векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ определяется следующим образом:

$$\cos(\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}}) = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}}.$$

[Перейти к основному тексту]

Угол между векторами

Углом между векторами называется наименьший угол, на который надо повернуть один из векторов, чтобы его направление совпадало с направлением второго. Для угла φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ вводится обозначение $\varphi = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$.

[Перейти к основному тексту]

Угол между прямыми

Углом между прямыми L_1 и L_2 называется угол, на который надо повернуть прямую L_1 против хода часовой стрелки до её совпадения с прямой L_2. Угол между параллельными прямыми считается равным нулю.

[Перейти к основному тексту]

Угол наклона прямой

Назовем *углом наклона данной прямой к оси Ox* угол α, на который нужно повернуть ось Ox против хода часовой стрелки до совпадения с прямой. [Перейти к основному тексту]

Уравнение прямой в отрезках

Уравнение (2.9) называется *уравнением прямой «в отрезках»*.

[Перейти к основному тексту]

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Уравнение (2.4) называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. [Перейти к основному тексту]

Уравнение, записанное в дифференциалах

Уравнение

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0,$$

где x, y имеют тот же смысл, что и выше; dx, dy — дифференциалы; $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — заданные функции, называется *уравнением, записанным в дифференциалах*. [Перейти к основному тексту]

Уравнение, разрешенное относительно производной

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y), \tag{O.32}$$

где f — заданная функция двух переменных x, y, называется *разрешенным относительно* y'.

[Перейти к основному тексту]

Условно сходящийся ряд

Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется *условно сходящимся*, если этот ряд сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

расходится.

[Перейти к основному тексту]

Условный экстремум

Отыскание *условного экстремума* — это задача о нахождении экстремума целевой функции $z = f(x, y)$ при условии, что переменные x и y подчиняются ограничению $g(x, y) = 0$, называемому *уравнением связи*.

[Перейти к основному тексту]

Фокальные радиусы гиперболы

Расстояния r_1 и r_2 (рис. 2.10) от точки M гиперболы до её фокусов F_1 и F_2 называются соответственно *левым* и *правым фокальными радиусами этой точки*. [Перейти к основному тексту]

Фокальные радиусы эллипса

Расстояния r_1 и r_2 (см. рис. 2.8) от точки M эллипса до его фокусов F_1 и F_2 называются соответственно *левым* и *правым фокальными радиусами этой точки*. [Перейти к основному тексту]

Фокальный радиус параболы

Для любой точки $M(x, y)$ параболы отрезок $r = MF$ (см. рис. 2.12) называется *фокальным радиусом параболы*.

[Перейти к основному тексту]

Фокус параболы

Точка $F(\frac{p}{2}, 0)$ (см. рис. 2.12) называется *фокусом параболы*. [Перейти к основному тексту]

Фокусы гиперболы

Положим

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ (рис. 2.10) называются *фокусами гиперболы*.

[Перейти к основному тексту]

Фокусы эллипса

Положим

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

Так как $a \geqslant b > 0$, то $0 \leqslant c < a$. Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ (рис. 2.8) называют *фокусами эллипса*.

[Перейти к основному тексту]

Формула Маклорена

Формула (4.25) называется *формулой Маклорена*.

[Перейти к основному тексту]

Формула Тейлора

Формула (4.22) называется *формулой Тейлора* с остаточным членом в форме Лагранжа.

[Перейти к основному тексту]

Фундаментальная система решений

Фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений называется базис её подпространства решений.

[Перейти к основному тексту]

Функции спроса и предложения

Функции спроса и предложения $D = D(p)$ и $S = S(p)$ задают зависимость спроса и предложения от цены товара p (рис. 3.42). [Перейти к основному тексту]

Функциональный ряд

Ряд вида

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \tag{O.33}$$

где $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, — некоторые функции аргумента x, заданные на множестве X, называется *функциональным рядом*, заданным на множестве X.

[Перейти к основному тексту]

Функция Лагранжа

Функция переменных x, y и λ

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

где $g(x, y)$ — уравнение связи, называется *функцией Лагранжа*, а λ — *множителем Лагранжа*.

[Перейти к основному тексту]

Функция выручки

Функция выручки $R = R(q)$ задаёт зависимость выручки R от объёма выпуска q.

[Перейти к основному тексту]

Функция двух переменных

Обозначим через D некоторое множество точек $M(x, y)$ плоскости $\mathbb{R}^2$. Правило f, ставящее в соответствие каждой упорядоченной паре действительных чисел $(x, y) \in D$ единственное число z из множества действительных чисел $\mathbb{R}$, называется *функцией двух переменных* и обозначается $z = f(x, y)$, $z = f(M)$ либо $f : D \to \mathbb{R}$. Множество D при этом называется *областью определения функции*. Множество

$$\left\{ f(x, y) \;\middle|\; (x, y) \in D \right\}$$

называется *множеством значений функции* f.

[Перейти к основному тексту]

Функция издержек

Функция издержек $C = C(q)$ выражает зависимость издержек производства C от объёма выпуска q.

[Перейти к основному тексту]

Функция полезности двух товаров

Функция полезности $u = u(x, y)$, заданная на пространстве двух благ (товаров), — это субъективная числовая оценка полезности набора товаров (x, y).

[Перейти к основному тексту]

Функция полезности

Функция полезности $u(x)$ даёт субъективную числовую оценку полезности некоторого действия.

[Перейти к основному тексту]

Функция прибыли

Функция прибыли $P = P(q)$ — это зависимость прибыли P от объёма выпуска q.

[Перейти к основному тексту]

Функция спроса на товары

Координаты точки спроса есть функции параметров p_1, p_2, R. Они называются *функциями спроса на первый и второй товары* соответственно:

$$x^0 = x^0(p_1, p_2, R), \quad y^0 = y^0(p_1, p_2, R).$$

[Перейти к основному тексту]

Функция

Пусть X и Y — два произвольных множества (рис. 3.4). Если каждому элементу x из множества X по некоторому правилу f поставлен в соответствие единственный элемент y из множества Y, то говорят, что задана *функция* f. Функцию f, как правило, обозначают $y = f(x)$ или $f : X \to Y$. При этом x называется *независимой переменной* или *аргументом функции*, y — *зависимой переменной* или *значением функции*. Множество X называется *областью определения* или *областью существования функции* f и обозначается $D(f)$. Множество всех значений, принимаемых функцией f, когда аргумент x пробегает всю область определения X, называется *множеством значений функции* f и обозначается $E(f)$:

$$E(f) = \left\{ y \in Y \;\middle|\; y = f(x), x \in X \right\}.$$

[Перейти к основному тексту]

Характеристический многочлен

Определитель основной матрицы однородной системы (1.32)

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \tag{O.34}$$

называется *характеристическим многочленом матрицы* A.

[Перейти к основному тексту]

Характеристическое уравнение

Уравнение (7.19) называется *характеристическим* для дифференциального уравнения (О.11).

[Перейти к основному тексту]

Характеристическое уравнение

Уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

получаемое приравниванием нулю характеристического многочлена матрицы A, называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами матрицы* A. [Перейти к основному тексту]

Центр гиперболы

Начало координат $O(0,0)$ (рис. 2.10), выступающее в роли центра симметрии гиперболы, называют *центром гиперболы*.

[Перейти к основному тексту]

Центр эллипса

Начало координат $O(0,0)$ (рис. 2.8), играющее роль центра симметрии эллипса, называют *центром эллипса*.

[Перейти к основному тексту]

Чётные и нечётные функции

Функция $f : X \to Y$, заданная на симметричном относительно начала координат множестве X, называется *чётной*, если для всех $x \in X$ верно, что $f(-x) = f(x)$, и *нечётной*, если для всех $x \in X$ имеет место равенство $f(-x) = -f(x)$. [Перейти к основному тексту]

Частичная сумма ряда

Сумма первых n членов ряда (O.36) называется *n-й частичной суммой ряда* и обозначается S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

[Перейти к основному тексту]

Частное и общее решения системы уравнений

Каждое отдельное решение неопределённой системы называется *частным*. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

[Перейти к основному тексту]

Частное приращение функции

Частными приращениями функции $z = f(x, y)$ по переменным x и y в точке $M_0(x_0, y_0)$ называются соответственно величины

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0), \quad \Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

[Перейти к основному тексту]

Частное решение дифференциального уравнения второго порядка

Частным решением уравнения (7.14) называют общее решение этого уравнения при фиксированных значениях постоянных.

[Перейти к основному тексту]

Частное решение дифференциального уравнения

Частным решением ДУ (7.1) называется решение, получаемое из общего решения (О.17) при каком-либо определенном значении произвольной постоянной C. [Перейти к основному тексту]

Частные производные второго порядка

Предположим, что функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в точке $M(x, y)$ и в некоторой её окрестности. Если функции $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ сами могут быть продифференцированы, то их частные производные по переменным x и y называются *частными производными второго порядка* и обозначаются следующим образом:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

[Перейти к основному тексту]

Частные производные

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, определённую в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Зафиксировав переменную $y = y_0$, получим функцию одной переменной $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Если функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

то этот предел называется *частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$* и обозначается:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad z'_x(x_0, y_0), \quad f'_x(x_0, y_0),$$

или короче:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \quad z'_x(M_0), \quad f'_x(M_0).$$

Аналогично определяется *частная производная по переменной y*:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = z'_y(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \\ = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

[Перейти к основному тексту]

Число e

Предел последовательности (3.1), существующий в силу теоремы 3.6, обозначается буквой e и называется *постоянной Эйлера*:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . \tag{O.35}$$

[Перейти к основному тексту]

Числовая функция

Если $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$, т.е. X и Y являются числовыми множествами, то функция $f : X \to Y$ называется *числовой*.

[Перейти к основному тексту]

Числовой ряд

Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{O.36}$$

называется *числовым рядом*. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами ряда*, а a_n — *n*-м или *общим членом ряда* (8.1).

[Перейти к основному тексту]

Эквивалентные бесконечно малые функции

Две бесконечно малые при $x \to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными в окрестности точки* a, если

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

В этом случае пишут, что $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$.

[Перейти к основному тексту]

Эквивалентные матрицы

Две матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. При этом пишут $A \sim B$. [Перейти к основному тексту]

Эквивалентные системы уравнений

Две системы называются *эквивалентными*, если совокупности их решений совпадают. В частности, любые две несовместные системы считаются эквивалентными. [Перейти к основному тексту]

Эксцентриситет гиперболы

Эксцентриситетом гиперболы называется число

$$\varepsilon = \frac{c}{a},$$

характеризующее её форму. Так как $c > a$, то $\varepsilon > 1$.

[Перейти к основному тексту]

Эксцентриситет эллипса

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется *эксцентриситетом*

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

[Перейти к основному тексту]

Эластичность функции двух переменных

Эластичностью функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по переменным x и y называются соответственно пределы

$$E_{zx}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta_x z}{z}}{\frac{\Delta x}{x}}, \quad E_{zy}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\Delta_y z}{z}}{\frac{\Delta y}{y}}.$$

[Перейти к основному тексту]

Эластичность функции

Эластичностью функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения относительного изменения функции к относительному изменению аргумента, когда Δx стремится к нулю:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right).$$

[Перейти к основному тексту]

Элементарные преобразования

Будем называть *элементарными преобразованиями матриц*

1) перестановку местами двух параллельных рядов;
2) умножение всех элементов ряда матрицы на число k, отличное от нуля;
3) добавление ко всем элементам любого ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

[Перейти к основному тексту]

Элементарные функции

Функция, составленная из основных элементарных функций с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и суперпозиции, называется *элементарной функцией*. [Перейти к основному тексту]

Элементы матрицы

Числа a_{ij}, образующие матрицу $A = (a_{ij})$, называются её *элементами*, причём индекс i обозначает *номер строки*, а j — *номер столбца*, где расположен данный элемент. [Перейти к основному тексту]

Эллипс

Эллипс (рис. 2.8) — это геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a, b > 0, \tag{O.37}$$

называемому *каноническим уравнением эллипса*.

[Перейти к основному тексту]

Эпсилон-окрестность на плоскости

Внутренность круга с центром в точке M_0 и радиусом ε, т.е. множество

$$U(M_0, \varepsilon) = \left\{ (x, y) \;\middle|\; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2 \right\},$$

называется *ε-окрестностью* или просто *окрестностью точки M_0* (рис. 6.4). [Перейти к основному тексту]

Доказательства теорем

Теорема 1.2

Предположим, что для матрицы A существуют две обратные матрицы: A_1^{-1} и A_2^{-1}. Тогда по определению обратной матрицы

$$A_1^{-1} = A_1^{-1}E = A_1^{-1}(AA_2^{-1}) = (A_1^{-1}A)A_2^{-1} = EA_2^{-1} = A_2^{-1}.$$

Итак, все обратные матрицы совпадают, т.е. обратная матрица единственна.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 1.3

Необходимость. Предположим, что для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Тогда $AA^{-1} = E$, и по свойствам 9 и 5 определителей

$$|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1.$$

Итак, произведение чисел $|A|$ и $|A^{-1}|$ не равно нулю. Значит, каждое из этих чисел не равно нулю и, таким образом, матрица A невырожденная. Заметим также, что $|A^{-1}| = 1/|A|$.

Достаточность. Ограничимся случаем квадратной невырожденной матрицы A третьего порядка. Пользуясь представлением (1.5), найдём произведение матрицы A на её присоединённую A^*:

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{pmatrix}.$$

К элементам, стоящим на главной диагонали полученной матрицы, применим теорему Лапласа, а ко всем остальным — теорему аннулирования. Тогда имеем:

$$AA^* = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |A|E.$$

Аналогично доказывается, что и $A^*A = |A|E$. Итак,

$$A\frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{|A|}(AA^*) = \frac{1}{|A|}(|A|E) = E, \quad \frac{A^*}{|A|}A = \frac{1}{|A|}(A^*A) = E.$$

Отсюда в силу определения обратной матрицы следует её существование и справедливость представления (1.6). [Перейти к основному тексту]

Теорема 1.4

Домножая левую и правую части первого из уравнений слева на матрицу A^{-1}, получаем:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B, \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B, \quad EX = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B.$$

Домножая второе уравнение справа на матрицу A^{-1}, аналогично находим, что $X = BA^{-1}$.
Третье уравнение домножим слева на A^{-1} и справа на C^{-1}:

$$A^{-1}AXCC^{-1} = A^{-1}BC^{-1}, \; EXE = A^{-1}BC^{-1}, \; X = A^{-1}BC^{-1}.$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 1.5

Воспользуемся матричной формой записи решения $X = A^{-1}B$, представлением обратной матрицы (1.6) и определением присоединённой матрицы:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = X = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Но выражение $A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n$ представляет собой разложение определителя (1.14) по элементам i-го столбца, откуда и следует справедливость формул (1.13).

[Перейти к основному тексту]

Теорема 1.6 (критерий Кронекера — Капелли)

В соответствии с рассуждениями при рассмотрении метода Гаусса система совместна в том и только в том случае, если в процессе исключения неизвестных не было получено ни одного уравнения с нулевыми коэффициентами и ненулевым свободным членом. Но, согласно свойствам ранга матрицы, это возможно тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы совпадает с рангом её расширенной матрицы. Для завершения доказательства достаточно вспомнить замечания 1.13 и 1.14.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 1.7

Необходимость. Пусть однородная система имеет ненулевое решение. Предположим от противного, что неравенство $\operatorname{rank} A < n$ неверно. Тогда $\operatorname{rank} A \geqslant n$. Но по свойству 1 ранга матрицы $\operatorname{rank} A \leqslant n$. Отсюда следует, что $\operatorname{rank} A = n$. В этом случае, согласно критерию Кронекера — Капелли, система имеет единственное решение. Это решение может быть только нулевым, поскольку любая однородная система имеет нулевое решение. Полученный вывод приводит к противоречию.

Достаточность. Пусть $\operatorname{rank} A < n$. Тогда на основании критерия Кронекера — Капелли система имеет бесконечно много решений, а значит, и хоть одно ненулевое. [Перейти к основному тексту]

Следствие 1.2

Обозначим через n размер основной матрицы A системы, которая по условию является квадратной. Тогда очевидно, что строгое неравенство $\operatorname{rank} A < n$ равносильно равенству нулю определителя матрицы A.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 1.12

Согласно замечанию 1.18 векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда для некоторого числа k верно равенство $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$. По теореме 1.11 это равносильно покоординатным равенствам $x_1 = kx_2$, $y_1 = ky_2$, $z_1 = kz_2$, которые могут быть переписаны в виде

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k.$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 1.13

Рассмотрим вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. По теореме косинусов (рис. 1.8)

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}),$$

откуда по определению скалярного произведения (1.22)

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{c}|^2\Big). \qquad (Д.1)$$

По формуле (1.18), выражающей длину вектора через его координаты,

$$|\mathbf{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad |\mathbf{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2.$$

Для вектора $\mathbf{c} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ аналогично имеем:

$$\begin{aligned}|\mathbf{c}|^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \\ &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2.\end{aligned}$$

Подставим выражения для длин векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ в равенство (Д.1):

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{1}{2}\Big(2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2z_1z_2\Big) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 1.14

Пусть, например, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$. Тогда

$$1\mathbf{b}_1 + 0\mathbf{b}_2 + \ldots + 0\mathbf{b}_k = \mathbf{0}.$$

Здесь $\lambda_1 = 1 \neq 0$, поэтому система (1.25) линейно зависима.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 1.15

Пусть, например, векторы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_l$, где $l < k$, линейно зависимы. Тогда существуют такие числа λ_1, λ_2, ..., λ_l, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_l\mathbf{b}_l = \mathbf{0}.$$

Отсюда следует равенство

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_l\mathbf{b}_l + 0\mathbf{b}_{l+1} + \ldots + 0\mathbf{b}_k = \mathbf{0},$$

которое и означает линейную зависимость системы (1.25). [Перейти к основному тексту]

Следствие 1.3

Предположим от противного, что данная система содержит зависимую подсистему. Тогда по теореме 1.15 вся система будет также зависимой, что неверно. [Перейти к основному тексту]

Теорема 1.16

Необходимость. Пусть $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$ — линейно зависимые векторы. Тогда существуют такие числа λ_1, λ_2, …, λ_k, из которых хотя бы одно, например λ_l, отлично от нуля, для которых

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_{l-1}\mathbf{b}_{l-1} + \lambda_l\mathbf{b}_l + \lambda_{l+1}\mathbf{b}_{l+1} + \ldots + \lambda_k\mathbf{b}_k = \mathbf{0}.$$

В таком случае

$$\mathbf{b}_l = -\frac{\lambda_1}{\lambda_l}\mathbf{b}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_l}\mathbf{b}_2 - \ldots - \frac{\lambda_{l-1}}{\lambda_l}\mathbf{b}_{l-1} - \frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_l}\mathbf{b}_{l+1} - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_l}\mathbf{b}_k.$$

Значит, вектор $\mathbf{b}_l$ линейно выражается через остальные, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть, например, $\mathbf{b}_l$, где $0 \leqslant l \leqslant k$, выражается через остальные векторы системы:

$$\mathbf{b}_l = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_{l-1}\mathbf{b}_{l-1} + \lambda_{l+1}\mathbf{b}_{l+1} + \ldots + \lambda_k\mathbf{b}_k.$$

Тогда

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_{l-1}\mathbf{b}_{l-1} + (-1)\mathbf{b}_l + \lambda_{l+1}\mathbf{b}_{l+1} + \ldots + \lambda_k\mathbf{b}_k = \mathbf{0},$$

где $\lambda_l = -1 \neq 0$. Значит, система (1.25) линейно зависима. [Перейти к основному тексту]

Теорема 1.17

В этом случае имеет место равенство

$$\lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{b}_k + \lambda \mathbf{a} = \mathbf{0},$$

где хотя бы один из коэффициентов λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_k, λ не равен нулю. Коэффициент λ не может равняться нулю, так как в противном случае система (1.25) оказалась бы линейно зависимой. Теперь, действуя так же, как и при доказательстве теоремы 1.16, линейно выражаем вектор $\mathbf{a}$ через векторы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\ldots$, $\mathbf{b}_k$.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 1.18

Предположим, что наряду с разложением (1.27) имеет место разложение

$$\mathbf{a} = a'_1\mathbf{b}_1 + a'_2\mathbf{b}_2 + \ldots + a'_k\mathbf{b}_k.$$

Вычтем почленно одно разложение вектора $\mathbf{a}$ из другого:

$$\mathbf{0} = (a_1 - a'_1)\mathbf{b}_1 + (a_2 - a'_2)\mathbf{b}_2 + \ldots + (a_k - a'_k)\mathbf{b}_k.$$

В силу линейной независимости системы (1.25) все коэффициенты при векторах этой системы должны быть равны нулю. Значит, имеют место равенства $a_1 = a'_1$, $a_2 = a'_2$, $\ldots$, $a_k = a'_k$, из которых следует единственность разложения.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 1.19

Предположим, что

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Тогда по определению единичных векторов (1.28)

$$\lambda_1(1, 0, \ldots, 0) + \lambda_2(0, 1, \ldots, 0) + \lambda_n(0, 0, \ldots, 1) = (0, 0, \ldots, 0),$$

а значит,

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Отсюда следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Значит, система (1.28) линейно независима.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 1.20

Пусть $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Тогда очевидно, что

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= a_1(1, 0, \ldots, 0) + a_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + a_n(0, 0, \ldots, 1) = \\ &= a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n.\end{aligned}$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 1.21

Система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ линейно зависима тогда и только тогда, когда существует набор чисел λ_1, λ_2, ..., λ_m, среди которых есть не равные нулю, причём линейная комбинация

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}.$$

Подставим вместо векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ их разложения по системе $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_k$:

$$\begin{aligned}\lambda_1\Big(a_{11}\mathbf{b}_1 + a_{12}\mathbf{b}_2 + \ldots + a_{1k}\mathbf{b}_k\Big) + \\ + \lambda_2\Big(a_{21}\mathbf{b}_1 + a_{22}\mathbf{b}_2 + \ldots + a_{2k}\mathbf{b}_k\Big) + \ldots + \\ + \lambda_m\Big(a_{m1}\mathbf{b}_1 + a_{m2}\mathbf{b}_2 + \ldots + a_{mk}\mathbf{b}_k\Big) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые при $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_k$:

$$\begin{aligned}\Big(a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \ldots + a_{m1}\lambda_m\Big)\mathbf{b}_1 + \\ + \Big(a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{m2}\lambda_m\Big)\mathbf{b}_2 + \ldots + \\ + \Big(a_{1k}\lambda_1 + a_{2k}\lambda_2 + \ldots + a_{mk}\lambda_m\Big)\mathbf{b}_k = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

В силу линейной независимости системы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_k$ последнее равенство равносильно однородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \ldots + a_{m1}\lambda_m = 0, \\ a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{m2}\lambda_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1k}\lambda_1 + a_{2k}\lambda_2 + \ldots + a_{mk}\lambda_m = 0. \end{cases}$$

По теореме 1.7 эта система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг r матрицы (1.29) меньше числа неизвестных m. [Перейти к основному тексту]

Теорема 1.22

Пусть подсистема $\mathbf{a}_{n_1}, \mathbf{a}_{n_2}, \ldots, \mathbf{a}_{n_r}$ соответствует базисному минору матрицы A. Тогда ранг матрицы A' этой подсистемы в системе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ равен r и равен числу векторов подсистемы. По теореме 1.21 это означает, что построенная подсистема линейно независимая.

Выберем произвольную подсистему $\mathbf{a}_{n_1}, \mathbf{a}_{n_2}, \ldots, \mathbf{a}_{n_l}$, количество векторов которой l больше ранга r матрицы A. Ранг матрицы A'' этой подсистемы в системе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ не превосходит ранга r всей матрицы A. Таким образом, количество векторов построенной подсистемы больше ранга матрицы A'' этой подсистемы. Согласно теореме 1.21 такая подсистема линейно зависимая. [Перейти к основному тексту]

Теорема 1.23

Добавив к векторам $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$ вектор $\mathbf{a}$, получим систему $n+1$ векторов, каждый из которых в силу теоремы 1.20 представим в виде линейной комбинации линейно независимых по теореме 1.19 n единичных векторов (1.28). Согласно следствию 1.5 система $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$, $\mathbf{a}$ линейно зависима. Для завершения доказательства достаточно вспомнить теоремы 1.17 и 1.18. [Перейти к основному тексту]

Теорема 1.24

Если бы такая система существовала, то по ней, в частности, разлагались бы n единичных векторов (1.28). Так как $n > k$, то, согласно следствию 1.5, система единичных векторов оказалась бы линейно зависимой, что противоречит теореме 1.19. [Перейти к основному тексту]

Следствие 1.6

В качестве $\mathbf{b}_{k+1}$ можно взять какой-либо вектор, не разлагающийся по системе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$. Существование такого вектора обеспечивает теорема 1.24. Повторяем эту процедуру, пока количество векторов в системе не станет равным n.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 1.28

Для $1 \leqslant i \leqslant n$ домножим обе части разложения

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \ldots + a_{i-1}\mathbf{b}_{i-1} + a_i\mathbf{b}_i + a_{i+1}\mathbf{b}_{i+1} + \ldots + a_k\mathbf{b}_k$$

скалярно на вектор $\mathbf{b}_i$:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_i = a_1(\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_i) + a_2(\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{b}_i) + \ldots + a_{i-1}(\mathbf{b}_{i-1}\cdot\mathbf{b}_i) + \\ + a_i(\mathbf{b}_i\cdot\mathbf{b}_i) + a_{i+1}(\mathbf{b}_{i+1}\cdot\mathbf{b}_i) + \ldots + a_k(\mathbf{b}_k\cdot\mathbf{b}_i).$$

В силу ортогональности системы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$ все скалярные произведения в правой части, кроме $\mathbf{b}_i\cdot\mathbf{b}_i$, обратятся в нуль. Значит,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_i = a_i(\mathbf{b}_i\cdot\mathbf{b}_i) = a_i|\mathbf{b}_i|^2,$$

откуда и выводятся представления коэффициентов (1.30). [Перейти к основному тексту]

Теорема 1.29

Предположим, что

$$\lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{b}_k = \mathbf{0}.$$

Тогда по теореме 1.28

$$\lambda_i = \frac{\mathbf{0} \cdot \mathbf{b}_i}{|\mathbf{b}_i|^2} = \frac{0}{|\mathbf{b}_i|^2} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

т.е. все коэффициенты λ_i равны нулю, что и означает линейную независимость рассматриваемой ортогональной системы.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 1.30

Справедливость теоремы следует из формулы (1.30) с учётом того, что знаменатель $|\mathbf{b}_i^2|$ в силу ортонормированности системы равен единице.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 1.31

Число λ — собственное значение матрицы A тогда и только тогда, когда система линейных однородных уравнений (1.32) имеет ненулевые решения. Согласно следствию 1.2 это равносильно равенству нулю определителя основной матрицы рассматриваемой системы, т.е. характеристического многочлена. Последнее утверждение равносильно тому, что λ является характеристическим числом.

[Перейти к основному тексту]

Свойства собственных векторов

Свойство 1

Если λ_1 и λ_2 — два собственных значения, которым соответствует собственный вектор X, то

$$AX = \lambda_1 X, \quad AX = \lambda_2 X.$$

Вычитая эти равенства, имеем: $O = (\lambda_1 - \lambda_2)X$. Поскольку собственный вектор ненулевой, то $\lambda_1 = \lambda_2$.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 2

Все собственные векторы, соответствующие собственному значению λ, являются решениями однородной системы линейных уравнений (1.32) и потому в силу теоремы 1.26 образуют подпространство в $\mathbb{R}^n$.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 3

Пусть собственным векторам X_1 и X_2 соответствуют различные собственные значения λ_1 и λ_2. Если векторы X_1 и X_2 линейно зависимы, то по теореме 1.16 один из этих векторов, например X_1, линейно выражается через другой, т.е. $X_1 = kX_2$, где $k \neq 0$. Тогда по свойству 2 вектор X_1 соответствует собственному значению не только λ_1, но и λ_2, что невозможно в силу свойства 1. [Перейти к основному тексту]

Теорема 2.1

Докажем сначала первое утверждение. Если прямая не перпендикулярна оси Ox, то, как было показано в п. 2.1.2, она определяется уравнением первой степени $y = kx + b$, т.е. уравнением вида (2.8), где $A = k$, $B = -1$ и $C = b$. Если прямая перпендикулярна оси Ox, то все её точки имеют одинаковые абсциссы, равные величине a отрезка, отсекаемого прямой на оси Ox (рис. Д.1). Уравнение такой прямой имеет вид $x = a$. Это частный случай уравнения (2.8), где $A = 1$, $B = 0$, $C = -a$. Первое утверждение доказано.

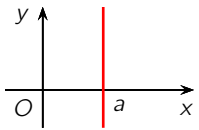

Рис. Д.1

Докажем обратное утверждение. Пусть дано уравнение (2.8), где хотя бы один из коэффициентов (A или B) не равен нулю. Если $B \neq 0$, то это уравнение можно записать в виде

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Полагая $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$, получаем уравнение $y = kx + b$, т.е. уравнение вида (2.4), которое определяет прямую. Если $B = 0$, то $A \neq 0$, и уравнение (2.8) принимает вид $x = -\frac{C}{A}$. Обозначив $a = -\frac{C}{A}$, получим $x = a$, т.е. уравнение прямой, перпендикулярной оси Ox.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 2.3

Для обоснования *необходимости* докажем, что если точка M принадлежит эллипсу, то сумма её фокальных радиусов равна $2a$.

Из рис. 2.8 видно что фокальные радиусы могут быть вычислены по формулам:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{Д.2}$$

Если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то её координаты удовлетворяют уравнению (2.16), откуда

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}, \qquad y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = (a^2 - c^2)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Значит,

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + (a^2 - c^2)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \\ &= \sqrt{\left(x^2 + 2cx + c^2\right) + \left(a^2 - x^2 - c^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2\right)} = \\ &= \sqrt{a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|. \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления дают соотношение для r_2:

$$r_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|.$$

Так как $|x| \leqslant a$ и $0 < c < a$, то $|\frac{c}{a}x| \leqslant a$. Следовательно, выражения под знаками модуля неотрицательны. Тогда

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x, \quad r_2 = a - \frac{c}{a}x. \tag{Д.3}$$

Складывая r_1 и r_2, убеждаемся в справедливости равенства (2.17).

Для доказательства *достаточности* убедимся, что всякая точка M, сумма фокальных радиусов которой равна $2a$, принадлежит эллипсу.

В самом деле, согласно формулам (Д.2),

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Возведем левую и правую части в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Последнее равенство снова возведем в квадрат:

$$a^2\Big((x-c)^2+y^2\Big)=(a^2-cx)^2,$$
$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Поскольку $c^2=a^2-b^2$, то $a^2-c^2=b^2$, и преобразуемое равенство принимает вид

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Деля его левую и правую части на a^2b^2, приходим к каноническому уравнению эллипса (2.16). Таким образом, точка M принадлежит эллипсу.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 2.4

Необходимость. Убедимся, что для всякой точки M гиперболы абсолютная величина разности фокальных радиусов равна $2a$.

Из рис. 2.10 видно, что фокальные радиусы гиперболы могут быть вычислены по формулам:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{Д.4}$$

Если точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе, то её координаты удовлетворяют уравнению (2.18), откуда получаем:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1, \qquad y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) = (c^2 - a^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right).$$

Вычисление r_1 проводим тем же способом, что и при доказательстве теоремы 2.3:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + (c^2 - a^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = \\ &= \sqrt{\left(x^2 + 2cx + c^2\right) + \left(\frac{c^2}{a^2}x^2 - c^2 - x^2 + a^2\right)} = \\ &= \sqrt{a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|. \end{aligned}$$

Аналогично находим:

$$r_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|.$$

Так как для гиперболы $|x| \geqslant a$ и $c > a$, то $|\frac{c}{a}x| > a$. Значит, при раскрытии модулей надо смотреть знак выражения $\frac{c}{a}x$, определяемый знаком аргумента x. Имеем два случая:

1) для правой ветви гиперболы $x \geqslant a$, поэтому

$$r_1 = \frac{c}{a}x + a, \quad r_2 = \frac{c}{a}x - a, \qquad r_1 - r_2 = 2a; \tag{Д.5}$$

2) для левой ветви $x \leqslant -a$, поэтому

$$r_1 = -\frac{c}{a}x - a, \quad r_2 = -\frac{c}{a}x + a, \qquad r_2 - r_1 = 2a. \tag{Д.6}$$

В каждом из указанных случаев верно доказываемое равенство (2.19).

Достаточность. Покажем, что всякая точка M, абсолютная величина разности фокальных радиусов которой равна $2a$, принадлежит гиперболе. В этих условиях, согласно формулам (Д.4),

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a,$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Как и при доказательстве теоремы 2.3, возведем левую и правую части в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$
$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = cx - a^2.$$

Последнее равенство снова возведем в квадрат:

$$a^2\Big((x-c)^2+y^2\Big) = (cx-a^2)^2,$$
$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4,$$
$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

В данном случае $c^2 = a^2 + b^2$. После замены $a^2 - c^2 = -b^2$ будем иметь:

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Деля левую и правую части полученного уравнения на $-a^2b^2$, приходим к каноническому уравнению гиперболы (2.18). Этим доказано, что точка M принадлежит гиперболе. [Перейти к основному тексту]

Теорема 2.5

Отметим, что для всякой точки $M(x, y)$ плоскости фокальный радиус r и расстояние до директрисы d (см. рис. 2.12) вычисляются по формулам:

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad d = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \tag{Д.7}$$

Необходимость. Докажем, что для всякой точки параболы M фокальный радиус r равен расстоянию до директрисы d.

Если точка $M(x, y)$ принадлежит параболе, то координаты x и y удовлетворяют каноническому уравнению (2.21). Тогда, согласно (Д.7),

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \sqrt{\left(x^2 - px + \frac{p^2}{4}\right) + 2px} =$$

$$= \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| = d.$$

Достаточность. Предположим, что точка M равноудалена от фокуса и директрисы, и докажем, что эта точка принадлежит параболе.

В соответствии с предположением для точки $M(x, y)$ имеет место равенство $r = d$. Согласно формулам (Д.7) это означает, что

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Преобразуем это уравнение, возведя обе его части в квадрат:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2, \quad y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2.$$

Применив к правой части последнего равенства формулу разности квадратов, получим уравнение $y^2 = 2px$, которое представляет собой каноническое уравнение параболы (2.21).

[Перейти к основному тексту]

Свойства бесконечно малых последовательностей

Свойство 1

Достаточно получить свойство для суммы двух БМП. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть БМП. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. В соответствии с определением БМП для всякого положительного числа, в том числе и для $\varepsilon/2$, существуют номера N_1 и N_2 такие, что

$$\forall\, n > N_1 \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad \forall\, n > N_2 \quad |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Полагаем $N_\varepsilon = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для любого $n > N_\varepsilon$ будем иметь, что

$$|x_n + y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_\varepsilon \quad |x_n + y_n| < \varepsilon.$$

По определению это означает, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ есть БМП. [Перейти к основному тексту]

Свойство 2

Пусть последовательность $\{x_n\}$ бесконечно малая. Докажем её ограниченность. По определению БМП для всякого $\varepsilon > 0$, в том числе и для $\varepsilon = 1$, существует такой номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всякого $n > N_\varepsilon$ имеет место неравенство $|x_n| < 1$. Положим теперь

$$M = \max\Big\{1, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N_\varepsilon}|\Big\}.$$

Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ будет $|x_n| \leqslant M$. Это и означает, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 3

Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — соответственно бесконечно малая и ограниченная последовательности. Докажем, что последовательность $\{x_n y_n\}$ бесконечно малая. Для этого зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем такое число $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всякого $n > N_\varepsilon$ будет $|x_n y_n| < \varepsilon$.

По определению ограниченной последовательности

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |y_n| \leqslant M.$$

По определению БМП для всякого положительного числа, в том числе и для ε/M, существует такой номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всякого $n > N_\varepsilon$ верно неравенство $|x_n| < \varepsilon/M$. Но тогда при $n > N_\varepsilon$ будет также верна оценка

$$|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M}\, M = \varepsilon,$$

доказывающая свойство.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 4

Справедливость этого свойства следует из того, что всякая БМП является ограниченной последовательностью, а произведение ограниченной последовательности на БМП есть БМП.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 5

Из определения БМП следует, что каким бы малым мы ни выбрали число $\varepsilon > 0$, имеет место неравенство $|a| < \varepsilon$. А это возможно только в том случае, когда $a = 0$. [Перейти к основному тексту]

Теорема 3.1

Пусть $\{x_n\}$ — ББП, все члены которой отличны от нуля. Докажем, что последовательность $\{1/x_n\}$ есть БМП. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению ББП для всякого $A > 0$, в том числе для $A = 1/\varepsilon$,

$$\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_\varepsilon \quad |x_n| > A = \frac{1}{\varepsilon}.$$

В этих условиях $|1/x_n| < 1/A = \varepsilon$.

Итак, для всякого $\varepsilon > 0$ мы смогли подобрать такой номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что при $n > N_\varepsilon$ верно неравенство $|1/x_n| < \varepsilon$. В соответствии с определением это и означает, что последовательность $\{1/x_n\}$ бесконечно малая.

Пусть теперь $\{x_n\}$ — БМП, все члены которой отличны от нуля. Зафиксируем $A > 0$. По определению БМП для всякого $\varepsilon > 0$, в том числе для $\varepsilon = 1/A$,

$$\exists\, N_A \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_A \quad |x_n| < \varepsilon = \frac{1}{A}.$$

В этих условиях $|1/x_n| > 1/\varepsilon = A$. Таким образом, последовательность $\{1/x_n\}$ бесконечно большая.

[Перейти к основному тексту]

Свойства сходящихся последовательностей

Свойство 1

Необходимость. Если $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_\varepsilon \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{x_n - a\}$ есть БМП.

Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n - a\}$ есть БМП. Тогда

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_\varepsilon \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к a.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 2

Предположим противное. Пусть

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad b = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad a \neq b.$$

Тогда последовательности $\{x_n - a\}$ и $\{x_n - b\}$ есть БМП. Введём обозначения: $x_n - a = \alpha_n$, $x_n - b = \beta_n$. Последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — БМП. Имеем: $x_n = a+\alpha_n$, $x_n = b+\beta_n$. Отсюда получим, что $a+\alpha_n = b+\beta_n$ и $a - b = \beta_n - \alpha_n$. Так как $\{\beta_n - \alpha_n\}$ есть БМП, то в соответствии со свойством 5 БМП имеем $b - a = 0$, т.е. $b = a$.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 3

Действительно, сходящаяся к a последовательность $\{x_n\}$ представима в виде $x_n = a + \alpha_n$, где α_n — БМП. По свойству 2 ограниченности БМП

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |\alpha_n| \leqslant M.$$

В этих условиях

$$|x_n| = |a + \alpha_n| \leqslant |a| + |\alpha_n| \leqslant |a| + M,$$

что и доказывает ограниченность последовательности $\{x_n\}$.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 4

Докажем пункты а) и в). По свойству 1

$$x_n - a = \alpha_n, \quad y_n - b = \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ — БМП.

Для доказательства пункта а) покажем, что $\{(x_n + y_n) - (a + b)\}$ является БМП. В самом деле,

$$(x_n + y_n) - (a + b) = (x_n - a) + (y_n - b) = \alpha_n + \beta_n.$$

По свойству 1 БМП сумма двух БМП $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ сама является бесконечно малой, что и требовалось доказать.

Чтобы доказать пункт в), покажем что бесконечно малой является последовательность $\{x_n y_n - ab\}$:

$$x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + b(x_n - a) = x_n \beta_n + b\alpha_n.$$

В силу свойства 3 сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Таким образом, каждое из слагаемых в правой части по свойству 3 БМП ограничено как произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую. Сумма же двух БМП есть БМП по свойству 1 БМП.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 3.2

Предположим противное. Пусть $a < b$. По определению предела последовательности для всякого положительного числа, в том числе и для $\varepsilon = b - a$,

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\varepsilon \quad |x_n - a| < \varepsilon = b - a,$$

или

$$-(b - a) < x_n - a < b - a.$$

Из правого неравенства получаем: для всякого $n > N_\varepsilon$ имеет место неравенство $x_n < b$, что противоречит условию теоремы.

[Перейти к основному тексту]

Следствие 3.1

Действительно, начиная с некоторого номера будем иметь, что $y_n - x_n \geqslant 0$. Следовательно, по теореме 3.2

$$\lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) \geqslant 0,$$

а по свойству 4 сходящихся последовательностей

$$\lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n \geqslant 0.$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 3.6

Покажем, что последовательность (3.1) возрастает. Действительно, с помощью формулы бинома Ньютона (B.5) можно записать:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k}.$$

Поскольку по определению (B.6) биномиальные коэффициенты

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!},$$

то

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\big(n-(n-1)\big)}{n!}\frac{1}{n^n}.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \quad \text{(Д.8)}$$

Теперь запишем по этой же формуле $(n+1)$-й член:

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\ + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Сравним члены x_n и x_{n+1}. Очевидно, что

$$1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Поэтому первые n слагаемых x_{n+1} не меньше соответствующих слагаемых x_n. Учитывая, что x_{n+1} содержит ещё одно дополнительное неотрицательное слагаемое, получим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $x_n < x_{n+1}$, т.е. последовательность x_n возрастает.

Далее докажем, что рассматриваемая последовательность (3.1) ограничена. По формуле (Д.8)

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Воспользуемся неравенством (В.4). Тогда

$$x_n < 1 + \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 3 - \frac{1}{n} < 3, \qquad (Д.9)$$

что и доказывает ограниченность последовательности x_n.

Будучи монотонной и ограниченной, последовательность (3.1) сходится по теореме 3.5.

[Перейти к основному тексту]

Свойства БМФ

Свойство 1

Достаточно доказать это свойство для суммы двух БМФ. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — БМФ при $x \to a$. Докажем, что $\alpha(x) + \beta(x)$ — тоже БМФ при $x \to a$.

Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. Так как $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$, то

$$\exists\, \delta_1 > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta_1, \quad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично для $\beta(x)$

$$\exists\, \delta_2 > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta_2, \quad |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для всякого x, удовлетворяющего условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняются менее обременительные условия $0 < |x - a| < \delta_1$ и $0 < |x - a| < \delta_2$, и поэтому

$$\Big|\alpha(x) + \beta(x)\Big| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, мы доказали, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad \Big|\alpha(x) + \beta(x)\Big| < \varepsilon.$$

Это и означает, что сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ является БМФ при $x \to a$.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 2

Пусть функция $\alpha(x)$ бесконечно малая. Согласно определению для всякого $\varepsilon > 0$, в том числе и для $\varepsilon = 1$,

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |\alpha(x)| < \varepsilon = 1.$$

Итак, $\alpha(x)$ ограничена числом 1 в δ-окрестности точки a.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 3

Пусть $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$, $f(x)$ — ограниченная в некоторой окрестности точки a функция. Докажем, что произведение $\alpha(x)f(x)$ есть БМФ.

По условию существует $\delta_1 > 0$ такое, что функция $f(x)$ ограничена в δ_1-окрестности точки a. Отсюда следует:

$$\exists M > 0 \quad \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta_1, \quad |f(x)| < M.$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Так как $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$, то для всякого положительного числа, в том числе и для ε/M,

$$\exists \delta_2 > 0 \quad \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta_2, \quad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Положим теперь $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда при $0 < |x - a| < \delta$ окажется, что

$$|\alpha(x)f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon,$$

откуда и следует, что $\alpha(x)f(x)$ есть БМФ.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 4

Справедливость этого свойства следует из свойств 2 и 3.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 5

Заметим, что постоянная функция ограничена, и применим свойство 3. [Перейти к основному тексту]

Теорема 3.8

Пусть $\alpha(x)$ — такая БМФ, что $\alpha(x) \neq 0$ при $x \neq a$. Зафиксируем $A > 0$. По определению БМФ для всякого $\varepsilon > 0$, в том числе для $\varepsilon = 1/A$,

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |\alpha(x)| < \varepsilon = \frac{1}{A}.$$

При этом $|1/\alpha(x)| > 1/\varepsilon = A$. Значит, функция $1/\alpha(x)$ бесконечно большая.

Пусть $f(x)$ есть ББФ. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению ББФ для всякого $A > 0$, в том числе для $A = 1/\varepsilon$,

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |f(x)| > A = \frac{1}{\varepsilon}.$$

В таких условиях $|1/f(x)| < 1/A = \varepsilon$, т.е. функция $1/f(x)$ бесконечно малая. [Перейти к основному тексту]

Свойства предела функции

Свойство 1

По определению функция $f(x)$ имеет предел b в точке a тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

А это равносильно тому, что функция $\alpha(x) = f(x) - b$ бесконечно малая при $x \to a$.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 2

Предположим противное. Пусть

$$b = \lim_{x \to a} f(x), \quad c = \lim_{x \to a} f(x), \quad b \neq c.$$

Тогда по свойству 1

$$f(x) = b + \alpha(x), \quad f(x) = c + \beta(x),$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — БМФ при $x \to a$. Приравняем правые части:

$$b + \alpha(x) = c + \beta(x), \quad b - c = \beta(x) - \alpha(x).$$

По свойству 1 БМФ сумма $\beta(x) - \alpha(x)$ двух БМФ является БМФ:

$$\lim_{x \to a} \Big(\beta(x) - \alpha(x) \Big) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$b - c = \lim_{x \to a} (b - c) = \lim_{x \to a} \Big(\beta(x) - \alpha(x) \Big) = 0.$$

Значит, $b = c$, что и доказывает единственность предела.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 3

По свойству 1 имеющая предел b в точке a функция f представима в виде $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$. По свойству 2 БМФ $\alpha(x)$ ограничена в некоторой δ-окрестности точки a, т.е.

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |\alpha(x)| \leqslant M.$$

Тогда в той же окрестности

$$|f(x)| = |b + \alpha(x)| \leqslant |b| + |\alpha(x)| \leqslant |b| + M,$$

Таким образом, функция f в δ-окрестности точки a ограничена числом $M_1 = |b| + M$.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 4

Функция, имеющая предел при $x \to a$, по свойству 3 ограничена в некоторой окрестности точки a. Значит, по свойству 3 БМФ её произведение на БМФ при $x \to a$ является БМФ при $x \to a$.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 5

Пусть

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad b \neq 0.$$

По свойству 1 имеет место представление $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$. По определению БМФ для всякого $\varepsilon > 0$, в том числе для $\varepsilon = |b|/2$,

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |\alpha(x)| < \varepsilon = \frac{|b|}{2}.$$

Тогда для тех же x

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|b + \alpha(x)|} \leqslant \frac{1}{|b| - |\alpha(x)|} \leqslant \frac{1}{|b| - \dfrac{|b|}{2}} = \frac{1}{\dfrac{|b|}{2}} = \frac{2}{|b|}.$$

Следовательно, в δ-окрестности точки a функция $1/f(x)$ ограничена числом $M = 2/|b|$.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 6

Пусть $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$, $f(x)$ имеет отличный от нуля предел при $x \to a$. Тогда функция

$$\frac{\alpha(x)}{f(x)} = \alpha(x)\,\frac{1}{f(x)}$$

является бесконечно малой при $x \to a$ как произведение БМФ на ограниченную в силу свойства 5 функцию.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 7

По свойству 1

$$f(x) - b = \alpha(x), \quad g(x) - c = \beta(x),$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — БМФ при $x \to a$.

Для доказательства пункта а) по свойству 1 достаточно показать, что разность $\big(f(x)+g(x)\big) - (b+c)$ является БМФ при $x \to a$. В самом деле,

$$\big(f(x)+g(x)\big) - (b+c) = \big(f(x)-b\big) + \big(g(x)-c\big) = \alpha(x)+\beta(x).$$

По свойству 1 суммы БМФ $\alpha(x)+\beta(x)$ является БМФ при $x \to a$. Доказательство пункта б) проводится аналогично.

Переходя к пункту в), заметим, что

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - bc &= f(x)g(x) - f(x)c + f(x)c - bc = \\ &= f(x)\big(g(x)-b\big) + c\big(f(x)-b\big) = f(x)\beta(x) + c\alpha(x). \end{aligned}$$

Правая часть последнего равенства есть БМФ при $x \to a$ как сумма двух БМФ. Действительно, функция $f(x)\beta(x)$ бесконечно малая по свойству 4, а функция $c\alpha(x)$ бесконечно малая по свойству 5 БМФ.

Пункт г) доказываем по аналогичной схеме:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} &= \frac{cf(x) - bg(x)}{cg(x)} = \frac{cf(x) - bc + bc - bg(x)}{cg(x)} = \\ &= \frac{c\big(f(x)-b\big) - b\big(g(x)-c\big)}{cg(x)} = \frac{c\alpha(x) - b\beta(x)}{cg(x)}. \end{aligned}$$

Согласно пункту в) предел знаменателя равен $c^2 \neq 0$. Числитель является БМФ. Тогда по свойству 6 вся дробь — БМФ при $x \to a$.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 8 (о пределе промежуточной функции)

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то

$$\exists\, \delta_1 > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta_1, \quad |f(x) - b| < \varepsilon,$$

или $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Поскольку также $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, то

$$\exists\, \delta_2 > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta_2, \quad |g(x) - b| < \varepsilon,$$

или $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$.

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для $0 < |x - a| < \delta$

$$b - \varepsilon < f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g(x) < b + \varepsilon,$$

или $|\varphi(x) - b| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 3.9

При $x \to 0$ как числитель, так и знаменатель стремятся к нулю, поэтому свойство предела частного здесь неприменимо.

Построим окружность радиуса $r = 1$. Возьмём центральный угол с радианной мерой, равной x, где $x \in (0, \pi/2)$. Выполним соответствующие построения (рис. Д.2). Очевидно, что $AB < BC < BD$. Но $AB = \sin x$, $BC = x$, $BD = \operatorname{tg} x$, поэтому $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Преобразуем данное соотношение:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

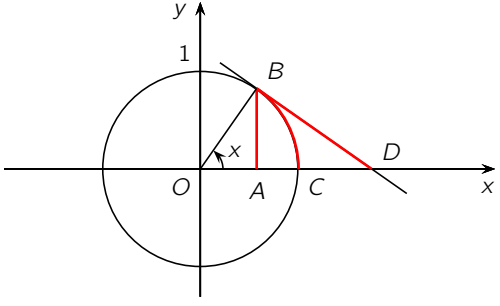

Рис. Д.2

В силу чётности входящих в эти неравенства функций они справедливы и при $x \in (-\pi/2, 0)$. Заметив, что

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1,$$

и применив свойство предела промежуточной функции, получим требуемое равенство (3.6).

[Перейти к основному тексту]

Теорема 3.14

Действительно, пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to a}\Big(f(x) + g(x)\Big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a).$$

Аналогично рассматриваются остальные случаи.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 3.15 (о непрерывности сложной функции)

Возьмём произвольную последовательность точек $\{x_n\}$, для которой

$$\lim_{x\to\infty} x_n = x_0.$$

Тогда из непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 и определения предела функции по Гейне следует, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Обозначив $f(x_n)$ через y_n для $n \in \mathbb{N}$, получим:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Так как функция $g(y)$ непрерывна в точке y_0, то

$$\lim_{y\to y_0} g(y) = g(y_0), \quad \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y_0).$$

Итак, доказано, что для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, соответствующая последовательность $\{g(f(x_n))\}$ сходится к $g(f(x_0))$. Следовательно,

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0)),$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 3.17

Рассмотрим, например, функцию $\sin x$. Тогда для всякого $a \in \mathbb{R}$ будем иметь:

$$\Delta y = \sin(a + \Delta x) - \sin a = 2\cos\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2} =$$

$$= 2\cos\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\,\frac{\Delta x}{2} = \cos\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\,\Delta x.$$

Итак, приращение функции Δy представимо в виде произведения трёх функций: первая ограничена, вторая, согласно формуле (3.6), имеет предел при $\Delta x \to 0$ и третья бесконечно малая при $x \to 0$. Тогда по свойству 4 предела функции и свойству 3 БМФ приращение Δy является БМФ при $\Delta x \to 0$. Согласно определению непрерывности на языке приращений это означает, что функция $y = \sin x$ непрерывна в точке a.

Непрерывность косинуса доказывается аналогично. [Перейти к основному тексту]

Теорема 3.18

В силу непрерывности экспоненты и натурального логарифма

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)} =$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)} = e^{c\ln\lim\limits_{x\to a} f(x)} = e^{c\ln b} = e^{\ln b^c} = b^c.$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 3.20 (об устойчивости знака непрерывной функции)

Пусть, например, $f(a) > 0$. Тогда по определению непрерывности

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Возьмём $\varepsilon = f(a)$. По определению предела для выбранного ε

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon = f(a).$$

Последнее неравенство можно переписать следующим образом:

$$-f(a) < f(x) - f(a) < f(a), \quad 0 < f(x) < 2f(a).$$

Итак, для всех $x \in (a - \delta, a + \delta)$ имеем неравенство $f(x) > 0$, доказывающее теорему.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 3.22 (Больцано — Коши, вторая)

Пусть, например, $f(a) < C < f(b)$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, $\varphi(a) = f(a) - C < 0$ и $\varphi(b) = f(b) - C > 0$. Следовательно, к функции φ можно применить первую теорему Больцано — Коши. В соответствии с ней существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $\varphi(c) = 0$, т.е. $f(c) - C = 0$, или $f(c) = C$.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 4.1

Действительно, обозначим

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Будем иметь:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x) \cdot 0 = 0.$$

Это означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 4.10 (правило Лопиталя)

Пользуясь теоремой Коши, можно записать:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где точка c находится между точками x и a. Иначе говоря,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Если $x\to a$, то и $c\to a$. Поэтому, переходя в последнем равенстве к пределу, получаем утверждение теоремы.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 4.12

Необходимость. Если $f(x) = C$, то для всякого $x \in X$ верно, что $f'(x) = (C)' = 0$.

Достаточность. Пусть $f'(x) = 0 \ \ \forall x \in X$. Фиксируем некоторую точку $x_0 \in X$ и возьмем произвольное $x \in X$. К разности $f(x) - f(x_0)$ можно применить формулу конечных приращений (4.19):

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

где c — некоторая точка, находящаяся между x и x_0. Но по условию $f'(c) = 0$. Следовательно, $f(x) = f(x_0)$ $\forall x \in X$.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 4.13

Пусть, например, $f'(x) > 0$ внутри промежутка X. Тогда возьмем произвольные точки $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. На отрезке $[x_1, x_2]$ к функции f применима формула конечных приращений (4.19):

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

где $c \in (x_1, x_2)$.

Так как $f'(c) > 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. функция f на промежутке X является возрастающей.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 4.15 (первое достаточное условие экстремума)

Пусть производная меняет знак при переходе через точку x_0 с плюса на минус, т.е. $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)\ \ f'(x) > 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)\ \ f'(x) < 0$. Тогда, учитывая достаточное условие монотонности, получаем, что функция f возрастает на интервале $(x_0-\delta, x_0)$, т.е.

$$f(x_0) > f(x) \qquad \forall x \in (x_0-\delta, x_0),$$

и убывает на интервале $(x_0, x_0+\delta)$, т.е.

$$f(x_0) < f(x) \qquad \forall x \in (x_0, x_0+\delta).$$

Из последних двух неравенств и определения 4.8 следует, что x_0 — точка локального максимума функции f.

Аналогично рассматривается случай, когда производная меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0.

Пусть теперь производная не меняет знак при переходе через точку x_0. Предположим, например, что $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\ \ f'(x) > 0$. Тогда по теореме 4.13 функция f возрастает на интервале $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Будем иметь: $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)\ \ f(x) < f(x_0)$ и $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)\ \ f(x) > f(x_0)$. Следовательно, точка x_0 не является точкой локального экстремума.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 4.16 (второе достаточное условие экстремума)

Используя определение второй производной, можем записать:

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Поскольку точка x_0 является стационарной, то по определению 4.15 $f'(x_0) = 0$. Значит,

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Пусть, например, $f''(x_0) > 0$. Тогда, по теореме 3.20 в некоторой окрестности точки x_0 будет выполняться и следующее неравенство:

$$\frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0.$$

Поэтому если $\Delta x < 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) < 0$; если же $\Delta x > 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) > 0$, т.е. при переходе через точку x_0 производная меняет знак с минуса на плюс. А это означает , что x_0 — точка локального минимума (см. теорему 4.15).

Аналогично рассматривается случай, когда $f''(x_0) < 0$.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 4.17 (достаточное условие выпуклости)

Пусть $\forall x \in (a, b)\ \ f''(x) > 0$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$. Запишем уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ (см. формулу (4.2)):

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{Д.10}$$

Теперь запишем формулу Тейлора для функции f в точке x_0 с остаточным членом в форме Лагранжа (4.22), $n = 1$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\theta)(x - x_0)^2,$$

где точка θ находится между x и x_0.

По условию теоремы $\frac{1}{2}f''(\theta)(x - x_0)^2 > 0$. Отсюда можно получить, что

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{Д.11}$$

Поскольку правые части соотношений (Д.10) и (Д.11) совпадают, то из сравнения их левых частей следует, что значение y ординаты касательной меньше значения функции в точке x. Значит, график функции f находится выше касательной, а функция f является выпуклой вниз.

Аналогично рассматривается случай, когда $f''(x) < 0$.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 4.20

Необходимость. Пусть график функции f имеет асимптоту $y = kx + l$ при $x \to +\infty$, т.е. справедливо соотношение (4.27). Тогда из этого соотношения имеем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx + l + \alpha(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{l}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k,$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (l + \alpha(x)) = l.$$

Достаточность. Пусть существуют пределы (4.28). Из второго равенства имеем, что $f(x) - kx = l + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to +\infty$. Это означает, что равенство (4.27) имеет место.

[Перейти к основному тексту]

Свойства неопределенного интеграла

Свойство 1

В силу определения неопределенного интеграла и производной суммы имеем:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x)+C' = f(x).$$

[Перейти к основному тексту]

Свойство 2

Используя то, что дифференциал функции $y = f(x)$ находится по формуле $dy = f'(x)\,dx$, получаем:

$$d\int f(x)\,dx = d(F(x)+C) = dF(x) + d(C) = F'(x)dx = f(x)\,dx.$$

[Перейти к основному тексту]

Свойство 3

В соответствии со свойствами дифференциала и определением первообразной будем иметь:

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Из этого свойства, в частности, следует, что

$$\int dx = x + C.$$

[Перейти к основному тексту]

Свойство 4

Пусть F есть первообразная для функции f, т.е. $F'(x) = f(x)$. Поскольку

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x),$$

то функция kF будет первообразной для функции kf. Значит,

$$\int kf(x)\,dx = kF(x) + C = k(F(x) + C_1) = k\int f(x)\,dx$$

(здесь $C_1 = \dfrac{1}{k}C$ — некоторая постоянная).

[Перейти к основному тексту]

Свойство 5

Пусть F и G — первообразные для функций f и g, т.е.

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x).$$

Поскольку

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x),$$

то функция $F + G$ является первообразной для функции $f + g$. Следовательно,

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x) + C_1 + G(x) + C_2 =$$
$$= (F(x) + G(x)) + (C_1 + C_2) = \int (f(x) + g(x))\,dx.$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 5.2

Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Тогда

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} = (F(x)+C)\Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))+C. \qquad (Д.12)$$

Теперь рассмотрим на промежутке T сложную функцию $F(\varphi(t))$. По теореме 4.4

$$(F(\varphi(t)))' = F'(x)\varphi'(t) = f(x)\varphi'(t),$$

т.е. функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(x)\varphi'(t)$ и

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))+C. \qquad (Д.13)$$

Сравнивая правые части формул (Д.12) и (Д.13), получаем требуемую формулу.

[Перейти к основному тексту]

Замечание 5.3

В рассматриваемом интеграле сделаем замену:

$$ax + b = t, \quad x = \frac{1}{a}t - b, \quad dx = \frac{1}{a}\,dt,$$

тогда

$$\int f(ax+b)\,dx = \int f(t)\frac{1}{a}\,dt = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt = \\ = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 5.3

По правилу дифференцирования произведения имеем:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Отсюда получим:

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x). \qquad (Д.14)$$

Поэтому

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \int \big((u(x)v(x))' - u'(x)v(x)\big)\,dx =$$
$$= \int (u(x)v(x))'\,dx - \int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

[Перейти к основному тексту]

Свойства определенного интеграла

Свойство 2

Для функции $kf(x)$ построим интегральную сумму на отрезке $[a, b]$:

$$\delta = \sum_{k=1}^{n} kf(\xi_x)\Delta x_k.$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{n} kf(\xi_x)\Delta x_k = k\sum_{k=1}^{n} f(\xi_x)\Delta x_k.$$

Тогда, пользуясь определением определенного интеграла, имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} kf(\xi_x)\Delta x_k = \lim_{\lambda\to 0} k\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k =$$

$$= k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

[Перейти к основному тексту]

Свойство 3

Действительно, построив интегральную сумму для $f + g$ на отрезке $[a, b]$, имеем:

$$\sigma_{f+g} = \sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k) + g(\xi_k))\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k = \sigma_f + \sigma_g.$$

После предельного перехода при $\lambda \to 0$ получим равенство (5.19). [Перейти к основному тексту]

Свойство 4

Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ такое, чтобы точка c была точкой разбиения, например $c = x_m$. Будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Переходя в этом равенстве к пределу, получаем соотношение (5.20).

Отметим, что равенство (5.20) остается справедливым и в случае $c \notin (a, b)$. При этом необходимо потребовать существования соответствующих интегралов. [Перейти к основному тексту]

Оценки интегралов

Свойство 1

Действительно, интегральная сумма

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

такой функции является неотрицательной, так как $f(\xi_k) \geqslant 0$, $\Delta x_k \geqslant 0$, когда $k = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, предел интегральных сумм при $\lambda \to 0$, т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

также будет неотрицательным.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 2

Рассмотрим функцию $g(x) - f(x)$. Очевидно, что $g(x) - f(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$ и в соответствии с предыдущим свойством

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx \geqslant 0.$$

Остается применить свойство 3 из п. 5.3.2.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 3

Действительно,

$$\forall\, x \in [a, b] \quad -|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|.$$

Следовательно,

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

т.е. справедливо неравенство (5.21).

[Перейти к основному тексту]

Свойство 4

Воспользовавшись свойством 2, будем иметь:

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx,$$

или

$$m\int_a^b dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\int_a^b dx.$$

Поскольку $\int_a^b dx = b - a$, то получим неравенства (5.22).

[Перейти к основному тексту]

Теорема 5.4 (о среднем значении определенного интеграла)

Так как функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то, согласно второй теореме Вейерштрасса, она достигает своего наименьшего и наибольшего значений, т.е.

$$\forall\, x \in [a, b] \quad m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

где

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x); \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

В соответствии с предыдущим свойством

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Отсюда

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Теперь, воспользовавшись второй теоремой Больцано — Коши, получим, что существует точка $c \in [a, b]$ такая, что

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

т.е. справедлива формула (5.23).

[Перейти к основному тексту]

Теорема 5.5

Действительно, предположим, что f не ограничена на отрезке $[a, b]$. Тогда при любом разбиении отрезка $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ функция будет неограниченной хотя бы на одном отрезке, например $[x_{j-1}, x_j]$. Следовательно, можно выбрать точку $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ и точки

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n,$$

так, чтобы величина $f(\xi_j)\Delta x_j$, а с ней и вся сума

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

были сколь угодно большими.

Таким образом, не будет существовать конечного предела интегральных сумм, т.е. функция f не является интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

Следовательно, интегрируемая функция ограничена на отрезке $[a, b]$. [Перейти к основному тексту]

Теорема 5.9

Достаточно доказать, что существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Из определения функции $\Phi(x)$ и свойства определенного интеграла следует:

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Значит,

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

К полученному интегралу применим теорему о среднем значении. Будем иметь:

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = f(c)\Delta x,$$

где c — некоторая точка, заключенная между x и $x+\Delta x$.

Тогда

$$\frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(c),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c).$$

Теперь заметим, что если $\Delta x \to 0$, то и $c \to x$. Поэтому в силу непрерывности функции f в точке $x \in [a, b]$ имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x).$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 5.10

Пусть $F(x)$ — какая-либо первообразная для непрерывной функции f на $[a, b]$. По теореме 5.9 функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ также является первообразной для f на $[a, b]$. Поскольку любые две первообразные для функции f могут различаться лишь на постоянную (теорема 5.1), то

$$\Phi(x) = F(x) + C, \qquad C = \text{const}, \qquad x \in [a, b]. \tag{Д.15}$$

Положив в формуле (Д.15) $x = a$, получим: $\Phi(a) = F(a) + C$. Но очевидно, что $\Phi(a) = 0$. Значит, $C = -F(a)$. Поэтому равенство (Д.15) можно записать в виде

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Теперь положим здесь $x = b$ и получим формулу Ньютона — Лейбница (5.26).

[Перейти к основному тексту]

Теорема 5.12

Очевидно, что функция $u(x)v(x)$ является первообразной для функции $v(x)u'(x) + u(x)v'(x)$, так как

$$(u(x)v(x))' = v(x)u'(x) + u(x)v'(x).$$

Следовательно,

$$\int_a^b (v(x)u'(x) + u(x)v'(x))\,dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b,$$

или

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int_a^b (v(x)u'(x).$$

В силу того что $u'(x)\,dx = du$, $v'(x)\,dx = dv$, эту формулу можно записать в виде (5.30).

[Перейти к основному тексту]

Замечание 5.4

По определению

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^A x^{-\alpha}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^A \right) =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{A\to+\infty} (A^{1-\alpha} - 1), \quad \alpha \neq 1.$$

Предположим, что $1-\alpha < 0$, т.е. $\alpha > 1$. Тогда имеем, что

$$\lim_{A\to+\infty} (A^{1-\alpha} - 1) = -1, \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{-1}{1-\alpha},$$

т.е. несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и его значение равно $(\alpha-1)^{-1}$.

Пусть теперь $1-\alpha > 0$, т.е. $\alpha < 1$. Тогда

$$\lim_{A\to+\infty} (A^{1-\alpha} - 1) = +\infty$$

и интеграл расходится. Учитывая пример 5.34, заключаем, что интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ расходится при $\alpha \leqslant 1$.

[Перейти к основному тексту]

Замечание 5.5

В этом интеграле функция $f(x) = 1/x^\alpha$ может быть неограниченной в окрестности точки $x = 0$.

По определению имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a_1 \to +0} \int\limits_{a_1}^1 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Случай $\alpha = 1$ рассмотрен в примере 5.36. Этот интеграл расходится.

Если $\alpha \neq 1$, то

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a_1 \to +0} \int\limits_{a_1}^1 x^{-\alpha}\, dx = \lim_{a_1 \to +0} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{a_1}^1 \right) = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{a_1 \to +0} (1 - {a_1}^{1-\alpha}).$$

Рассмотрим два случая: $\alpha < 1$ и $\alpha > 1$. Если $\alpha < 1$, то

$$\lim_{a_1 \to +0} (1 - {a_1}^{1-\alpha}) = 1, \quad \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Если же $\alpha > 1$, то

$$\lim_{a_1 \to +0} (1 - {a_1}^{1-\alpha}) = \lim_{a_1 \to +0} \left(1 - \frac{1}{{a_1}^{\alpha-1}} \right) = -\infty.$$

Следовательно, интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится, если $\alpha < 1$, и расходится, если $\alpha \geqslant 1$.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 6.2 (необходимое условие дифференцируемости)

Непрерывность функции z следует из того, что, согласно равенству (6.1),

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} A\Delta x + \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} B\Delta y + \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \\ + \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y = A\cdot 0 + B\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0.$$

Чтобы исследовать существование частной производной по x функции z, зафиксируем переменную y. Тогда $\Delta y = 0$, и на основании формулы (6.1) частное приращение

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\Delta x.$$

По определению частных производных

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \Big(A + \alpha(\Delta x, 0)\Big) = A + 0 = A.$$

Аналогично доказывается вторая из формул (6.2).

[Перейти к основному тексту]

Теорема 6.4 (о производной сложной функции)

Придадим переменной t приращение Δt. Тогда переменные $x = x(t)$ и $y = y(t)$ получат приращения Δx и Δy, которые, в свою очередь, вызовут приращение Δz функции $z = f(x, y)$. Так как функция z дифференцируема, то по формулам (6.1) и (6.2) её полное приращение

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

Функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы, а следовательно, непрерывны, поэтому их приращения Δx и Δx стремятся к нулю, когда Δt стремится к нулю. Значит,

$$\lim_{\Delta t\to 0} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad \lim_{\Delta t\to 0} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \\ &+ \lim_{\Delta t\to 0}\alpha(\Delta x, \Delta y)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\beta(\Delta x, \Delta y)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + 0\frac{dx}{dt} + 0\frac{dy}{dt},\end{aligned}$$

откуда и следует справедливость доказываемой формулы (6.5).

[Перейти к основному тексту]

Теорема 6.5

Для дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ справедливы формулы (6.1) и (6.2), позволяющие представить приращение по направлению (6.8) в виде

$$\Delta_l z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta l \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta l \cos\beta + \gamma(\Delta l)\Delta l,$$

где $\gamma(\Delta l)$ — бесконечно малая функция при $\Delta l \to 0$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta + \gamma(\Delta l) \right) =$$
$$= \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 7.3

Подставляя функцию (7.18) в (7.17), получаем:

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= (C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(C_1y_1 + C_2y_2) = \\ &= C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) = \\ &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 8.1

По определению n-я частичная сумма ряда (8.1)

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

а m-я частичная сумма ряда (8.2)

$$\sigma_m = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_{i+m}.$$

Следовательно, $\sigma_m = S_{i+m} - S_i$.

Так как i фиксировано, то предел $\{\sigma_m\}$ существует тогда и только тогда, когда существует

$$\lim_{m\to\infty} S_{i+m},$$

т.е. имеет предел последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 8.2

Докажем, например, второе утверждение. Пусть

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k =$$
$$= \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} \sigma_n = S + \sigma.$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 8.3 (необходимое условие сходимости)

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Очевидно, что $S_n - S_{n-1} = a_n$ и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 8.4

Докажем достаточность. Пусть последовательность $\{S_n\}$ ограничена. Заметим, что $S_{n+1} = S_n + a_n \geqslant S_n$, $n \in \mathbb{N}$, так как $a_n \geqslant 0$, т.е. $\{S_n\}$ — возрастающая и ограниченная. Тогда по теореме 3.5 она имеет предел.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 8.6 (признак Д'Аламбера)

Пусть $q < 1$. Выберем такое число $\varepsilon > 0$, чтобы $q+\varepsilon < 1$. Тогда по определению предела последовательности

$$\exists\, N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_0 \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon,$$

или

$$q - \varepsilon < \frac{a_n + 1}{a_n} < q + \varepsilon.$$

Таким образом, $\forall\, n > N_0 \quad a_{n+1} < (q+\varepsilon)a_n$. Отсюда получаем:

$$a_{N_0+2} < (q+\varepsilon)a_{N_0+1},$$
$$a_{N_0+3} < (q+\varepsilon)a_{N_0+2} < (q+\varepsilon)^2 a_{N_0+1},$$
$$a_{N_0+4} < (q+\varepsilon)a_{N_0+3} < (q+\varepsilon)^3 a_{N_0+1}, \ldots .$$

Ряд

$$(q+\varepsilon)a_{N_0+1} + (q+\varepsilon)^2 a_{N_0+1} + (q+\varepsilon)^3 a_{N_0+1} + \ldots$$

сходится, так как $q+\varepsilon \in (0,1)$. Следовательно, по признаку сравнения сходится и ряд

$$\sum_{n=N_0+2}^{\infty} a_n,$$

а с ним — и ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

(применим теорему 8.1).

Случай $q > 1$ рассматривается аналогично. Если же $q = 1$, то можно привести примеры и сходящихся, и расходящихся рядов.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 8.13 (Абеля)

По условию теоремы числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$$

сходится. Согласно необходимому условию

$$\lim_{n\to\infty} c_n x_0^n = 0,$$

поэтому последовательность $\{c_n x_0^n\}$ является ограниченной, т.е.

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, n,\, n = 0, 1, \ldots, \quad |c_n x_0^n| \leqslant M q^n.$$

Пусть x такое, что $|x| < |x_0|$. Тогда

$$|c_n x_0^n| \leqslant |c_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M q^n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $q = \left|x/x_0\right| < 1$. Но ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} M q^n$$

при таких q сходится. Тогда по признаку сравнения сходится и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|\,.$$

[Перейти к основному тексту]

Следствие 8.1

Действительно, если бы ряд (8.12) сходился в точке x, $|x| > |x_1|$, то по теореме Абеля он сходился бы в точке x_1, что противоречит условию.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 8.14

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| .$$

Применим к нему признак Д'Аламбера. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| |x| = l|x|.$$

Отсюда следует, что если $l|x| < 1$, $|x| < 1/l$, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| c_n x^n \right|$$

сходится, а ряд (8.12) сходится абсолютно.

Если $l|x| > 1$, то ряд (8.12) расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n} \right| = l|x| > 1.$$

Следовательно, общий член ряда $c_n x^n$ не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Отметим, что если $l = 0$, то $R = \infty$; если же $l = \infty$, то $R = 0$.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 8.16

Пусть функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд, т.е. справедлива формула (8.17). Тогда по свойству степенных рядов этот ряд можно почленно дифференцировать сколько угодно много раз на интервале сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= c_1 + 2c_2(x-x_0) + 3c_3(x-x_0)^2 + \ldots + nc_n(x-x_0)^{n-1} + \ldots,\\
f''(x) &= 2c_2 + 6c_3(x-x_0) + \ldots + n(n-1)c_n(x-x_0)^{n-2} + \ldots,\\
f'''(x) &= 6c_3 + 24c_4(x-x_0) + \ldots + n(n-1)(n-2)c_n(x-x_0)^{n-3} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 2c_n.
\end{aligned}$$

Полагая в этих равенствах и в формуле (8.17) $x = x_0$, находим:

$$f(x_0) = c_0, \quad f'(x_0) = c_1, \quad f''(x_0) = 2c_2,$$
$$f'''(x_0) = 6c_3, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x_0) = n!\,c_n.$$

Тогда

$$c_0 = f(x_0), \quad c_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad \ldots, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Подставив найденные значения коэффициентов в ряд (8.17), получим:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots. \quad (Д.16)$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что разложение в ряд (Д.16) единственно, т.е. если имеются два разложения по степеням $x = x_0$ одной и той же функции f, то эти разложения имеют равные коэффициенты при одинаковых степенях $x = x_0$.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 8.18 (достаточное условие сходимости ряда Тейлора)

По условию теоремы

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) \quad \left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant M.$$

Рассмотрим остаточный член в форме Лагранжа (8.19). Тогда

$$|R(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leqslant \frac{M\,|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Согласно критерию сходимости это и означает сходимость ряда Тейлора к функции $f(x)$.

[Перейти к основному тексту]

Свойства неопределенного интеграла

Свойство 1

Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Так как

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

то, подставив найденные значения в формулу (8.18), получим требуемое разложение.

Докажем, что полученный ряд сходится и имеет своей суммой функцию e^x. Сначала найдем область сходимости. Для нахождения радиуса сходимости воспользуемся теоремой 8.14:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Значит, ряд сходится на всей числовой прямой. Кроме того, применив теорему 8.18, можно утверждать, что полученный ряд сходится к функции e^x, так как на любом отрезке $[-a, a]$ функция e^x и все ее производные ограничены одним и тем же числом, например e^a.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 2

Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Найдем n-ю производную этой функции. Имеем:

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$f''(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Осталось найти значение функции и ее производных в нуле:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1,$$

заметить, что

$$f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, \qquad k \in \mathbb{N},$$

и подставить найденные значения в формулу (8.18).

Теперь найдем область сходимости полученного степенного ряда. Так как

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

то по достаточному условию сходимости получим, что ряд сходится к функции $\sin x$ на всей числовой прямой.

[Перейти к основному тексту]

Часть II

Задачи

Предисловие
Глава 1. Линейная алгебра
Глава 2. Аналитическая геометрия
Глава 3. Предел последовательности и функции
Глава 4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной
Глава 5. Теория интегрирования
Глава 6. Дифференцирование функций двух переменных
Глава 7. Дифференциальные уравнения
Глава 8. Ряды
Решения и указания
Ответы

Предисловие

Данный задачник является практической частью единого учебного комплекса по дисциплине «Высшая математика» для студентов учреждений высшего образования по экономическим специальностям. Комплекс включает также теоретическую часть, материалом которой необходимо овладеть для успешного решения приводимых здесь задач. Весь комплекс подготовлен одним и тем же коллективом авторов на основе многолетнего опыта чтения лекций и проведения семинарских занятий по высшей математике.

Содержание задачника соответствует теоретической части комплекса. В нём приведены задачи по следующим темам: линейная алгебра, аналитическая геометрия, предел последовательности и функции, дифференциальное исчисление функций одной переменной, теория интегрирования, дифференцирование функций двух переменных, дифференциальные уравнения, ряды.

Квалифицированный специалист экономического профиля при решении своих профессиональных задач может столкнуться с необходимостью построения математических моделей. В целях развития этого полезного практического навыка в книге приводятся задачи с экономическим содержанием, решение которых требует применения математического аппарата.

Общая структура пособия позаимствована из теоретической части: здесь вы найдёте те же главы и параграфы. Большинство задач снабжено ответами, указаниями или решениями. Ответы и указания приведены в конце книги. Каждый блок задач, объединённых общей идеей, содержит решения типовых примеров.

В задачнике имеется довольно много отсылок к теоретической части комплекса. В таких случаях при оформлении ссылки на нумерованный объект теоретической части применяется индекс «т» (первая буква слова «теория») в верхнем индексе. Например, во фразе «Согласно формуле $(1.1)^{\text{т}}$» подразумевается формула (1.1) теоретической части.

Как показывает опыт авторов, приведённых в данном учебном пособии задач с избытком хватит для закрепления материала соответствующих разделов курса. Преподаватель же сможет не только разнообра-

зить выбор задач в пределах каждого раздела и подобрать задания для итоговых занятий и контрольных работ, но и организовать факультативные занятия с наиболее успевающими студентами.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензентам — коллективу кафедры высшей математики Белорусского государственного экономического университета (особо заведующему кафедрой доктору физико-математических наук, профессору М.П. Дымкову) и заведующему кафедрой теории функций Белорусского государственного университета доктору физико-математических наук, профессору В.Г. Кротову, замечания и рекомендации которых способствовали улучшению учебного пособия.

Все отзывы и предложения просьба направлять по адресу: издательство «Вышэйшая школа», пр. Победителей, 11, 220048, Минск.

Авторы

Глава 1

Линейная алгебра

1.1. Матрицы и определители
1.2. Системы линейных алгебраических уравнений
1.3. Векторная алгебра

1.1. Матрицы и определители

1. Найти значение матричного выражения:

1) $2A-4B$, $A=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 4 & -2\\ -5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 4 & -4\\ 7 & 3\end{pmatrix}$; [Решение] [Ответ]

2) $2A-4B$, $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ -5 & 0 & 4\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 6 & -2\\ 4 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$; [Ответ]

3) $-2A-4B$, $A=\begin{pmatrix}-4 & -3 & 4\\ -5 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -5\\ 4 & 4 & -1\end{pmatrix}$; [Ответ]

4) $2A+4B$, $A=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 4 & -3\\ -5 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 4 & 4\\ 4 & 0\end{pmatrix}$; [Ответ]

5) $-3A-5B$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 4\\ 4 & 3 & -4\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & -3 & -2\\ 7 & 3 & 0\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}$; [Ответ]

6) $-2A+4B$, $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & -5\\ 7 & -2 & -2\\ -5 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 1\\ -2 & -4 & 1\\ -2 & 1 & 7\end{pmatrix}$; [Ответ]

7) $-2A-5B$, $A=\begin{pmatrix}2&3&7\\1&0&0\\-2&3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&4\\7&-1&-3\\-2&3&4\end{pmatrix}$; [Ответ]

8) $-3A+3B$, $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&4&1\\-2&-3&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7&6&1\\4&-3&-4\\1&-3&-2\end{pmatrix}$; [Ответ]

9) $-2A+4B$, $A=\begin{pmatrix}-4&-3\\1&-1\\1&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&3\\1&-1\\-5&-1\end{pmatrix}$; [Ответ]

10) $-3A+4B$, $A=\begin{pmatrix}5&-6&-5\\-2&-2&1\\4&-2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7&-3&7\\-5&0&2\\7&-4&1\end{pmatrix}$; [Ответ]

11) $-3A-5B$, $A=\begin{pmatrix}-1&-6\\-5&-3\\-5&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&-3\\1&0\\7&-2\end{pmatrix}$; [Ответ]

12) $-3A-4B$, $A=\begin{pmatrix}-4&0&7\\-5&-2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4&-3&-2\\1&-3&-3\end{pmatrix}$; [Ответ]

13) $-3A+4B$, $A=\begin{pmatrix}-1&6&4\\-2&-2&4\\7&2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&-3&-5\\-5&-4&-2\\-5&2&-5\end{pmatrix}$; [Ответ]

14) $-2A-5B$, $A=\begin{pmatrix}-4&-3&1\\-2&-1&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7&6&4\\1&3&1\end{pmatrix}$; [Ответ]

15) $2A-5B$, $A=\begin{pmatrix}5&0&-2\\4&-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7&6&4\\-5&4&-3\end{pmatrix}$; [Ответ]

16) $-3A+4B$, $A=\begin{pmatrix}-7&6&-5\\-2&0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&-3&4\\7&0&-1\end{pmatrix}$; [Ответ]

17) $-3A-4B$, $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\-5&-2&-4\\1&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7&6&-5\\7&4&3\\-2&-1&4\end{pmatrix}$; [Ответ]

18) $-2A+3B$, $A=\begin{pmatrix}2&3&-2\\-5&-1&-4\\1&-2&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&6&7\\4&4&1\\1&1&1\end{pmatrix}$; [Ответ]

19) $5A-5B$, $A=\begin{pmatrix}-4&6&-2\\-5&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7&-3&-2\\1&3&3\end{pmatrix}$; [Ответ]

20) $-2A-4B$, $A=\begin{pmatrix}-1&-6\\1&1\\-2&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\\4&-3\end{pmatrix}$; [Ответ]

21) $A-\lambda E$, $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$. [Ответ]

2. Найти произведение матриц AB:

1) $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\-2&-1&-2\\0&3&-5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3\\3&5\\-1&-2\end{pmatrix}$; [Решение] [Ответ]

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$; [Ответ]

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -5 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$; [Ответ]

5) $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$; [Ответ]

6) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

7) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -5 & 5 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$; [Ответ]

8) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -4 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$; [Ответ]

9) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

10) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 \\ -4 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; [Ответ]

11) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$; [Ответ]

12) $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

13) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

14) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

15) $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

16) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

17) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

18) $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

19) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & -4 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

20) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -3 \\ 3 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. [Ответ]

3. Найти произведение матриц AB:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$; [Решение] [Ответ]

2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -4 & -5 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

4) $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; [Ответ]

5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

6) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$; [Ответ]

7) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$; [Ответ]

8) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

9) $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

10) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

11) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

12) $A = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. [Ответ]

4. Найти и сравнить произведения AB и BA:

1) $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; [Ответ]

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$; [Ответ]

4) $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

5) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

6) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$; [Ответ]

7) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$; [Ответ]

8) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$; [Ответ]

9) $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$; [Ответ]

10) $A = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; [Ответ]

11) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

12) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$; [Ответ]

13) $A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

14) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

15) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

16) $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

17) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. [Ответ]

5. Найти произведение трёх матриц:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; [Решение] [Ответ]

2) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

3) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

4) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

5) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

6) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

7) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

8) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

9) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

10) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

11) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

12) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

13) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

14) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

15) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

16) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -5 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

17) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

18) $\begin{pmatrix} -4 & -5 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

19) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. [Ответ]

6. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

1) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 4, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

2) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 4x - 7, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

3) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 4x + 9, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

4) $f(x) = 4x^2 - 3x - 7, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

5) $f(x) = -2x^2 - 3x + 8, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix};$ [Ответ]

6) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - x - 5, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix};$ [Ответ]

7) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$ [Ответ]

8) $f(x) = x^2 + 3x - 5, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix};$ [Ответ]

9) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};$ [Ответ]

10) $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$ [Ответ]

11) $f(x) = x^2 + 4x - 6, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix};$ [Решение] [Ответ]

12) $f(x) = -x^3 + x^2 - x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};$ [Ответ]

13) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 3, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix};$ [Ответ]

14) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 3, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix};$ [Ответ]

15) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 6, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix};$ [Ответ]

16) $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 7, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ [Ответ]

17) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix};$ [Ответ]

18) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 9, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ [Ответ]

19) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 8, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix};$ [Ответ]

20) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$ [Ответ]

7. Вычислить произведения AA^T и A^TA, если:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; [Решение] [Ответ]

2) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ -3 & -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

4) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

5) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

6) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;

8) $A = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -3 & -5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

9) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

10) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

11) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

12) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. [Ответ]

8. Вычислить определитель второго порядка:

1) $\begin{vmatrix} 8 & -8 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}$; [Решение] [Ответ]

2) $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}$; [Ответ]

3) $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$; [Ответ]

4) $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}$; [Ответ]

5) $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$; [Ответ]

6) $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -7 & -5 \end{vmatrix}$; [Ответ]

7) $\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$; [Ответ]

8) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}$; [Ответ]

9) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}$; [Ответ]

10) $\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$; [Ответ]

11) $\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$; [Ответ]

12) $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -7 & 7 \end{vmatrix}$; [Ответ]

13) $\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$; [Ответ]

14) $\begin{vmatrix} -10 & 14 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$; [Ответ]

15) $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}$; [Ответ]

16) $\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}$; [Ответ]

17) $\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}$; [Ответ]

18) $\begin{vmatrix} -1 & -8 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}$; [Ответ]

19) $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$; [Ответ]

20) $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$; [Ответ]

21) $\begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}$; [Ответ]

22) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$; [Ответ]

23) $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$; [Ответ]

24) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\varphi & 1 \\ -1 & \operatorname{tg}\varphi \end{vmatrix}$. [Ответ]

9. Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0$; [Ответ]

3) $\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = -6;$ [Ответ]

4) $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ -y-3 & x-2 \end{vmatrix} = 0;$ [Ответ]

5) $\begin{vmatrix} \sin 2x & \sin x \\ \cos x & \cos 2x \end{vmatrix} = 0;$ [Ответ]

6) $\begin{vmatrix} 2x-3 & 4 \\ -x & -3 \end{vmatrix} = 0;$ [Ответ]

7) $\begin{vmatrix} x+3 & x+1 \\ x-1 & x-2 \end{vmatrix} = 0;$ [Ответ]

8) $\begin{vmatrix} 3-x & x+2 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix} = 6;$ [Ответ]

9) $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 1-y & x-2 \end{vmatrix} = -4;$ [Ответ]

10) $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 7-y & x+4 \end{vmatrix} = -34;$ [Ответ]

11) $\begin{vmatrix} \sin 2x & -\sin 3x \\ \cos 2x & \cos 3x \end{vmatrix} = 0.$ [Ответ]

10. Вычислить определитель третьего порядка:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix};$ [Решение] [Ответ]

2) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; [Ответ]

3) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; [Ответ]

4) $\begin{vmatrix} -5 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$; [Ответ]

5) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{vmatrix}$; [Ответ]

6) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; [Ответ]

7) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; [Ответ]

8) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; [Ответ]

9) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix}$; [Ответ]

10) $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \\ -3 & -3 & -5 \end{vmatrix}$; [Ответ]

11) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$; [Ответ]

12) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; [Ответ]

13) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$; [Ответ]

14) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \\ -3 & -3 & -5 \end{vmatrix}$; [Ответ]

15) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & -5 \end{vmatrix}$; [Ответ]

16) $\begin{vmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; [Ответ]

17) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$; [Ответ]

18) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -5 \\ -3 & 4 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{vmatrix}$; [Ответ]

19) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ -4 & -3 & 4 \end{vmatrix}$; [Ответ]

20) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -5 \\ -1 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$; [Ответ]

21) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$; [Ответ]

22) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$; [Ответ]

23) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix}$; [Ответ]

24) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}$; [Ответ]

25) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$; [Ответ]

26) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & 0 \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ 0 & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}$; [Ответ]

27) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$; [Ответ]

28) $\begin{vmatrix} a & a^2+1 & (a+1)^2 \\ b & b^2+1 & (b+1)^2 \\ c & c^2+1 & (c+1)^2 \end{vmatrix}$; [Ответ]

29) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$. [Ответ]

11. Решить уравнения и неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0;$ [Решение] [Ответ]

2) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0;$ [Ответ]

3) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ x-1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$ [Ответ]

4) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2x+3 \\ 3-x & 1 & 1 \\ 2x+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$ [Ответ]

5) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & x-1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 4 & x+2 & 2 \end{vmatrix} = 0;$ [Ответ]

6) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & x+5 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \leqslant 4;$ [Ответ]

7) $\begin{vmatrix} x+2 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & x-1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0;$ [Ответ]

8) $\begin{vmatrix} -3 & x-1 & 1 \\ x+2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 6;$ [Ответ]

9) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ x+2 & 0 & 1 \\ -2 & 3-x & 1 \end{vmatrix} < 0.$ [Ответ]

12. Вычислить определитель четвёртого порядка:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix};$ [Решение] [Ответ]

2) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix};$ [Ответ]

3) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix};$ [Ответ]

4) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix};$ [Ответ]

5) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; [Ответ]

6) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; [Ответ]

7) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; [Ответ]

8) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 3 & -2 \end{vmatrix}$; [Ответ]

9) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$; [Ответ]

10) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; [Ответ]

11) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; [Ответ]

12) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; [Ответ]

13) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; [Ответ]

14) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; [Ответ]

15) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; [Ответ]

16) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; [Ответ]

17) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; [Ответ]

18) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; [Ответ]

19) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; [Ответ]

20) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; [Ответ]

21) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -x \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; [Ответ]

22) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; [Ответ]

23) $\begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 3 & d & x \end{vmatrix}$; [Ответ]

24) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & x \\ 1 & 3 & 1 & y \\ 3 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$; [Ответ]

25) $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$. [Ответ]

13. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 9 & 6 & -1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; [Решение] [Ответ]

2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$; [Ответ]

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; [Ответ]

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 5 & 7 & -5 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; [Ответ]

5) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; [Ответ]

6) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; [Ответ]

7) $\begin{vmatrix} a & 0 & c & 0 & 0 & b \\ 0 & d & 0 & b & c & 0 \\ b & 0 & a & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ c & 0 & b & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & a \end{vmatrix}$. [Ответ]

14. Вычислить определители приведением к треугольному виду:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ n & n & n & \dots & n & 2n \end{vmatrix}$; [Решение] [Ответ]

2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$; [Указание] [Ответ]

3) $\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \\ n-2 & n-1 & n & \dots & 4 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$; [Ответ]

4) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 0 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 0 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; [Ответ]

5) $\begin{vmatrix} a & -b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & -b \\ -b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$; [Ответ]

6) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$. [Ответ]

15. Для матрицы второго порядка найти обратную:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$; [Решение] [Ответ]

2) $\begin{pmatrix} -3 & -15 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$; [Ответ]

3) $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -7 & -38 \end{pmatrix}$; [Ответ]

4) $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 15 & 23 \end{pmatrix}$; [Ответ]

5) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

6) $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

7) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}$; [Ответ]

8) $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -7 & -18 \end{pmatrix}$; [Ответ]

9) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

10) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}$; [Ответ]

11) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -12 & -3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

12) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; [Ответ]

13) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

14) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; [Ответ]

15) $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$; [Ответ]

16) $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

17) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

18) $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -6 & -13 \end{pmatrix}$; [Ответ]

19) $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -6 & -14 \end{pmatrix}$; [Ответ]

20) $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. [Ответ]

16. Для матрицы третьего порядка найти обратную:

1) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; [Решение] [Ответ]

2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ -6 & -3 & 16 \\ -9 & -4 & 20 \end{pmatrix}$; [Ответ]

3) $\begin{pmatrix} -25 & -15 & -10 \\ 20 & 15 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

4) $\begin{pmatrix} -18 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

5) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 6 \\ -4 & -4 & 15 \end{pmatrix}$; [Ответ]

6) $\begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & 16 & -10 \end{pmatrix}$; [Ответ]

7) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & -25 \\ 2 & 1 & -35 \end{pmatrix}$; [Ответ]

8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -2 & -3 & -20 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; [Ответ]

9) $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 \\ -4 & -12 & -14 \\ -12 & -24 & -28 \end{pmatrix}$; [Ответ]

10) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & -14 \\ -3 & 3 & -19 \end{pmatrix}$; [Ответ]

11) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 18 \\ 0 & -1 & 6 \\ -1 & -2 & 15 \end{pmatrix}$; [Ответ]

12) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 8 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

13) $\begin{pmatrix} 36 & 8 & -12 \\ 1 & -1 & 0 \\ -16 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; [Ответ]

14) $\begin{pmatrix} -16 & -4 & -12 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; [Ответ]

15) $\begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 15 & -6 & -3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

16) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

17) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -18 \\ 1 & 3 & 24 \\ -1 & -1 & -15 \end{pmatrix}$; [Ответ]

18) $\begin{pmatrix} 95 & 20 & -15 \\ -4 & -2 & 0 \\ 40 & 10 & -5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

19) $\begin{pmatrix} -22 & 8 & 4 \\ -11 & 3 & 2 \\ 10 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

20) $\begin{pmatrix} 18 & 4 & 4 \\ -54 & -18 & -12 \\ 12 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. [Ответ]

17. Для следующей матрицы найти обратную:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$; [Ответ]

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. [Ответ]

18. Решить матричное уравнение:

1) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 6 & -13 \end{pmatrix}$; [Ответ]

2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$; [Ответ]

3) $X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$; [Ответ]

4) $X \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -6 & -14 \end{pmatrix}$; [Ответ]

5) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 22 & 13 \\ 3 & -24 \end{pmatrix}$; [Ответ]

6) $X\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -7 & 3\end{pmatrix}$; [Ответ]

7) $\begin{pmatrix}5 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}14 & -12\\ 7 & -9\end{pmatrix}$; [Ответ]

8) $X\begin{pmatrix}5 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -6\\ -4 & -2\end{pmatrix}$; [Ответ]

9) $\begin{pmatrix}5 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32 & 2\\ -3 & -33\end{pmatrix}$; [Решение] [Ответ]

10) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & -1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}0 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 8\\ -3 & -59\end{pmatrix}$; [Ответ]

11) $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -5 & 7\end{pmatrix}$; [Ответ]

12) $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & -3\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -16\\ 6 & 12\end{pmatrix}$; [Ответ]

13) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -12\\ -2 & 9\end{pmatrix}$; [Ответ]

14) $\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -3\\ -28 & -16\end{pmatrix}$; [Ответ]

15) $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}44 & -11\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; [Ответ]

16) $X\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\-2&0&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\2&-4&8\\1&6&-2\end{pmatrix}$; [Ответ]

17) $X\begin{pmatrix}1&-1&-3\\1&0&-3\\-2&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-7\\-1&-2&5\\1&0&-4\end{pmatrix}$; [Ответ]

18) $\begin{pmatrix}1&-1&-10\\-1&0&10\\-1&0&5\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}20&2&-4\\-23&-2&7\\-13&-2&2\end{pmatrix}$; [Ответ]

19) $\begin{pmatrix}1&-8&-3\\1&-12&-5\\-1&8&4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-9&17&-20\\-13&23&-32\\7&-14&22\end{pmatrix}$; [Ответ]

20) $\begin{pmatrix}-1&-4&-8\\-1&-8&-10\\1&8&8\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-18&-19&14\\-32&-17&12\\30&11&-6\end{pmatrix}$; [Ответ]

21) $\begin{pmatrix}3&0&-2\\-3&1&0\\-9&-1&6\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\-8&-6&-1\\-4&12&1\end{pmatrix}$; [Ответ]

22) $X\begin{pmatrix}1&-1&10\\-1&0&-5\\-2&2&-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&-5\\-1&3&-10\\4&-7&40\end{pmatrix}$; [Ответ]

23) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & 6 \\ 12 & -9 & 16 \end{pmatrix}$. [Ответ]

19. Найти ранг матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 & -1 \\ -10 & -10 & -6 & 2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

2) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$; [Ответ]

3) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

4) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

5) $\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

6) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 2 \\ 7 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

7) $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

8) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

9) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

10) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

11) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; [Ответ]

12) $\begin{pmatrix} 18 & 13 & 19 & -11 \\ -3 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

13) $\begin{pmatrix} -9 & 0 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & -3 & 5 \\ 6 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

14) $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & 12 & 7 & -5 & 6 \end{pmatrix}$; [Ответ]

15) $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \\ -1 & -10 & 3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

16) $\begin{pmatrix} 1 & -9 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

17) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

18) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

19) $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 3 \\ 12 & -5 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

20) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

21) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

22) $\begin{pmatrix} -4 & -9 & -3 & 7 & -4 \\ -3 & -6 & 3 & 5 & -4 \\ -3 & -3 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

23) $\begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

24) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & -4 \\ 16 & 14 & 6 & -14 \\ -3 & -3 & -1 & 3 \\ -11 & -10 & -4 & 10 \end{pmatrix}$; [Ответ]

25) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 & 1 & 4 \\ -10 & 4 & -12 & 6 & 2 \\ 10 & -4 & 12 & -6 & -2 \\ -4 & 3 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

26) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

27) $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & -2 & 5 \\ 6 & 4 & 16 & -2 & 20 \\ 2 & 7 & 21 & -1 & 25 \\ -4 & 3 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

28) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 5 & -4 & 1 \\ 9 & 12 & 6 & -6 & -12 \\ -3 & -4 & -2 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

29) $\begin{pmatrix} 9 & -7 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 11 & 7 \\ 6 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

30) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & -2 & 1 \\ -6 & -1 & -3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 36 & -4 & 4 \end{pmatrix}$; [Ответ]

31) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ -5 & -11 & -11 & -2 \\ 2 & 5 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & 2 & 12 \end{pmatrix}$; [Ответ]

32) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 & 1 & 1 \\ -15 & 6 & 6 & -3 & -11 \\ 33 & -12 & -15 & 6 & 18 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

33) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -3 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 8 & 11 & 2 & 7 \end{pmatrix}$; [Решение] [Ответ]

34) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ -16 & -18 & -10 & -8 \\ 5 & 3 & 3 & 5 \\ 12 & 3 & 7 & 16 \end{pmatrix}$; [Ответ]

35) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$; [Ответ]

36) $\begin{pmatrix} 16 & 3 & -12 & -8 & 24 & 12 \\ -28 & -5 & 20 & 14 & -42 & -20 \\ 20 & 6 & -15 & -16 & 48 & 24 \\ -35 & -10 & 25 & 28 & -84 & -40 \end{pmatrix}$; [Ответ]

37) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & -11 & 16 \\ 4 & 12 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. [Ответ]

1.2. Системы линейных алгебраических уравнений

1.2.1. Общие задачи
1.2.2. Экономический профиль

1.2.1. Общие задачи

20. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера (1.13):

1) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x - y = 15; \end{cases}$ [Решение] [Ответ]

2) $\begin{cases} -2x - 6y = 10, \\ 2x + 5y = -8; \end{cases}$ [Ответ]

3) $\begin{cases} 2x - 8y = 10, \\ 3x - 10y = 11; \end{cases}$ [Ответ]

4) $\begin{cases} x + 2y = -7, \\ 5x + 5y = -10; \end{cases}$ [Ответ]

5) $\begin{cases} -6x + 6y = -24, \\ -3x - y = -16; \end{cases}$ [Ответ]

6) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 5x + 8y = -15; \end{cases}$ [Ответ]

7) $\begin{cases} 2x - 3y = -5, \\ 10x - 13y = -23; \end{cases}$ [Ответ]

8) $\begin{cases} -6x - 6y = 24, \\ 3x + y = -8; \end{cases}$ [Ответ]

9) $\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ -15x + 14y = -1; \end{cases}$ [Ответ]

10) $\begin{cases} 6x + 6y = 12, \\ 12x + 17y = 14; \end{cases}$ [Ответ]

11) $\begin{cases} 8x - 6y + 5z = 15, \\ 13x - 10y + z = 32, \\ 2x - 2y + z = 5; \end{cases}$ [Решение] [Ответ]

12) $\begin{cases} 7x + 9y + z = 8, \\ 13x + 15y + 9z = 6, \\ 2x + 3y + z = 2; \end{cases}$ [Ответ]

13) $\begin{cases} -8x + 4y = 12, \\ 2y - 5z = 7, \\ 3x - 2y + z = -6; \end{cases}$ [Ответ]

14) $\begin{cases} -10x + 9y - 2z = -28, \\ -17x + 15y - 4z = -47, \\ -4x + 3y = -10; \end{cases}$ [Ответ]

15) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 23, \\ -4x_1 + 2x_3 - 4x_4 = -10, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -6, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 25; \end{cases}$ [Ответ]

16) $\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 2, \\ -4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -18, \\ -5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -23, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -1; \end{cases}$ [Ответ]

17) $\begin{cases} 4x + 9y - 8z = 13, \\ 7x + 15y - 6z = 22, \\ 2x + 3y - 2z = 5; \end{cases}$ [Ответ]

18) $\begin{cases} -5x - 6y + 2z = 17, \\ 13x + 15y - 14z = -43, \\ 2x + 3y - 2z = -8; \end{cases}$ [Ответ]

19) $\begin{cases} 9x + 4y + 2z = 2, \\ 7x + 2y + 4z = -2, \\ -4x - 2y = -2; \end{cases}$ [Ответ]

20) $\begin{cases} 4x - 6y + 2z = -12, \\ -5x + 2y + 4z = 3, \\ 2x - 2y = -4; \end{cases}$ [Ответ]

21) $\begin{cases} -14x + 9y + 5z = -5, \\ -17x + 15y + z = -2, \\ -4x + 3y + z = -1; \end{cases}$ [Ответ]

22) $\begin{cases} -11x - 6y - 2z = 23, \\ -17x - 10y - 4z = 37, \\ -4x - 2y = 8; \end{cases}$ [Ответ]

23) $\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + 4x_3 + 2x_4 = -6, \\ 4x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 11, \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 10; \end{cases}$ [Ответ]

24) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ -6x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 3, \\ -3x_1 + x_3 - 3x_4 = 10, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -12; \end{cases}$ [Ответ]

25) $\begin{cases} -6x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 9x_4 = -5, \\ -3x_1 + 6x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 12, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_2 + x_3 = 12; \end{cases}$ [Ответ]

26) $\begin{cases} -7x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 9x_4 = -2, \\ -7x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 6x_4 = -5, \\ -2x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -3, \\ -x_1 - 2x_3 = -4; \end{cases}$ [Ответ]

27) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 9x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 14, \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -11, \\ 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$ [Ответ]

28) $\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 25, \\ 3x_2 + 2x_4 = 9, \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 12, \\ x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 17; \end{cases}$ [Ответ]

29) $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 3, \\ -2x_1 - x_3 - 2x_4 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -6; \end{cases}$ [Ответ]

30) $\begin{cases} -4x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = -16, \\ 9x_1 + 8x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 31, \\ 7x_1 + 7x_2 - x_3 - 5x_4 = 26, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -8; \end{cases}$ [Ответ]

31) $\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b, \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_n^2 x_n = b^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{n-1} x_1 + a_2^{n-1} x_2 + \cdots + a_n^{n-1} x_n = b^{n-1}. \end{cases}$ [Указание] [Ответ]

21. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

1) $\begin{cases} -2x + 6y = 2, \\ 4x - 15y = -7; \end{cases}$ [Ответ]

2) $\begin{cases} -6x + 15y = 9, \\ 2x - 2y = 0; \end{cases}$ [Ответ]

3) $\begin{cases} -3x + 4y = -23, \\ 3x - 3y = 18; \end{cases}$ [Ответ]

4) $\begin{cases} 2x - 3y = 23, \\ 6x - 4y = 44; \end{cases}$ [Ответ]

5) $\begin{cases} 3x + 3y = 3, \\ -3x - 5y = 3; \end{cases}$ [Ответ]

6) $\begin{cases} 9x + 15y = 21, \\ -3x - 4y = -8; \end{cases}$ [Ответ]

7) $\begin{cases} -6x - 12y = -42, \\ 2x - y = 9; \end{cases}$ [Ответ]

8) $\begin{cases} -9x - 12y = 33, \\ 15x + 16y = -35; \end{cases}$ [Ответ]

9) $\begin{cases} 6x - 12y = 54, \\ 8x - 15y = 70; \end{cases}$ [Ответ]

10) $\begin{cases} -3x - 6y = -15, \\ -x - 6y = -13; \end{cases}$ [Ответ]

11) $\begin{cases} -3x + 4y = -1, \\ 6x - 8y = 2; \end{cases}$ [Ответ]

12) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ -4x + 8y = 1; \end{cases}$ [Ответ]

13) $\begin{cases} -x - 2y + z = -4, \\ 2x + 5y + z = 21, \\ x + y - 2z = -3; \end{cases}$ [Ответ]

14) $\begin{cases} 2x - 3y + z = -9, \\ -2x + 2y - 4z = 4, \\ -4x + 5y - 3z = 15; \end{cases}$ [Ответ]

15) $\begin{cases} -x + 2y + z = 4, \\ x - 3y - 3z = -6, \\ x - y + 3z = -4; \end{cases}$ [Ответ]

16) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 4, \\ 2x + 3y + 2z = 6, \\ -2x - 5y - 4z = -6; \end{cases}$ [Ответ]

17) $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = -5, \\ -4x + 7y - 6z = 7, \\ -2x + 2y + z = 11; \end{cases}$ [Решение] [Ответ]

18) $\begin{cases} x + 2y + 3z = -2, \\ x - y - 3z = -3, \\ -9y - 18z = 0; \end{cases}$ [Решение] [Ответ]

19) $\begin{cases} 2x - 2y + z = -4, \\ -2x + y + 2z = 13, \\ 4x - 5y + 4z = -3; \end{cases}$ [Ответ]

20) $\begin{cases} -x + 2y + 2z = 2, \\ 2x - 5y - z = -11, \\ -2x + 5y + 3z = 9; \end{cases}$ [Ответ]

21) $\begin{cases} 2x - 3y = -5, \\ 2x - y - 4z = -3, \\ 6x - 5y - 8z = -11; \end{cases}$ [Ответ]

22) $\begin{cases} -7x + 4y = 11, \\ 2y - 5z = 7, \\ 3x - 2y + z = -6; \end{cases}$ [Ответ]

23) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 1, \\ 2x + 4z = -2, \\ 7x + 2y + 10z = -5; \end{cases}$ [Ответ]

24) $\begin{cases} x + 2y + 2z = -2, \\ x + z = -3, \\ 4x + 2y + 5z = -9; \end{cases}$ [Ответ]

25) $\begin{cases} 7x - 6y - 4z = 9, \\ x + 2y - 2z = -3, \\ 2x - 2y - 2z = 4; \end{cases}$ [Ответ]

26) $\begin{cases} 10x + 9y - 8z = 17, \\ 12x + 15y - 6z = 21, \\ 3x + 3y - 2z = 5; \end{cases}$ [Ответ]

27) $\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 3, \\ x - y + z = -1, \\ -4x + 7y - 7z = -9; \end{cases}$ [Ответ]

28) $\begin{cases} -10x + 9y - 2z = -6, \\ -17x + 15y - 4z = -9, \\ -4x + 3y = -2; \end{cases}$ [Ответ]

29) $\begin{cases} x - 3y + 3z = -2, \\ 2x - y + z = -3, \\ 7x - 6y + 6z = -10; \end{cases}$ [Ответ]

30) $\begin{cases} 2x - 3y - 9z = -9, \\ x - y - 4z = -4, \\ -4x + 7y + 19z = 19; \end{cases}$ [Ответ]

31) $\begin{cases} 10x + 9y + z = -28, \\ -6x - 3y + 3z = 12, \\ 3x + 3y + z = -9; \end{cases}$ [Ответ]

32) $\begin{cases} 2x - 3y = -9, \\ x - y - z = -4, \\ -4x + 7y - 2z = 19; \end{cases}$ [Ответ]

33) $\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 3, \\ x - 2y - 3z = -1, \\ -4x - 10y - 12z = -12; \end{cases}$ [Ответ]

34) $\begin{cases} x - 3y + 8z = -6, \\ 2x + 4z = -6, \\ x + 9y - 16z = 6; \end{cases}$ [Ответ]

35) $\begin{cases} 13x + 15y - 4z = -5, \\ 2x + 7y + 3z = -21, \\ 9x + 10y + 7z = -32, \\ 3x + 5y + z = -10; \end{cases}$ [Решение] [Ответ]

36) $\begin{cases} -6x - 10y - 3z = -7, \\ 2x - 5y + 3z = -8, \\ x + 10y + z = 9, \\ 2x + 5y - 2z = 7; \end{cases}$ [Ответ]

37) $\begin{cases} -2x + 4y - 9z = -3, \\ -5x - 5y + 3z = 12, \\ 9x - 4y + 7z = 5, \\ 3x - 2y + z = 5; \end{cases}$ [Ответ]

38) $\begin{cases} 2x + 15y + 10z = -40, \\ 2x - 5y - 2z = 12, \\ -5x - 5y + 4z = 6, \\ 2x + 5y + z = -11; \end{cases}$ [Ответ]

39) $\begin{cases} 11x + 15y + z = -12, \\ -5x + 7y + 3z = -36, \\ 9x + 10y + z = -3, \\ 3x + 5y - 2z = -6; \end{cases}$ [Ответ]

40) $\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -4, \\ 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 13, \\ 4x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 = -11; \end{cases}$ [Ответ]

41) $\begin{cases} -x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 - 3x_4 = -29, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 15, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -14; \end{cases}$ [Ответ]

42) $\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 2, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

43) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ -4x_1 - 2x_2 - 2x_4 = -18, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ -4x_1 - 4x_2 - 5x_4 = -28; \end{cases}$ [Ответ]

44) $\begin{cases} 2x_3 - 2x_4 = -10, \\ -2x_1 - 3x_2 = -17, \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 - x_4 = -11, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -5; \end{cases}$ [Ответ]

45) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 6x_4 = -16, \\ -5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 17, \\ -x_1 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 1; \end{cases}$ [Ответ]

46) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 16, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = -27, \\ -2x_2 - x_3 + 4x_4 = 23; \end{cases}$ [Ответ]

47) $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 29, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 9, \\ -2x_1 + x_3 - 3x_4 = -11, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 18; \end{cases}$ [Ответ]

48) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3; \end{cases}$ [Ответ]

49) $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 9, \\ -8x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 = -8, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -7, \\ -6x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -1; \end{cases}$ [Ответ]

50) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -2; \end{cases}$ [Решение] [Ответ]

51) $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 1, \\ 8x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 12x_4 + 18x_5 = 5, \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4; \end{cases}$ [Ответ]

52) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 9x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 = 0, \\ x_1 + 9x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - 2x_6 = 0, \\ 5x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 0, \\ 3x_2 - x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

53) $\begin{cases} \quad x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 0, \\ x_1 \quad + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1, \\ x_1 + x_2 \quad + \ldots + x_{n-1} + x_n = 2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots \quad + x_n = n - 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} \quad = n - 1. \end{cases}$ [Ответ]

22. Исследовать на совместность и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

1) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2; \end{cases}$ [Ответ]

2) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 4, \\ 2x_1 - 6x_2 = 8; \end{cases}$ [Ответ]

3) $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 3, \\ -x_1 + x_2 = 3; \end{cases}$ [Ответ]

4) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -3; \end{cases}$ [Ответ]

5) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -5, \\ -3x_1 + 9x_2 = -15; \end{cases}$ [Ответ]

6) $\begin{cases} -13x_1 - 21x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 11, \\ 17x_1 + 27x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -13; \end{cases}$ [Ответ]

7) $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 21, \\ 5x_1 + 4x_2 = 23, \\ 4x_1 + 5x_2 = 22; \end{cases}$ [Ответ]

8) $\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 3, \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 - 13x_5 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 - 5x_5 = -3; \end{cases}$ [Ответ]

9) $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ 10x_1 - 10x_2 = -1; \end{cases}$ [Ответ]

10) $\begin{cases} -8x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -7, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -9; \end{cases}$ [Ответ]

11) $\begin{cases} 7x_1 + 17x_2 - 8x_3 + 17x_4 - x_5 = 32, \\ 6x_1 + 27x_2 - 11x_3 + 27x_4 - 5x_5 = 15, \\ -13x_1 - 44x_2 + 19x_3 - 44x_4 + 6x_5 = -47; \end{cases}$ [Ответ]

12) $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 13x_3 + 5x_4 = -12, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = -5, \\ 12x_1 - 5x_2 - 26x_3 - 7x_4 = 8; \end{cases}$ [Ответ]

13) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ 6x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4, \\ 9x_1 - 9x_2 + 9x_3 = 9; \end{cases}$ [Ответ]

14) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = -8, \\ -2x_1 - 3x_2 = 5; \end{cases}$ [Ответ]

15) $\begin{cases} 2x_1 - 17x_2 + 5x_3 - 13x_4 = 4, \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -1; \end{cases}$ [Ответ]

16) $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = -3, \\ 2x_1 - 14x_2 = -39, \\ 2x_1 + 5x_2 = 21; \end{cases}$ [Ответ]

17) $\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 - 4x_3 + 15x_4 = -13, \\ 6x_1 + 13x_2 - x_3 + 9x_4 = 2, \\ 24x_1 + 59x_2 - 11x_3 + 57x_4 = -20; \end{cases}$ [Решение] [Ответ]

18) $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 8, \\ 7x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 20; \end{cases}$ [Ответ]

19) $\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_2 - 2x_3 = -7, \\ -6x_1 - 9x_2 + x_3 = 14, \\ 2x_1 + 9x_2 - 4x_3 = -19; \end{cases}$ [Ответ]

20) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 10x_3 + 5x_4 = 31, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -10, \\ 3x_1 + 2x_2 - 11x_3 + 6x_4 = 33, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 6; \end{cases}$ [Ответ]

21) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -6, \\ 6x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -19, \\ x_2 + 2x_3 = 9; \end{cases}$ [Ответ]

22) $\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 + 17x_3 + 5x_5 = 22, \\ 3x_2 - 7x_3 + x_4 - 2x_5 = -9, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 5; \end{cases}$ [Ответ]

23) $\begin{cases} -7x_1 - 6x_2 + 7x_3 + 26x_4 - 23x_5 = 20, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 8x_4 + 7x_5 = -14, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 8x_4 + 6x_5 = -6, \\ 2x_1 - 2x_4 + 4x_5 = 6; \end{cases}$ [Ответ]

24) $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 11x_4 - 14x_5 = 28, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -11, \\ -14x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 43x_4 + 48x_5 = -91, \\ 4x_1 - 12x_4 - 12x_5 = 20; \end{cases}$ [Ответ]

25) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 13x_4 = 1, \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 9x_4 = -6, \\ -4x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 18x_4 = -27, \\ -12x_1 - 12x_2 - 8x_3 + 28x_4 = -63; \end{cases}$ [Ответ]

26) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ -6x_1 + 3x_2 - x_3 = -22, \\ -3x_1 - x_2 - x_3 = -5, \\ -3x_1 + 7x_2 + x_3 = -26; \end{cases}$ [Ответ]

27) $\begin{cases} -3x_1 + x_3 = -8, \\ 9x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 25, \\ 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 = -4, \\ 6x_1 - x_3 + 3x_4 = 20, \\ -3x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 6; \end{cases}$ [Ответ]

28) $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -9, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 11, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 6x_4 = 19; \end{cases}$ [Ответ]

29) $\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_5 = 8, \\ -4x_1 - x_2 - 3x_3 - 8x_5 = 16, \\ -4x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 - 11x_5 = 19, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_4 + 9x_5 = -12, \\ 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 24x_5 = -39; \end{cases}$ [Ответ]

30) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 7x_3 - 5x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_4 + 3x_5 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + 6x_5 = -8, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + 3x_5 = -3; \end{cases}$ [Ответ]

31) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12, \\ 6x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 44, \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 36, \\ -x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -14; \end{cases}$ [Ответ]

32) $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 11x_5 = -1, \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = -2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 7x_5 = 6, \\ -3x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 14x_5 = 0. \end{cases}$ [Ответ]

23. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:

1) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -5, \\ 3x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 6x_4 = -9, \\ 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 4x_4 = -7, \\ 4x_1 - 9x_2 - 10x_3 - \lambda x_4 = -11; \end{cases}$ [Ответ]

2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1, \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = \lambda, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$ [Ответ]

3) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 14x_4 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 - 3x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 2; \end{cases}$ [Ответ]

4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = \lambda, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases}$ [Ответ]

5) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2, \\ 7x_2 + 4x_3 = \lambda, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases}$ [Ответ]

6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 = 2. \end{cases}$ [Ответ]

1.2.2. Экономический профиль

24. Предприятие выпускает продукцию трёх видов из сырья трёх видов. Нормы расхода сырья каждого вида на единицу продукции и объём расхода сырья за один день заданы таблицей. Найти ежедневный объём выпуска продукции каждого вида:

1)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	1	3	2	1 650
2	3	11	9	6 400
3	1	5	8	4 150

; [Решение] [Ответ]

2)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	3	6	4 950
2	9	9	21	16 350
3	3	2	3	3 000

; [Ответ]

3)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	5	6	3 600
2	3	2	3	1 950
3	6	7	10	5 800

; [Ответ]

4)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	9	9	6 900
2	3	9	8	6 650
3	1	2	2	1 650

; [Ответ]

5)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	4	6	6	4 500
2	12	12	14	11 200
3	4	3	3	3 150

; [Ответ]

6)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	4	2	3 000
2	3	6	5	4 950
3	6	12	11	10 350

; [Ответ]

7)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	2	4	1	1 800
2	6	13	5	6 050
3	2	5	6	3 050

; [Ответ]

8)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	4	4	3	4 150
2	8	11	9	10 400
3	4	13	15	11 800

; [Ответ]

9)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	12	12	15	10 200
2	4	2	2	2 300
3	4	5	5	3 650

; [Ответ]

10)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	12	7	9	10 300
2	4	2	2	2 800
3	12	9	18	15 600

; [Ответ]

11)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	4	4	2	3 900
2	8	9	7	9 050
3	8	9	8	9 300

; [Ответ]

12)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	1	5	3	3 050
2	3	18	20	15 400
3	1	6	6	4 800

; [Ответ]

13)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	4	2	3 300
2	6	9	7	8 250
3	6	11	16	12 900

; [Ответ]

14)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	15	11	13 600
2	2	17	15	16 400
3	1	4	3	3 700

; [Ответ]

15)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	4	3	3 650
2	6	9	8	8 400
3	9	14	16	14 050

; [Ответ]

16)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	2	3	2 850
2	9	8	12	10 350
3	9	12	20	14 750

; [Ответ]

17)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	4	2	2	3 300
2	4	4	4	4 600
3	4	6	8	6 600

; [Ответ]

18)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	4	2	1	2 950
2	8	7	5	8 000
3	4	8	8	7 600

; [Ответ]

19)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	2	4	3	3 400
2	4	10	8	8 400
3	2	6	8	6 200

; [Ответ]

20)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	3	3	2 850
2	9	12	11	10 200
3	6	9	10	7 950

; [Ответ]

21)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	5	2	4 100
2	3	8	4	6 150
3	6	19	13	15 850

; [Ответ]

22)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	1	3	1	1 500
2	1	5	4	2 750
3	1	5	6	3 250

; [Ответ]

23)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	4	2	2	2 300
2	12	7	8	8 050
3	4	3	7	4 650

; [Ответ]

24)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	1	3	3	2 150
2	3	11	11	7 550
3	1	5	7	3 950

; [Ответ]

25)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	2	2	1	2 150
2	4	5	4	5 550
3	2	3	5	4 300

; [Ответ]

26)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	4	2	2	2 400
2	12	8	8	8 600
3	8	8	9	8 050

; [Ответ]

27)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	11	17	12 400
2	1	3	3	2 800
3	2	7	9	7 200

; [Ответ]

28)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	1	5	3	2 850
2	1	7	5	4 050
3	1	9	8	5 550

; [Ответ]

29)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	2	5	1	3 450
2	2	6	3	4 750
3	4	11	6	9 100

; [Ответ]

30)

Вид сырья	Расход/ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	1	3	3	1 950
2	1	6	5	3 150
3	2	12	12	6 900

. [Ответ]

25. Определить вектор X валового выпуска продукции двух отраслей, если известны матрица прямых затрат A и вектор конечного продукта Y:

1) $A = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}25 \\ 0{,}18 & 0{,}16 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 209 \\ 516 \end{pmatrix}$; [Решение] [Ответ]

2) $A = \begin{pmatrix} 0{,}06 & 0{,}18 \\ 0{,}19 & 0{,}07 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 532 \\ 518 \end{pmatrix}$; [Ответ]

3) $A = \begin{pmatrix} 0{,}11 & 0{,}07 \\ 0{,}17 & 0{,}07 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 670 \\ 422 \end{pmatrix}$; [Ответ]

4) $A = \begin{pmatrix} 0{,}12 & 0{,}12 \\ 0{,}04 & 0{,}04 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 344 \\ 748 \end{pmatrix}$; [Ответ]

5) $A = \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}07 \\ 0{,}08 & 0{,}08 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 322 \\ 520 \end{pmatrix}$; [Ответ]

6) $A = \begin{pmatrix} 0{,}13 & 0{,}09 \\ 0{,}10 & 0{,}16 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 720 \\ 498 \end{pmatrix}$; [Ответ]

7) $A = \begin{pmatrix} 0{,}06 & 0{,}12 \\ 0{,}10 & 0{,}04 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 598 \\ 410 \end{pmatrix}$; [Ответ]

8) $A = \begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}21 \\ 0{,}16 & 0{,}13 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 552 \\ 568 \end{pmatrix}$; [Ответ]

9) $A = \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}07 \\ 0{,}04 & 0{,}08 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 312 \\ 720 \end{pmatrix}$; [Ответ]

10) $A = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}18 \\ 0{,}10 & 0{,}17 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 375 \\ 365 \end{pmatrix}$; [Ответ]

11) $A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}17 \\ 0{,}05 & 0{,}17 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 295 \\ 395 \end{pmatrix}$; [Ответ]

12) $A = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}18 \\ 0{,}15 & 0{,}16 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 298 \\ 360 \end{pmatrix}$; [Ответ]

13) $A = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}25 \\ 0{,}14 & 0{,}07 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 568 \\ 632 \end{pmatrix}$; [Ответ]

14) $A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}21 \\ 0{,}15 & 0{,}06 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 349 \\ 489 \end{pmatrix}$; [Ответ]

15) $A = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}12 \\ 0{,}11 & 0{,}04 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 486 \\ 510 \end{pmatrix}$; [Ответ]

16) $A = \begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}11 \\ 0{,}03 & 0{,}16 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 564 \\ 483 \end{pmatrix}$; [Ответ]

17) $A = \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}10 \\ 0{,}16 & 0{,}13 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 410 \\ 355 \end{pmatrix}$; [Ответ]

18) $A = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}07 \\ 0{,}19 & 0{,}15 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 720 \\ 528 \end{pmatrix}$; [Ответ]

19) $A = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}06 \\ 0{,}08 & 0{,}07 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 732 \\ 494 \end{pmatrix}$; [Ответ]

20) $A = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}07 \\ 0{,}10 & 0{,}07 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 534 \\ 498 \end{pmatrix}$. [Ответ]

26. Определить вектор X валового выпуска продукции трёх отраслей, если известны матрица прямых затрат A и вектор конечного продукта Y:

1) $A = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}18 & 0{,}04 \\ 0{,}17 & 0{,}08 & 0{,}05 \\ 0{,}12 & 0{,}13 & 0{,}04 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 326 \\ 524 \\ 521 \end{pmatrix}$; [Ответ]

2) $A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}07 & 0{,}09 \\ 0{,}19 & 0{,}06 & 0{,}07 \\ 0{,}16 & 0{,}13 & 0{,}04 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 571 \\ 490 \\ 277 \end{pmatrix}$; [Ответ]

3) $A = \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}11 & 0{,}07 \\ 0{,}16 & 0{,}04 & 0{,}11 \\ 0{,}09 & 0{,}14 & 0{,}11 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 613 \\ 371 \\ 467 \end{pmatrix}$; [Ответ]

4) $A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}18 & 0{,}08 \\ 0{,}20 & 0{,}06 & 0{,}06 \\ 0{,}04 & 0{,}14 & 0{,}05 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 396 \\ 502 \\ 448 \end{pmatrix}$; [Ответ]

5) $A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}07 & 0{,}05 \\ 0{,}17 & 0{,}07 & 0{,}06 \\ 0{,}05 & 0{,}09 & 0{,}06 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 678 \\ 374 \\ 658 \end{pmatrix}$; [Ответ]

6) $A = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}09 & 0{,}12 \\ 0{,}10 & 0{,}06 & 0{,}13 \\ 0{,}08 & 0{,}08 & 0{,}11 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 246 \\ 433 \\ 543 \end{pmatrix}$; [Ответ]

7) $A = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}20 & 0{,}04 \\ 0{,}14 & 0{,}03 & 0{,}07 \\ 0{,}03 & 0{,}10 & 0{,}04 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 713 \\ 317 \\ 499 \end{pmatrix}$; [Ответ]

8) $A = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}06 & 0{,}12 \\ 0{,}18 & 0{,}07 & 0{,}09 \\ 0{,}04 & 0{,}10 & 0{,}04 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 565 \\ 276 \\ 594 \end{pmatrix}$; [Ответ]

9) $A = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}12 & 0{,}07 \\ 0{,}15 & 0{,}06 & 0{,}05 \\ 0{,}18 & 0{,}11 & 0{,}05 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 523 \\ 419 \\ 568 \end{pmatrix}$; [Ответ]

10) $A = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}15 & 0{,}07 \\ 0{,}10 & 0{,}07 & 0{,}14 \\ 0{,}17 & 0{,}10 & 0{,}11 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 749 \\ 277 \\ 420 \end{pmatrix}$; [Ответ]

11) $A = \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}06 & 0{,}07 \\ 0{,}14 & 0{,}04 & 0{,}05 \\ 0{,}07 & 0{,}09 & 0{,}10 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 463 \\ 659 \\ 336 \end{pmatrix}$; [Ответ]

12) $A = \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}09 & 0{,}09 \\ 0{,}18 & 0{,}06 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}12 & 0{,}06 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 251 \\ 318 \\ 652 \end{pmatrix}$; [Ответ]

13) $A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}06 & 0{,}05 \\ 0{,}17 & 0{,}06 & 0{,}13 \\ 0{,}13 & 0{,}08 & 0{,}08 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 307 \\ 619 \\ 344 \end{pmatrix}$; [Ответ]

14) $A = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}16 & 0{,}14 \\ 0{,}15 & 0{,}08 & 0{,}09 \\ 0{,}03 & 0{,}15 & 0{,}04 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 506 \\ 402 \\ 369 \end{pmatrix}$; [Ответ]

15) $A = \begin{pmatrix} 0{,}06 & 0{,}16 & 0{,}12 \\ 0{,}08 & 0{,}06 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & 0{,}14 & 0{,}10 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 262 \\ 546 \\ 592 \end{pmatrix}$; [Ответ]

16) $A = \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}09 & 0{,}07 \\ 0{,}17 & 0{,}07 & 0{,}09 \\ 0{,}03 & 0{,}14 & 0{,}05 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 279 \\ 445 \\ 379 \end{pmatrix}$; [Ответ]

17) $A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}07 & 0{,}05 \\ 0{,}08 & 0{,}03 & 0{,}10 \\ 0{,}16 & 0{,}09 & 0{,}06 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 664 \\ 632 \\ 552 \end{pmatrix}$; [Ответ]

18) $A = \begin{pmatrix} 0{,}06 & 0{,}20 & 0{,}07 \\ 0{,}05 & 0{,}07 & 0{,}13 \\ 0{,}04 & 0{,}14 & 0{,}10 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 194 \\ 553 \\ 426 \end{pmatrix}$; [Ответ]

27. Определить вектор X валового выпуска продукции четырёх отраслей, если известны матрица прямых затрат A и вектор конечного продукта Y:

1) $A = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}14 \\ 0{,}04 & 0{,}03 & 0{,}06 & 0{,}09 \\ 0{,}10 & 0{,}11 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}06 & 0{,}07 & 0{,}11 & 0{,}07 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 392 \\ 456 \\ 574 \\ 392 \end{pmatrix}$; [Решение] [Ответ]

2) $A = \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}15 & 0{,}07 & 0{,}08 \\ 0{,}15 & 0{,}04 & 0{,}11 & 0{,}07 \\ 0{,}05 & 0{,}11 & 0{,}06 & 0{,}11 \\ 0{,}03 & 0{,}07 & 0{,}04 & 0{,}06 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 203 \\ 312 \\ 423 \\ 493 \end{pmatrix}$; [Ответ]

3) $A = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}03 & 0{,}05 & 0{,}12 \\ 0{,}16 & 0{,}07 & 0{,}13 & 0{,}05 \\ 0{,}03 & 0{,}11 & 0{,}08 & 0{,}11 \\ 0{,}09 & 0{,}12 & 0{,}08 & 0{,}07 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 722 \\ 275 \\ 566 \\ 434 \end{pmatrix}$; [Ответ]

4) $A = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}14 & 0{,}17 \\ 0{,}07 & 0{,}04 & 0{,}10 & 0{,}03 \\ 0{,}07 & 0{,}11 & 0{,}04 & 0{,}06 \\ 0{,}07 & 0{,}13 & 0{,}04 & 0{,}05 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 510 \\ 416 \\ 598 \\ 594 \end{pmatrix}$; [Ответ]

5) $A = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}11 & 0{,}11 & 0{,}11 \\ 0{,}16 & 0{,}04 & 0{,}05 & 0{,}11 \\ 0{,}03 & 0{,}14 & 0{,}08 & 0{,}12 \\ 0{,}10 & 0{,}15 & 0{,}08 & 0{,}07 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 254 \\ 593 \\ 549 \\ 231 \end{pmatrix}$; [Ответ]

6) $A = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}06 & 0{,}05 & 0{,}11 \\ 0{,}15 & 0{,}06 & 0{,}11 & 0{,}07 \\ 0{,}08 & 0{,}13 & 0{,}10 & 0{,}15 \\ 0{,}04 & 0{,}11 & 0{,}11 & 0{,}04 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 628 \\ 354 \\ 233 \\ 327 \end{pmatrix}$; [Ответ]

7) $A = \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}09 & 0{,}11 & 0{,}17 \\ 0{,}07 & 0{,}04 & 0{,}11 & 0{,}05 \\ 0{,}11 & 0{,}07 & 0{,}11 & 0{,}11 \\ 0{,}05 & 0{,}11 & 0{,}12 & 0{,}04 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 409 \\ 313 \\ 534 \\ 390 \end{pmatrix}$; [Ответ]

8) $A = \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}15 & 0{,}11 & 0{,}05 \\ 0{,}11 & 0{,}06 & 0{,}11 & 0{,}03 \\ 0{,}08 & 0{,}08 & 0{,}10 & 0{,}04 \\ 0{,}07 & 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}06 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 615 \\ 356 \\ 572 \\ 465 \end{pmatrix}$; [Ответ]

9) $A = \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}11 \\ 0{,}07 & 0{,}03 & 0{,}11 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}12 & 0{,}08 & 0{,}08 \\ 0{,}07 & 0{,}11 & 0{,}05 & 0{,}05 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 547 \\ 311 \\ 588 \\ 419 \end{pmatrix}$; [Ответ]

10) $A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}05 \\ 0{,}16 & 0{,}06 & 0{,}09 & 0{,}05 \\ 0{,}08 & 0{,}13 & 0{,}05 & 0{,}15 \\ 0{,}10 & 0{,}14 & 0{,}04 & 0{,}05 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 571 \\ 264 \\ 329 \\ 596 \end{pmatrix}$; [Ответ]

11) $A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}09 & 0{,}14 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}05 & 0{,}06 \\ 0{,}09 & 0{,}07 & 0{,}11 & 0{,}08 \\ 0{,}06 & 0{,}10 & 0{,}06 & 0{,}07 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 587 \\ 531 \\ 260 \\ 596 \end{pmatrix}$; [Ответ]

12) $A = \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}11 \\ 0{,}11 & 0{,}08 & 0{,}09 & 0{,}03 \\ 0{,}10 & 0{,}13 & 0{,}10 & 0{,}16 \\ 0{,}03 & 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}07 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 507 \\ 394 \\ 386 \\ 430 \end{pmatrix}$; [Ответ]

13) $A = \begin{pmatrix} 0{,}06 & 0{,}07 & 0{,}12 & 0{,}12 \\ 0{,}08 & 0{,}07 & 0{,}10 & 0{,}06 \\ 0{,}10 & 0{,}13 & 0{,}11 & 0{,}04 \\ 0{,}06 & 0{,}14 & 0{,}08 & 0{,}08 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 378 \\ 410 \\ 465 \\ 284 \end{pmatrix}$; [Ответ]

14) $A = \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}07 & 0{,}04 & 0{,}08 \\ 0{,}16 & 0{,}04 & 0{,}10 & 0{,}11 \\ 0{,}08 & 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}04 \\ 0{,}06 & 0{,}11 & 0{,}10 & 0{,}05 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 345 \\ 380 \\ 339 \\ 424 \end{pmatrix}$; [Ответ]

15) $A = \begin{pmatrix} 0{,}06 & 0{,}05 & 0{,}12 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}04 & 0{,}06 & 0{,}10 \\ 0{,}09 & 0{,}08 & 0{,}11 & 0{,}15 \\ 0{,}11 & 0{,}08 & 0{,}11 & 0{,}06 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 680 \\ 525 \\ 477 \\ 313 \end{pmatrix}$. [Ответ]

1.3. Векторная алгебра

28. Даны векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Являются ли коллинеарными векторы $\mathbf{p} = \mathbf{a} - 2\sqrt{5}\mathbf{b}$, $\mathbf{q} = -\sqrt{5}\mathbf{a} + 10\mathbf{b}$? [Решение] [Ответ]

29. Как должны быть связаны векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, чтобы выполнялись соотношения:

1) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$; [Ответ]

2) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$; [Ответ]

3) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$; [Ответ]

4) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| > |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$; [Ответ]

5) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b})$; [Ответ]

6) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$. [Ответ]

30. От точки O отложены векторы $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Найти какой-либо вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий по биссектрисе угла AOB. [Ответ]

31. Определить начало вектора $\mathbf{a} = (3, 1, 2)$, если его конец совпадает с точкой $B(0, 1, -1)$. [Решение] [Ответ]

32. Даны точки $A(2, 5, 3)$, $B(-1, 5, 8)$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$. [Ответ]

33. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны, причем $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 3$. Найти $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$. [Ответ]

34. Доказать, что сумма векторов, соединяющих центр равностороннего треугольника с его вершинами, равна нулю.

35. Дан четырехугольник $ABCD$. Найти такую точку M, что

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \mathbf{0}.$$ [Ответ]

36. Пусть AD, BE, CF — медианы треугольника ABC. Доказать, что

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \mathbf{0}.$$

37. Найти орт вектора $\mathbf{a} = (1, -2, 2)$. [Ответ]

38. Даны векторы $\mathbf{a} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{b} = (-2, 3, 4)$. Найти векторы $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $3\mathbf{a}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$. [Ответ]

39. Найти длины суммы и разности векторов $\mathbf{a} = (3, 1, 1)$ и $\mathbf{b} = (1, 3, 1)$. [Ответ]

40. Являются ли точки

$$A(3, -1, 2),\ B(1, 2, -1),\ C(-1, 1, -3),\ D(3, -5, 3)$$

вершинами трапеции? [Решение] [Ответ]

41. Даны векторы $\mathbf{a} = (2, 3)$, $\mathbf{b} = (-3, -5)$, $\mathbf{c} = (1, -3)$. Определить, при каких значениях β коллинеарны векторы $\mathbf{m} = \mathbf{a} - \beta\mathbf{c}$, $\mathbf{n} = \mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. [Ответ]

42. При каких значениях α и β векторы $\mathbf{a} = (\alpha, 2, 4)$ и $\mathbf{b} = (1, \beta, -5)$ коллинеарны? [Ответ]

43. Векторы $\mathbf{a} = (7, -4, -4)$, $\mathbf{b} = (-2, -1, 2)$ приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\mathbf{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, при условии, что $|\mathbf{c}| = 5\sqrt{6}$. [Ответ]

44. Вычислить скалярное произведение $\mathbf{ab}$, если:

1) $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{b}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\pi}{6}$; [Ответ]

2) $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 135^\circ$; [Ответ]

3) $|\mathbf{a}| = 8$, $|\mathbf{b}| = 5$, $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$; [Ответ]

4) $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 3$, $\mathbf{a} \downarrow\uparrow \mathbf{b}$; [Ответ]

5) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. [Ответ]

45. Пусть $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$ и $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \pi/3$. Вычислить:

1) $\mathbf{ab}$; [Ответ]

2) $\mathbf{a}^2$; [Ответ]

3) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$; [Ответ]

4) $(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2$; [Решение] [Ответ]

5) $(3\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{b} - 4\mathbf{a})$. [Ответ]

46. Доказать, что векторы $\mathbf{d} = \mathbf{a}(\mathbf{bc}) - \mathbf{b}(\mathbf{ac})$ и $\mathbf{c}$ перпендикулярны.

47. Дан равносторонний треугольник ABC, у которого длины сторон равны единице. Вычислить $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$. [Ответ]

48. Какой угол образуют единичные векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$, если известно, что векторы $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 5\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ перпендикулярны? [Ответ]

49. Вычислить скалярное произведение векторов $\mathbf{ab}$, если $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 4\mathbf{q}$, где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы. [Ответ]

50. Найти длину вектора $\mathbf{a} = 2\mathbf{n} - \mathbf{m}$, где $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ — единичные векторы, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \pi/4$. [Ответ]

51. Вычислить скалярное произведение векторов $\mathbf{c} = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ и $\mathbf{d} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, если известно, что $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 2\pi/3$. [Ответ]

52. Пусть $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 2\pi/3$. Найти, при каком значении β векторы $\mathbf{c} = \beta\mathbf{a} + 17\mathbf{b}$ и $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны. [Ответ]

53. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 5\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$, если $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{2}$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \pi/4$. [Ответ]

54. Дано: $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \pi/3$. Найти косинус угла между векторами:

1) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a} - \mathbf{b}$; [Ответ]

2) $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a} + \mathbf{b}$; [Ответ]

3) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. [Ответ]

55. Найти угол между векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$, если $|\mathbf{e}_1| = 1$, $|\mathbf{e}_2| = 2$, $|\mathbf{e}_3| = 3$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = (\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3}) = \pi/3$, $(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}) = \pi/2$. [Ответ]

56. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF. Вычислить

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF}.$$ [Ответ]

57. Вычислить $\mathbf{a}^2 + 3\mathbf{ab} - 2\mathbf{bc} + 4$, если

$$\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - \mathbf{n}, \quad \mathbf{m} + 2\mathbf{n}, \quad \mathbf{c} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n},$$

где $\mathbf{m}^2 = 4$, $\mathbf{n}^2 = 1$, $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \pi/2$. [Ответ]

58. Даны векторы

$$\mathbf{a} = (4, -2, -4), \quad \mathbf{b} = (6, -3, 2).$$

Найти $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$. [Решение] [Ответ]

59. Вычислить скалярное произведение векторов:

1) $\mathbf{a} = (5, 1)$, $\mathbf{b} = (-3, 5)$; [Ответ]

2) $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$, $\mathbf{b} = (6, 9)$; [Ответ]

3) $\mathbf{a} = (2, 5, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, 0, 1)$; [Ответ]

4) $\mathbf{a} = \left(2\sin\frac{\pi}{6}, 2, \cos\frac{\pi}{6}\right)$, $\mathbf{b} = \left(\cos\frac{\pi}{6}, -1, 2\sin\frac{\pi}{6}\right)$. [Ответ]

60. Найти углы между векторами:

1) $\mathbf{a} = (8, 6)$, $\mathbf{b} = (2, 14)$; [Ответ]

2) $\mathbf{a} = (2, 3)$, $\mathbf{b} = (6, -4)$; [Ответ]

3) $\mathbf{a} = (0, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 1)$; [Ответ]

4) $\mathbf{a} = (2, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (\cos 2^\circ, \sin 2^\circ, 0)$; [Ответ]

5) $\mathbf{a} = (\cos 15^\circ, 1, \sin 15^\circ)$, $\mathbf{b} = (-\sin 15^\circ, 3, \cos 15^\circ)$. [Ответ]

61. Найти такое значение α, чтобы векторы $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}+5\mathbf{j}-\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{i}+2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ были перпендикулярны. [Ответ]

62. Даны векторы $\mathbf{a} = (3, -2)$, $\mathbf{b} = (5, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 2)$. Найти:

1) $2\mathbf{a}^2 - 3\mathbf{ab} + 4\mathbf{b}^2 - 2\mathbf{ac} - \mathbf{c}^2$; [Ответ]

2) $3(\mathbf{ab})\mathbf{c} - 2\mathbf{a}^2\mathbf{c} + (\mathbf{cb})\mathbf{a} + \mathbf{c}^2\mathbf{b}$. [Ответ]

63. Даны векторы $\mathbf{a} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 0, 4)$, $\mathbf{c} = (1, 2, 1)$. Вычислить:

1) $\mathbf{a}^2(\mathbf{bc})$; [Ответ]

2) $\mathbf{a}^2\mathbf{b} + \mathbf{b}^2\mathbf{c} + \mathbf{c}^2\mathbf{a}$; [Ответ]

3) $2\mathbf{c}(\mathbf{c} + 3\mathbf{a}) + (\mathbf{b} - 2\mathbf{a})(\mathbf{c} + \mathbf{a})$; [Ответ]

4) $2\mathbf{a}^2+3\mathbf{b}^2-4\mathbf{c}^2$; [Ответ]

5) $3\mathbf{ab}-(2\mathbf{a}-\mathbf{b})\mathbf{c}$; [Ответ]

6) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2-(\mathbf{c}-\mathbf{a})^2$; [Ответ]

7) $\sqrt{\mathbf{a}^2}$. [Ответ]

64. Даны вершины треугольника ABC:

$$A(-1,-2,4), \quad B(-4,-2,0), \quad C(3,-2,1).$$

Определить величину его внутреннего угла при вершине B. [Решение] [Ответ]

65. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(4,0,8)$, $B(5,2,6)$, $C(3,1,4)$, $D(2,-1,6)$ является квадратом.

66. Даны вершины треугольника:

$$A\left(2,1,\sqrt{2}\right), \quad B(1,0,0), \quad C\left(1+\sqrt{3},\sqrt{3},-\sqrt{6}\right).$$

Найти его углы. [Ответ]

67. Вычислить внутренние углы треугольника с вершинами

$$A(1,2,1), \ B(3,-1,7), \ C(7,4,-2).$$

Показать, что этот треугольник равнобедренный.

68. Вектор $\mathbf{x}$ перпендикулярен к векторам $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=18\mathbf{i}-22\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ и образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, если $|\mathbf{x}|=14$. [Ответ]

69. Даны три вектора:

$$\mathbf{a}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}, \quad \mathbf{b}=5\mathbf{i}+\mathbf{j}+6\mathbf{k}, \quad \mathbf{c}=-3\mathbf{i}+2\mathbf{k}.$$

Найти вектор $\mathbf{x}$, перпендикулярный к вектору $\mathbf{c}$ и удовлетворяющий условиям $\mathbf{ax}=4$, $\mathbf{bx}=35$. [Ответ]

70. Даны три вектора: $\mathbf{a}=(1,2,-3)$, $\mathbf{b}=(5,1,2)$, $\mathbf{c}=(-3,0,1)$. Найти вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий условиям $\mathbf{xa}=-4$, $\mathbf{bx}=5$, $\mathbf{cx}=2$. [Ответ]

71. Найти вектор $\mathbf{x}$, коллинеарный вектору $\mathbf{a}=(2,1,-1)$ и удовлетворяющий условию $\mathbf{xa}=3$. [Ответ]

72. Найти линейную комбинацию $3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - 7\mathbf{a}_3$ векторов

$$\mathbf{a}_1 = (-7, 3, 4, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (0, -1, -6, -5), \quad \mathbf{a}_3 = (-3, 1, 0, -1)$$

пространства $\mathbb{R}^4$. Что в связи с полученным результатом можно сказать о системе векторов $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$? [Ответ]

73. Найти линейную комбинацию $2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3$ векторов

$$\mathbf{a}_1 = (2, 0, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (1, -1, 5), \quad \mathbf{a}_3 = (-1, 1, 2)$$

пространства $\mathbb{R}^3$. [Ответ]

74. Выяснить, являются ли следующие системы векторов линейно зависимыми:

1) $(5, -5, -2)$, $(1, -3, 1)$; [Решение] [Ответ]

2) $(-4, 3, 1, -1)$, $(3, -3, 1, 1)$; [Ответ]

3) $(-2, -5, 1, 2)$, $(3, 1, 3, 2)$; [Ответ]

4) $(-3, -3)$, $(4, -1)$; [Ответ]

5) $(1, -3)$, $(-1, 3)$; [Ответ]

6) $(1, -1, 1, 1)$, $(2, -2, 2, 2)$; [Ответ]

7) $(-3, -3)$, $(-6, -6)$; [Ответ]

8) $(5, 3)$, $(4, 3)$; [Ответ]

9) $(-2, -1)$, $(-4, -2)$; [Ответ]

10) $(8, -6, -4)$, $(-4, 3, 2)$; [Ответ]

11) $(-1, 2, -2)$, $(-2, 3, -5)$, $(-2, 2, -6)$; [Ответ]

12) $(-3, -1, -1, 0)$, $(0, 0, 2, -4)$, $(-9, -2, 1, -2)$; [Ответ]

13) $(2,-2,-4,1)$, $(4,-7,-4,4)$, $(6,-7,3,5)$; [Ответ]

14) $(-3,-1,-4,-1)$, $(0,0,-2,2)$, $(-9,-4,5,-5)$; [Ответ]

15) $(2,1,-4,1)$, $(2,0,5,-1)$, $(-6,-1,2,-1)$; [Ответ]

16) $(-4,-5,7,-7)$, $(-3,-3,2,-1)$, $(-2,-1,-3,5)$; [Ответ]

17) $(10,1,25,7)$, $(-1,2,5,-4)$, $(4,-1,5,5)$; [Ответ]

18) $(-1,-2,-2)$, $(-2,7,2)$, $(-5,23,8)$; [Ответ]

19) $(1,-1,-1,1)$, $(2,-3,-2,6)$, $(3,-4,3,5)$; [Ответ]

20) $(2,2,0)$, $(-3,-2,0)$, $(1,2,-2)$; [Ответ]

21) $(-3,-2,5)$, $(3,2,3)$, $(-3,2,-1)$, $(3,2,3)$; [Ответ]

22) $(-6,-4,-3,1)$, $(10,1,12,-4)$, $(-4,1,3,2)$, $(-2,-2,3,0)$; [Ответ]

23) $(0,-1,0,0)$, $(-5,8,3,-2)$, $(1,-2,-1,1)$, $(1,-1,1,-1)$; [Ответ]

24) $(1,0,0,-1,3)$, $(-1,-2,1,-1,-3)$, $(-1,4,0,-1,1)$, $(1,1,-1,3,1)$; [Ответ]

25) $(3,1,-3,3)$, $(-3,0,3,0)$, $(1,1,-3,1)$, $(3,-1,-3,-2)$; [Ответ]

26) $(6,4,1,0)$, $(-3,-2,16,-3)$, $(0,1,1,-2)$, $(3,1,5,1)$; [Ответ]

27) $(-1,5,3,2,-5)$, $(-3,7,2,1,-5)$, $(0,-3,1,-3,2)$, $(1,-2,0,3,1)$; [Ответ]

28) $(0,1,1,1,4)$, $(3,1,5,1,3)$, $(-3,1,2,0,-1)$, $(12,-1,5,1,4)$; [Ответ]

29) $(6,-1,-4,5,0)$, $(-3,-2,2,-3,0)$, $(3,-3,-4,2,-1)$, $(3,-3,2,2,2)$; [Ответ]

30) $(0,-2,-3,1,0)$, $(-6,-2,5,-1,7)$, $(2,-2,-2,0,-2)$, $(8,2,-15,5,-10)$. [Ответ]

75. Найти ранг и какой-либо базис системы векторов:

1) $\mathbf{a}_1 = (-1, -2, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (6, 3, 15)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, -2, -4)$; [Решение] [Ответ]

2) $\mathbf{a}_1 = (-2, -2, -4)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 5, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 5, -3)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 3, 3)$; [Ответ]

3) $\mathbf{a}_1 = (15, 1, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (-12, 1, -5)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 2, -3)$, $\mathbf{a}_4 = (6, 3, -1)$; [Ответ]

4) $\mathbf{a}_1 = (-2, 2, -6)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -1, 5)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, -1, -1)$, $\mathbf{a}_4 = (0, -2, 2)$; [Ответ]

5) $\mathbf{a}_1 = (-2, -3, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -2, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (4, 4, -2)$; [Ответ]

6) $\mathbf{a}_1 = (-6, 4, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 2, -1)$; [Ответ]

7) $\mathbf{a}_1 = (-9, 1, 6)$, $\mathbf{a}_2 = (-21, -5, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (9, 1, -3)$, $\mathbf{a}_4 = (11, 3, -1)$; [Ответ]

8) $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, -3, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, 2, -1)$, $\mathbf{a}_4 = (-1, -1, -2)$; [Ответ]

9) $\mathbf{a}_1 = (1, 5, 18)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -4, -6)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 2, -3)$, $\mathbf{a}_4 = (-3, 2, -3)$, $\mathbf{a}_5 = (2, 1, 9)$; [Ответ]

10) $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -2, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, -1)$. [Ответ]

76. Показать, что система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ пространства $\mathbb{R}^4$ или $\mathbb{R}^5$ линейно независима, и дополнить ее до базиса всего пространства:

1) $\mathbf{a}_1 = (-1, 9, -1, -4, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, -6, 5, 2, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, -3, -2, 2, -1)$; [Решение] [Ответ]

2) $\mathbf{a}_1 = (-3, -2, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-6, -8, 2, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (9, 5, -2, -5)$; [Ответ]

3) $\mathbf{a}_1 = (2, -2, 5, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, -4, -4)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, 3, 1, -2)$; [Ответ]

4) $\mathbf{a}_1 = (-4, -3, 3, -4, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-4, 0, 1, -4, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 3, 2, 2, -2)$; [Ответ]

5) $\mathbf{a}_1 = (1, -3, -2, 5, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 2, -2, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, -1, -3, 1, 1)$; [Ответ]

6) $\mathbf{a}_1 = (-4, -9, 5, -4, 5)$, $\mathbf{a}_2 = (-4, -3, 2, 2, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, 3, 2, 2, -1)$; [Ответ]

7) $\mathbf{a}_1 = (-2, -4, -2, -3, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -2, 1, -4, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 2, -4, 2, 1)$; [Ответ]

8) $\mathbf{a}_1 = (5, -6, -2, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (5, 0, 5, 2, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 3, -4, -1, 1)$; [Ответ]

9) $\mathbf{a}_1 = (-2, -1, 3, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -1, 3, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 0, 2, 2)$; [Ответ]

10) $\mathbf{a}_1 = (2, 1, -4, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 0, 5, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-6, -2, -2, -4)$; [Ответ]

11) $\mathbf{a}_1 = (-2, -1, 3, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 2, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, 0, -4, 1)$; [Ответ]

12) $\mathbf{a}_1 = (1, -2, 5, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -2, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -5, 5, 2)$; [Ответ]

13) $\mathbf{a}_1 = (-1, -1, -2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -2, -3, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, -2, -4, 5)$; [Ответ]

14) $\mathbf{a}_1 = (2, 6, -1, -1, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 0, -4, -1, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, -2, -3, 0, -1)$; [Ответ]

15) $\mathbf{a}_1 = (5, -1, 1, 0, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (5, -1, -1, 6, -4)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, -1, -2, 2, 1)$; [Ответ]

16) $\mathbf{a}_1 = (3, -1, -3, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (6, -1, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (9, -4, 3, 4)$; [Ответ]

17) $\mathbf{a}_1 = (3, -1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 4, -2, -4)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 0, -3, 1)$; [Ответ]

18) $\mathbf{a}_1 = (-2, 1, 3, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1, -3, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (6, -4, 2, -2)$; [Ответ]

19) $\mathbf{a}_1 = (1, -9, 1, -1, 5)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 3, -2, -1, -4)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 3, -3, 1, -1)$; [Ответ]

20) $\mathbf{a}_1 = (3, -1, -1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (-3, 1, -3, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 2, -1, 3)$. [Ответ]

77. В векторном пространстве $\mathbb{R}^n$, где $n \in \{2, 3, 4\}$, заданы векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n, \mathbf{x}$. Показать, что система $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ образует базис пространства $\mathbb{R}^n$, и найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе, если:

1) $\mathbf{b}_1 = (7, 6)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 3)$, $\mathbf{x} = (21, 33)$; [Ответ]

2) $\mathbf{b}_1 = (5, 4)$, $\mathbf{b}_2 = (-2, 1)$, $\mathbf{x} = (11, 14)$; [Ответ]

3) $\mathbf{b}_1 = (1, 4)$, $\mathbf{b}_2 = (4, -1)$, $\mathbf{x} = (-5, 14)$; [Ответ]

4) $\mathbf{b}_1 = (7, 6)$, $\mathbf{b}_2 = (5, 1)$, $\mathbf{x} = (32, 11)$; [Ответ]

5) $\mathbf{b}_1 = (5, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (-3, -3)$, $\mathbf{x} = (-4, 2)$; [Ответ]

6) $\mathbf{b}_1 = (-1, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (-3, -5)$, $\mathbf{x} = (1, 20)$; [Ответ]

7) $\mathbf{b}_1 = (5, 4)$, $\mathbf{b}_2 = (-2, -1)$, $\mathbf{x} = (9, 9)$; [Ответ]

8) $\mathbf{b}_1 = (7, -2)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 3)$, $\mathbf{x} = (18, 8)$; [Ответ]

9) $\mathbf{b}_1 = (7, 4)$, $\mathbf{b}_2 = (-1, -3)$, $\mathbf{x} = (21, 12)$; [Ответ]

10) $\mathbf{b}_1 = (7, -2)$, $\mathbf{b}_2 = (4, 1)$, $\mathbf{x} = (47, -7)$; [Ответ]

11) $\mathbf{b}_1 = (2, 2, -5)$, $\mathbf{b}_2 = (6, 3, -9)$, $\mathbf{b}_3 = (2, -1, 2)$, $\mathbf{x} = (10, 4, -12)$; [Решение] [Ответ]

12) $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (3, -3, 6)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -1, 3)$, $\mathbf{x} = (13, -7, 18)$; [Ответ]

13) $\mathbf{b}_1 = (2, -1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (3, -3, 3)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{x} = (0, 4, -6)$; [Ответ]

14) $\mathbf{b}_1 = (3, 9, -3)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 5, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, -4, 2)$, $\mathbf{x} = (13, 50, -8)$; [Ответ]

15) $\mathbf{b}_1 = (2, 4, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 4, 5)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{x} = (3, 4, 5)$; [Ответ]

16) $\mathbf{b}_1 = (-1, -1, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (2, -2, -4)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 1, 2)$, $\mathbf{x} = (3, -2, -8)$; [Ответ]

17) $\mathbf{b}_1 = (-1, 0, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (-6, -3, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (-3, -1, 0)$, $\mathbf{x} = (-31, -12, 8)$; [Ответ]

18) $\mathbf{b}_1 = (-1, 0, -2)$, $\mathbf{b}_2 = (-1, -1, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -1, 6)$, $\mathbf{x} = (-4, 5, -22)$; [Ответ]

19) $\mathbf{b}_1 = (3, 1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (-1, -1, 2)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, -2, 6)$, $\mathbf{x} = (6, -3, 16)$; [Ответ]

20) $\mathbf{b}_1 = (3, 3, 3)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (-2, -3, 0)$, $\mathbf{x} = (3, -2, 11)$; [Ответ]

21) $\mathbf{b}_1 = (2, -2, 0, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 2, 6, 4)$, $\mathbf{b}_3 = (3, -3, -6, -3)$, $\mathbf{b}_4 = (2, -1, 0, 0)$, $\mathbf{x} = (11, -2, 0, 3)$; [Ответ]

22) $\mathbf{b}_1 = (-2, -2, 0, -5)$, $\mathbf{b}_2 = (-3, -1, 2, -4)$, $\mathbf{b}_3 = (-3, -3, 0, -9)$, $\mathbf{b}_4 = (2, 0, -1, 0)$, $\mathbf{x} = (-6, -4, 4, -16)$; [Ответ]

23) $\mathbf{b}_1 = (-4, 2, 4, -2)$, $\mathbf{b}_2 = (0, -1, -3, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, -2, -7, 2)$, $\mathbf{b}_4 = (5, -1, -1, 0)$, $\mathbf{x} = (-21, 7, 13, -4)$; [Ответ]

24) $\mathbf{b}_1 = (2, -2, 6, 8)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 0, -2, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (-2, 1, 0, -3)$, $\mathbf{b}_4 = (-2, 0, -1, -1)$, $\mathbf{x} = (6, 2, -15, -10)$; [Ответ]

25) $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 2, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (-2, -1, -1, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 1, 1, 2)$, $\mathbf{b}_4 = (-3, 1, 3, 5)$, $\mathbf{x} = (5, 4, 5, 3)$; [Ответ]

26) $\mathbf{b}_1 = (-4, -1, 4, 5)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 1, -2, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, -1, 2, -2)$, $\mathbf{b}_4 = (-2, -1, 4, 1)$, $\mathbf{x} = (-21, -7, 20, 18)$; [Ответ]

27) $\mathbf{b}_1 = (1, -2, 1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (0, -1, -1, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -3, -2, -5)$, $\mathbf{b}_4 = (-2, 6, -2, -3)$, $\mathbf{x} = (-7, 22, 1, 5)$; [Ответ]

28) $\mathbf{b}_1 = (1, -2, 2, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (2, -3, 3, -2)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -3, 1, -5)$, $\mathbf{b}_4 = (0, -1, -1, -5)$, $\mathbf{x} = (4, 1, 13, 28)$; [Ответ]

29) $\mathbf{b}_1 = (-2, -1, -3, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 2, 4, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (5, 0, 2, 0)$, $\mathbf{b}_4 = (2, -2, -2, -4)$, $\mathbf{x} = (-3, -7, -17, 7)$; [Ответ]

30) $\mathbf{b}_1 = (0, 2, 1, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (-1, -1, -1, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (0, -2, 0, -7)$, $\mathbf{b}_4 = (0, -1, 0, -3)$, $\mathbf{x} = (-3, 10, 1, 23)$. [Ответ]

78. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для однородной системы уравнений:

1) $\begin{cases} -4x_1 - 18x_2 + 5x_3 - 13x_4 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

2) $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ -6x_1 - 6x_2 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

3) $\begin{cases} 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

4) $\begin{cases} 11x_1 - 2x_2 - 13x_3 - 37x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 - 10x_4 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 17x_4 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

5) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 9x_3 - 3x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 8x_1 - 7x_2 - 25x_3 - 7x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

6) $\begin{cases} -11x_1 - 23x_2 - 6x_3 + 39x_4 = 0, \\ -x_1 - 9x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 0, \\ 6x_1 + 16x_2 + 5x_3 - 23x_4 = 0, \\ 9x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 25x_4 = 0; \end{cases}$ [Решение] [Ответ]

7) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ -2x_1 - 5x_2 - x_3 + 7x_4 = 0, \\ -16x_1 - 31x_2 + x_3 + 29x_4 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

8) $\begin{cases} -3x_1 - 10x_2 - 2x_3 + 13x_4 + 4x_5 = 0, \\ 6x_1 + 7x_2 - 22x_3 - 13x_4 + 5x_5 = 0, \\ -18x_1 - 34x_2 + 40x_3 + 52x_4 - 2x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

9) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ -2x_1 + 10x_2 + 5x_3 - 13x_4 + 3x_5 = 0, \\ 14x_1 - 32x_2 - 16x_3 + 34x_4 - 2x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

10) $\begin{cases} x_1 - 7x_3 - 8x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 6x_2 - 31x_3 - 38x_4 + 8x_5 = 0, \\ -4x_1 - 3x_2 + 19x_3 + 23x_4 - 5x_5 = 0, \\ -5x_1 - 6x_2 + 17x_3 + 22x_4 - 4x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

11) $\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 12x_4 + 3x_5 = 0, \\ 15x_1 + 39x_2 - 3x_3 - 21x_4 + 12x_5 = 0, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 - 11x_4 + 5x_5 = 0, \\ -13x_1 - 5x_2 + 17x_3 - 25x_4 + 4x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

12) $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 - 12x_3 - 26x_4 + 4x_5 = 0, \\ -3x_2 - 5x_3 - 9x_4 + x_5 = 0, \\ -4x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 13x_4 - 5x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

13) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_5 = 0, \\ -10x_1 - 3x_3 + 26x_4 + 16x_5 = 0, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + 7x_3 - 31x_4 - 33x_5 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 21x_4 - 19x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

14) $\begin{cases} -5x_1 - x_2 + 22x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 4x_4 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

15) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 12x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

16) $\begin{cases} -10x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0, \\ -3x_1 - 6x_2 + 6x_3 + 9x_4 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

17) $\begin{cases} -x_1 + 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ -5x_1 - 12x_2 - 6x_3 + 57x_4 + 69x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 15x_4 - 18x_5 = 0, \\ 7x_1 + 15x_2 + 7x_3 - 72x_4 - 87x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 48x_4 - 57x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

18) $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 15x_4 - 2x_5 = 0, \\ 12x_1 - 16x_2 - 24x_3 + 64x_4 + 8x_5 = 0, \\ -2x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 9x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

19) $\begin{cases} -x_1 + 6x_2 + 8x_4 - 13x_5 = 0, \\ -x_1 + 15x_2 + 2x_3 + 15x_4 - 35x_5 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 7x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_2 + 3x_4 - 6x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

20) $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 9x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 - 11x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ -9x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 26x_4 + 7x_5 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

21) $\begin{cases} 2x_1 - x_3 - 4x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_2 - 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ -x_1 - 4x_2 + 5x_4 - 19x_5 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 - 7x_5 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 - 12x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

22) $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 14x_4 - 19x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ x_2 - x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

23) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 0, \\ -3x_1 + 7x_2 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

24) $\begin{cases} -x_1 - 4x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 - 13x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 - 2x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

25) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - 6x_5 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 21x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ -2x_2 + 6x_3 + 10x_5 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

26) $\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ -7x_1 + 9x_2 - 8x_3 + 5x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 + 2x_5 = 0; \end{cases}$ [Ответ]

27) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ -4x_1 - 3x_3 + x_4 - 12x_5 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 15x_5 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 0, \\ 14x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 9x_4 + 34x_5 = 0. \end{cases}$ [Ответ]

79. Найти углы между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$, если:

1) $\mathbf{a} = (1, 1, -1, -1)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 1, 1)$; [Решение] [Ответ]

2) $\mathbf{a} = (-1, -2, -1, -2)$, $\mathbf{b} = (1, -2, 1, -2)$. [Ответ]

80. Доказать, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = 2\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{b}^2, \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n.$$

81. Доказать, что система векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ составляет ортонормированный базис, если:

1) $\mathbf{b}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $\mathbf{b}_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\mathbf{b}_3 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

2) $\mathbf{b}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathbf{b}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathbf{b}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$;

3) $\mathbf{b}_1 = \left(-\frac{1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{4}{9}\right)$, $\mathbf{b}_2 = \left(\frac{8}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{4}{9}\right)$, $\mathbf{b}_3 = \left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{7}{9}\right)$.

82. Является ли базис

$$\mathbf{b}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{b}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$
$$\mathbf{b}_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{b}_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

ортонормированным? [Ответ]

83. Показать, что следующие системы векторов ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов:

1) $\mathbf{b}_1 = (1, 2, -2, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, -1, -1, -1)$; [Решение] [Ответ]

2) $\mathbf{b}_1 = (1, -2, 2, -3)$, $\mathbf{b}_2 = (2, -3, 2, 4)$; [Ответ]

3) $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 2, 3, -3)$. [Ответ]

84. Дополнить следующие системы векторов до ортонормированных базисов:

1) $\mathbf{b}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\mathbf{b}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$; [Ответ]

2) $\mathbf{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\mathbf{b}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; [Ответ]

3) $\mathbf{b}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $\mathbf{b}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$;

4) $\mathbf{b}_1 = \left(-\frac{2}{15}, -\frac{11}{15}, \frac{2}{3}\right)$, $\mathbf{b}_2 = \left(-\frac{14}{15}, \frac{2}{15}, -\frac{1}{3}\right)$.

85. Пользуясь теоремой 1.30 о разложении вектора по ортонормированному базису, найти координаты вектора $\mathbf{a} = (3, 6, -9)$ в базисе

$$\mathbf{b}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \mathbf{b}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), \quad \mathbf{b}_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

[Ответ]

86. Даны матрица A и векторы X_1, X_2, X_3. Установить, какие из данных векторов являются собственными векторами матрицы A, и найти их собственные значения, если:

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

2) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; [Ответ]

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. [Ответ]

87. Найти характеристический многочлен и спектр данной матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; [Решение] [Ответ]

2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

4) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -5 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

5) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

7) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. [Ответ]

88. Найти собственные значения λ_i данной матрицы, а также базисы $\mathbf{b}_1^i$, $\mathbf{b}_2^i$, ..., $\mathbf{b}_k^i$ соответствующих им подпространств собственных векторов:

1) $\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$; [Решение] [Ответ]

2) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$; [Ответ]

3) $\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

4) $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

5) $\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

6) $\begin{pmatrix} 1 & 16 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$; [Ответ]

7) $\begin{pmatrix} -2 & 16 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$; [Ответ]

8) $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

9) $\begin{pmatrix} -10 & -30 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$; [Ответ]

10) $\begin{pmatrix} 8 & -25 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$; [Ответ]

11) $\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}$; [Ответ]

12) $\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

13) $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$; [Ответ]

14) $\begin{pmatrix} 7 & 25 \\ -4 & -13 \end{pmatrix}$; [Ответ]

15) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; [Решение] [Ответ]

16) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

17) $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

18) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

19) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 2 & -6 & 7 \\ 2 & -8 & 9 \end{pmatrix}$; [Ответ]

20) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; [Ответ]

21) $\begin{pmatrix} -9 & -8 & 8 \\ -4 & -5 & 4 \\ -10 & -10 & 9 \end{pmatrix}$; [Ответ]

22) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 5 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; [Ответ]

23) $\begin{pmatrix} -7 & -5 & -6 \\ 10 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

24) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

25) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -7 & -3 & -3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

26) $\begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

27) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$; [Ответ]

28) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

29) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 12 & -4 & -5 \end{pmatrix}$; [Ответ]

30) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & -4 & -4 \\ 12 & 1 & -6 & -6 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 16 & 0 & -8 & -7 \end{pmatrix}$; [Ответ]

31) $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

32) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; [Ответ]

33) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

34) $\begin{pmatrix} -9 & 8 & 4 & -4 \\ -4 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 16 & -16 & -8 & 7 \end{pmatrix}$; [Ответ]

35) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; [Ответ]

36) $\begin{pmatrix} 1 & -7 & -4 & -4 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -12 & -6 & -7 \end{pmatrix}$; [Ответ]

37) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

38) $\begin{pmatrix} 2 & 14 & 6 & 7 \\ -1 & -10 & -6 & -4 \\ 1 & 8 & 4 & 4 \\ 1 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$; [Ответ]

39) $\begin{pmatrix} -7 & -2 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & -4 & -5 \\ -6 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

40) $\begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 & -3 \\ -10 & 5 & 0 & -4 \\ -8 & 4 & 2 & -1 \\ 8 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; [Ответ]

41) $\begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; [Ответ]

42) $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; [Ответ]

43) $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 & -5 \\ 1 & -4 & 2 & -6 \\ -1 & 6 & -2 & 8 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; [Ответ]

44) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & 1 \\ -5 & -2 & -4 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. [Решение] [Ответ]

Глава 2

Аналитическая геометрия

2.1. Прямая на плоскости
2.2. Кривые второго порядка

2.1. Прямая на плоскости

2.1.1. Общие задачи
2.1.2. Экономический профиль

2.1.1. Общие задачи

89. Даны точки $M_1(-2,3)$ и $M_2(5,4)$. Найти расстояние d между ними. [Ответ]

90. На оси ординат найти точку, отстоящую от точки $A(3,-8)$ на расстоянии 5 единиц. [Решение] [Ответ]

91. На оси абсцисс найти точку M, расстояние от которой до точки $A(1,4)$ равно 5. [Ответ]

92. Доказать, что треугольник с вершинами $A(-2,-1)$, $B(6,1)$, $C(3,4)$ прямоугольный.

93. Определить, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами $A(1,1)$, $B(0,2)$ и $C(2,-1)$ тупой угол. [Ответ]

94. Две противоположные вершины квадрата находятся в точках $A(3,5)$ и $C(1,-3)$. Найти его площадь. [Ответ]

95. Даны вершины треугольника: $A(-3,6)$, $B(9,-10)$, $C(-5,4)$. Найти координаты центра и радиус описанной окружности. [Ответ]

96. Даны точки $M_1(1,1)$ и $M_2(7,4)$. На отрезке M_1M_2 найти точку $M(x,y)$, которая в 2 раза ближе к M_1, чем к M_2. [Ответ]

97. Отрезок с концами $A(1,-5)$ и $B(4,3)$ разделен на три равные части. Найти координаты точек деления. [Ответ]

98. Точки $A(2,4)$, $B(-3,7)$ и $C(-6,6)$ — три вершины параллелограмма, причем A и C — противоположные вершины. Найти четвертую вершину. [Решение] [Ответ]

99. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-2,6)$, $B(2,8)$ и точка пересечения его диагоналей $M(2,2)$. Найти координаты двух других вершин. [Ответ]

100. Даны середины сторон треугольника $M(-1,5)$, $N(1,1)$, $P(4,3)$. Найти координаты его вершин. [Ответ]

101. Найти точку пересечения медиан треугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.
[Указание] [Ответ]

102. В треугольнике с вершинами $A(2, 3)$, $B(6, 3)$, $C(6, -5)$ найти длину биссектрисы BM.
[Указание] [Ответ]

103. Даны вершины треугольника: $A(7, 2)$, $B(1, 9)$ и $C(-8, -11)$. Определить расстояние от точки O пересечения медиан треугольника до вершины B. [Ответ]

104. В треугольнике с вершинами $O(0, 0)$, $A(8, 0)$, $B(0, 6)$ определить длину медианы OC и биссектрисы OD. [Ответ]

105. Дан треугольник с вершинами $A(-2, 4)$, $B(-6, 8)$, $C(5, -6)$. Найти площадь этого треугольника.
[Ответ]

106. Доказать, что точки $(2, 3)$, $(5, 7)$, $(11, 15)$ лежат на одной прямой. [Решение]

107. Определить площадь параллелограмма, три вершины которого — точки $A(-2, 3)$, $B(4, -5)$, $C(-3, 1)$.
[Ответ]

108. Найти площадь четырехугольника с вершинами $A(-3, 2)$, $B(3, 4)$, $C(6, 1)$, $D(5, -2)$. [Ответ]

109. Даны точки $A(1, 2)$ и $B(4, 4)$. На оси Ox найти точку C такую, чтобы площадь треугольника ABC была равна 5. [Ответ]

110. Найти уравнение прямой:

1) образующей с осью Ox угол $\pi/3$ и пересекающей ось Oy в точке $(0, -6)$; [Ответ]

2) параллельной оси Ox и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 2; [Ответ]

3) параллельной биссектрисе первого координатного угла и отсекающей на оси Oy отрезок, равный -2;
[Решение] [Ответ]

4) параллельной биссектрисе второго координатного угла и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 3.
[Ответ]

111. Определить, при каком значении α прямая

$$(\alpha^2-\alpha)x+(2+\alpha)y-3\alpha+1=0:$$

1) параллельна оси Ox; [Ответ]

2) проходит через начало координат. [Ответ]

112. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2,2/5)$ и образующей с осью Ox угол, равный $\operatorname{arctg}3$. [Решение] [Ответ]

113. Равнобедренная трапеция с основаниями 10 и 4 имеет острый угол $\pi/4$. Написать уравнения сторон трапеции, приняв за ось Ox большее основание, а за Oy — ось симметрии трапеции. [Ответ]

114. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,-1)$ и параллельной биссектрисе второго координатного угла. [Ответ]

115. Найти уравнение прямой, содержащей биссектрису острого угла, образованного прямыми $y=\sqrt{3}x+4$ и $y=4$. [Ответ]

116. Написать уравнение прямой, проходящей через точки:

1) $A(7,4)$, $B(4,-8)$; [Решение] [Ответ]

2) $A(7,-2)$, $B(-3,0)$; [Ответ]

3) $A(5,4)$, $B(14,-8)$; [Ответ]

4) $A(5,-4)$, $B(0,-8)$; [Ответ]

5) $A(-3,-2)$, $B(-6,-14)$; [Ответ]

6) $A(5,-4)$, $B(-4,-16)$; [Ответ]

7) $A(7,-4)$, $B(10,-8)$; [Ответ]

8) $A(7,-4)$, $B(-3,4)$; [Ответ]

9) $A(-3,4)$, $B(-2,8)$; [Ответ]

10) $A(7,-2)$, $B(5,-10)$; [Ответ]

11) $A(5,-4)$, $B(2,-1)$; [Ответ]

12) $A(-3,-4)$, $B(-6,-2)$; [Ответ]

13) $A(7,4)$, $B(17,12)$; [Ответ]

14) $A(-3,-4)$, $B(-8,-2)$; [Ответ]

15) $A(7,4)$, $B(16,-2)$. [Ответ]

117. Дан треугольник с вершинами A, B, C. Написать уравнения сторон треугольника:

1) $A(3,2)$, $B(3,8)$, $C(6,2)$; [Ответ]

2) $A(1,2)$, $B(-2,4)$, $C(4,8)$. [Ответ]

118. Найти угловой коэффициент k прямой и ординату b точки пересечения ее с осью Oy, зная, что прямая проходит через точки $A(1,1)$ и $B(-2,3)$. [Ответ]

119. Прямая проходит через точки $A(2,3)$ и $B(-4,-1)$ и пересекает ось Oy в точке C. Найти координаты точки C. [Ответ]

120. Какую абсциссу имеет точка M, лежащая на прямой, проходящей через точки $A(-2,-2)$ и $B(-1,6)$, и имеющая ординату, равную 22? [Ответ]

121. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,2)$ и находящейся на одинаковом расстоянии от точек $M_1(2,3)$ и $M_2(4,-5)$. [Ответ]

122. Какой угол образует с осью Ox прямая, проходящая через точку $D(1,3)$ и точку пересечения медиан треугольника с вершинами $A(-1,4)$, $B(2,3)$, $C(5,8)$? [Ответ]

123. Привести к уравнению прямой с угловым коэффициентом общее уравнение прямой $12x-5y-65=0$. [Ответ]

124. Определить параметры k и b для следующих прямых:

1) $2x + 5y - 1 = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $7x + 2y = 0$; [Ответ]

3) $2y - 5 = 0$. [Ответ]

125. При каком значении C прямая

$$2x - 3y + C = 0$$

пересекает ось Oy в точках с ординатами $b_1 = 2$, $b_2 = -3$? [Ответ]

126. На прямой $2x + y - 4 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек $A(3, 5)$ и $B(7, 1)$. [Ответ]

127. Найти уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки, равные 3 и 4. [Ответ]

128. Построить прямые, заданные уравнениями:

1) $2x - y - 4 = 0$; [Решение]

2) $2x - 5y + 20 = 0$;

3) $2x + 3y + 8 = 0$;

4) $2x - 3y = 0$;

5) $y + 4 = 0$.

129. Привести к уравнениям в отрезках данные уравнения прямых и построить эти прямые:

1) $y = 2x - 3$; [Ответ]

2) $3x - 4y - 12 = 0$; [Ответ]

3) $5x + 2y - 10 = 0$; [Ответ]

4) $3x - 2y - 1 = 0$. [Ответ]

130. Составить уравнение прямой, если точка $M(4, 2)$ является серединой ее отрезка, заключенного между осями координат. [Ответ]

131. Составить уравнение прямой, отсекающей на положительных полуосях координат равные отрезки, если длина отрезка, заключенного между осями координат, равна $7\sqrt{2}$. [Ответ]

132. При каких значениях α и β прямая

$$(\alpha - \beta)x + (2\alpha + \beta)y - 1 = 0$$

отсекает на оси Ox отрезок, равный $1/7$, а на оси Oy — отрезок, равный $1/2$? [Ответ]

133. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(4, 4)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью $S = 4$. [Ответ]

134. Через середину отрезка AB, где $A(4, 0)$, $B(0, 6)$, провести прямую, отсекающую на оси Ox отрезок, вдвое больший, чем на оси Oy, и написать ее уравнение. [Ответ]

135. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(2, -6)$ и отсекает на осях Ox и Oy отрезки одинаковой длины, считая каждый отрезок направленным от начала координат. [Ответ]

136. Через точку $M(4, 3)$ проведена прямая, отсекающая от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3. Найти точки пересечения этой прямой с осями координат. [Ответ]

137. Найти площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $2x - 5y + 10 = 0$. [Ответ]

138. При каких значениях C площадь, ограниченная координатными осями и прямой $3x + 10y + C = 0$, равна 135 квадратных единиц? [Ответ]

139. Найти угол между прямыми:

1) $2x - 3y + 10 = 0$, $5x - y + 4 = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $x - 3y - 9 = 0,\ 3x - y - 6 = 0;$ [Ответ]

3) $x - y + 6 = 0,\ -x - y - 8 = 0;$ [Ответ]

4) $2x - 3y - 16 = 0,\ x + y - 1 = 0;$ [Ответ]

5) $x + y - 5 = 0,\ x + 2y - 13 = 0;$ [Ответ]

6) $2x + 2y + 7 = 0,\ x + y + 2 = 0;$ [Ответ]

7) $-2x - 3y + 3 = 0,\ -x - y + 1 = 0;$ [Ответ]

8) $2x - 3y + 5 = 0,\ 3x + 2y + 21 = 0;$ [Ответ]

9) $-2x - 5y + 9 = 0,\ 5x - 2y + 19 = 0;$ [Ответ]

10) $x - 5y - 22 = 0,\ 5x - 2y + 37 = 0;$ [Ответ]

11) $x - 5y - 22 = 0,\ -3x - 2y - 3 = 0;$ [Ответ]

12) $x - 3y - 14 = 0,\ -x + 2y - 17 = 0;$ [Ответ]

13) $x + 3y + 15 = 0,\ -3x - 2y + 15 = 0;$ [Ответ]

14) $-2x - y + 7 = 0,\ -3x - 2y - 3 = 0;$ [Ответ]

15) $-2x + 5y + 24 = 0,\ x - y + 5 = 0;$ [Ответ]

16) $2x + 3y + 8 = 0,\ -x - 2y - 5 = 0.$ [Ответ]

140. Найти внутренние углы треугольника с вершинами $A(2, 1)$, $B(3, 1)$, $C(1, 2)$. [Ответ]

141. Написать уравнение прямой l_2, проходящей через точку $A(0, 2)$ под углом $\pi/4$ к прямой l_1, задаваемой уравнением $x - 2y + 3 = 0$. [Ответ]

142. Точка $(2, 0)$ является вершиной правильного треугольника, а противолежащая ей сторона лежит на прямой $x + y - 1 = 0$. Составить уравнения двух других сторон. [Ответ]

143. Показать, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 5 = 0$ перпендикулярны.

144. Показать, что прямые $x + y - 1 = 0$ и $2x + 2y - 3 = 0$ параллельны.

145. При каких значениях α следующие пары прямых будут: параллельны, перпендикулярны:

1) $2x - 3y + 4 = 0$, $\alpha x - 6y + 7 = 0$; [Ответ]

2) $\alpha x - 4y + 1 = 0$, $-2x + y + 2 = 0$; [Ответ]

3) $4x + y - 6 = 0$, $3x + \alpha y - 2 = 0$; [Ответ]

4) $x - \alpha y + 5 = 0$, $2x + 3y + 3 = 0$? [Ответ]

146. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A параллельной прямой, соединяющей точки M и N:

1) $A(3, 1)$, $M(5, -2)$, $N(4, -1)$; [Решение] [Ответ]

2) $A(-1, -3)$, $M(5, 4)$, $N(2, 5)$; [Ответ]

3) $A(3, -3)$, $M(-3, -4)$, $N(-6, -10)$; [Ответ]

4) $A(-1, 1)$, $M(-3, -2)$, $N(0, 2)$; [Ответ]

5) $A(2, 1)$, $M(5, -4)$, $N(0, -2)$; [Ответ]

6) $A(-1, -3)$, $M(5, 4)$, $N(20, 16)$; [Ответ]

7) $A(-1, -3)$, $M(-3, 4)$, $N(0, 6)$. [Ответ]

147. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1, 2)$:

1) параллельно прямой $y = 2x - 7$; [Ответ]

2) перпендикулярно прямой $x + 3y - 2 = 0$. [Ответ]

148. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно прямой, соединяющей точки M и N:

1) $A(-1,1)$, $M(-3,-4)$, $N(-4,-5)$; [Решение] [Ответ]

2) $A(2,-3)$, $M(-3,4)$, $N(-9,6)$; [Ответ]

3) $A(3,1)$, $M(7,-4)$, $N(6,-8)$; [Ответ]

4) $A(-1,1)$, $M(5,-2)$, $N(8,0)$; [Ответ]

5) $A(3,2)$, $M(5,-2)$, $N(7,2)$; [Ответ]

6) $A(-1,-3)$, $M(-3,-2)$, $N(-8,-1)$; [Ответ]

7) $A(2,-3)$, $M(-3,-2)$, $N(7,2)$. [Ответ]

149. Даны вершины треугольника: $A(6,-6)$, $B(2,-3)$, $C(8,5)$. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины B. [Решение] [Ответ]

150. При каком значении α прямые

$$(\alpha+1)x+(3-\alpha)y-8=0, \quad (\alpha-3)x+(2\alpha-3)y=0$$

взаимно перпендикулярны? [Ответ]

151. Даны стороны треугольника: $x+3y-8=0$ (AB), $y-x=0$ (BC), $7x+5y-8=0$ (AC). Найти уравнение высоты этого треугольника, проведенной из вершины B. [Ответ]

152. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3,-4)$, являющуюся основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую. [Ответ]

153. Даны вершины треугольника $A(2,-2)$, $B(-6,2)$ и точка $O(1,2)$ пересечения его высот. Найти координаты третьей вершины C. [Ответ]

154. Найти расстояние от точки $(2,1)$ до прямой $3x+4y-5=0$. [Ответ]

155. В треугольнике ABC найти длину высоты AD:

1) $A(-8,-5)$, $B(-2,5)$, $C(-5,2)$; [Решение] [Ответ]

2) $A(-6,6)$, $B(-2,-4)$, $C(-5,-1)$; [Ответ]

3) $A(-4,15)$, $B(-2,5)$, $C(-6,9)$; [Ответ]

4) $A(-6,11)$, $B(3,-4)$, $C(7,-7)$; [Ответ]

5) $A(-8,-19)$, $B(-2,-4)$, $C(-10,-12)$; [Ответ]

6) $A(-3,15)$, $B(3,5)$, $C(5,1)$; [Ответ]

7) $A(9,11)$, $B(3,-4)$, $C(7,-3)$; [Ответ]

8) $A(9,11)$, $B(3,-4)$, $C(0,-1)$; [Ответ]

9) $A(9,-5)$, $B(3,5)$, $C(9,11)$; [Ответ]

10) $A(7,-10)$, $B(-2,5)$, $C(-11,17)$; [Ответ]

11) $A(4,20)$, $B(-2,5)$, $C(-6,1)$; [Ответ]

12) $A(-3,-10)$, $B(3,5)$, $C(5,1)$; [Ответ]

13) $A(-3,15)$, $B(3,5)$, $C(-3,2)$; [Ответ]

14) $A(-11,-10)$, $B(-2,5)$, $C(-8,11)$; [Ответ]

15) $A(6,20)$, $B(3,5)$, $C(6,6)$. [Ответ]

156. Точка $A(2,-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x-2y-7=0$. Найти площадь этого квадрата. [Ответ]

157. Найти расстояние между следующими параллельными прямыми:

$$3x+4y-20=0, \quad 6x+8y+5=0.$$ [Ответ]

158. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x - 12y - 65 = 0$ и $5x - 12y + 26 = 0$. Найти площадь квадрата. [Ответ]

159. Даны уравнения оснований трапеции:

$$3x - 4y - 15 = 0, \quad 3x - 4y - 35 = 0.$$

Найти её высоту. [Ответ]

160. Через точку $M(1, 2)$ проведена прямая так, что расстояние от нее до точки $P(6, 2)$ равно 4. Найти угловой коэффициент этой прямой. [Ответ]

161. Составить уравнение прямой, зная, что расстояние от неё до начала координат равно $\sqrt{2}$, а угол между перпендикуляром, опущенным из начала координат на прямую, и осью Ox равен $3\pi/4$. [Ответ]

162. Найти координаты точки M_2, симметричной точке $M_1(-3, 4)$ относительно прямой $4x - y - 1 = 0$. [Ответ]

163. Найти координаты точки, симметричной точке $A(-2, -2)$ относительно прямой $x + y - 4 = 0$. [Ответ]

164. Составить уравнения биссектрис углов, образованных пересекающимися прямыми $3x + 4y - 1 = 0$ и $5x + 12y - 2 = 0$. [Решение] [Ответ]

165. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A треугольника ABC с вершинами $A(1, -2)$, $B(5, 4)$, $C(-2, 0)$. [Указание] [Ответ]

166. Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых:

1) $3x + 5y - 9 = 0$, $10x - 6y + 4 = 0$; [Ответ]

2) $2x + 5y - 2 = 0$, $x + y + 4 = 0$; [Ответ]

3) $2y = x - 1$, $4y - 2x + 2 = 0$; [Ответ]

4) $x + 8 = 0$, $2x - 3 = 0$; [Ответ]

5) $\dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{2}=1,\ y=\dfrac{1}{2}x+2;$ [Ответ]

6) $x+y=0,\ x-y=0;$ [Ответ]

7) $y+3=0,\ 2x+y-1=0;$ [Ответ]

8) $y=3-6x,\ 12x+2y-5=0;$ [Ответ]

9) $2x+3y=8,\ x+y-3=0;$ [Ответ]

10) $\dfrac{2}{3}x-\dfrac{3}{4}y-1=0,\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{2}{3}y+2=0.$ [Ответ]

167. Найти точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$:

1) $A(-10,-16),\ B(-15,-2),\ C(-3,12),\ D(20,19);$ [Решение] [Ответ]

2) $A(-4,-6),\ B(14,3),\ C(1,14),\ D(-26,11);$ [Ответ]

3) $A(-4,16),\ B(-11,0),\ C(1,-4),\ D(4,6);$ [Ответ]

4) $A(-2,-4),\ B(18,3),\ C(7,14),\ D(-22,11);$ [Ответ]

5) $A(-6,18),\ B(18,12),\ C(15,-10),\ D(-22,-4);$ [Ответ]

6) $A(-6,-14),\ B(13,-10),\ C(15,14),\ D(-22,18);$ [Ответ]

7) $A(-2,-2),\ B(-15,8),\ C(-7,8),\ D(0,2);$ [Ответ]

8) $A(14,-4),\ B(14,-6),\ C(-13,14),\ D(-26,26);$ [Ответ]

9) $A(-4,-8),\ B(-11,-6),\ C(1,2),\ D(24,8);$ [Ответ]

10) $A(4,-16),\ B(-16,7),\ C(-3,12),\ D(24,-1).$ [Ответ]

168. При каких значениях a прямые $ax-4y=6$ и $x-ay=3$:

1) пересекаются; [Ответ]

2) параллельны; [Ответ]

3) совпадают? [Ответ]

169. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x - 2y + 3 = 0$ и $2x + y + 5 = 0$ и параллельную оси ординат, и написать её уравнение. [Ответ]

170. Через точку пересечения прямых $3x - 2y + 5 = 0$, $x + 2y - 9 = 0$ проведена прямая, параллельная прямой $2x + y + 6 = 0$. Составить её уравнение. [Ответ]

171. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - 3y - 1 = 0$ и $3x - y - 2 = 0$ и перпендикулярной прямой $y = x + 1$. [Ответ]

172. Через точку пересечения прямых $x + y - 6 = 0$ и $2x + y - 13 = 0$ провести прямую, не совпадающую с данными и отсекающую на осях равные отрезки, и написать ее уравнение. [Ответ]

173. Найти координаты проекции точки $A(1, 3)$ на прямую

$$2x - y + 5 = 0.$$

[Ответ]

174. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, -1)$ так, что середина ее отрезка между прямыми $2x - 3y - 6 = 0$ и $2x - 3y + 6 = 0$ лежит на прямой $2x + 15y - 42 = 0$. [Ответ]

175. Дан треугольник с вершинами $A(4, 6)$, $B(-3, 0)$, $C(2, -3)$. Найти уравнения прямых, на которых лежит биссектриса AD и высота CE, и определить величину острого угла φ между ними. [Ответ]

176. При каком значении α прямая $x + y - \alpha = 0$ касается окружности $x^2 + y^2 = 1$? [Ответ]

177. Найти площадь треугольника, образованного прямыми

$$2x + y + 4 = 0, \quad x + 7y - 11 = 0, \quad 3x - 5y - 7 = 0.$$

[Ответ]

178. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника ABC, если заданы его вершина $A(1, 3)$ и уравнения медиан $x - 2y + 1 = 0$, $y - 1 = 0$. [Ответ]

179. Известны уравнения прямых, на которых лежат две стороны ромба: $x+2y-4=0$, $x+2y-10=0$, и уравнение одной из его диагоналей $x-y+2=0$. Найти координаты вершин ромба. [Ответ]

180. Дан треугольник с вершинами $A(1,-2)$, $B(0,5)$, $C(-6,5)$. Найти координаты центра описанной около треугольника окружности. [Ответ]

181. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника, зная уравнения двух высот и вершину: $7x-2y-1=0$, $2x-7y-6=0$, $A(3,-4)$. [Ответ]

182. Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $x+y-2=0$ и $7x-y+4=0$ и точка $(3,5)$ на его основании. Найти уравнение прямой, на которой лежит основание. [Ответ]

183. Даны координаты середин сторон треугольника: $A(1,2)$, $B(7,4)$, $C(3,-4)$. Найти уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника. [Ответ]

184. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника, зная одну его вершину $A(2,-7)$, а также уравнения прямых, на которых лежат высота $3x+y+11=0$ и медиана $x+2y+7=0$, проведенные из различных вершин. [Ответ]

185. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x+5y-13=0$ и $x-4y+7=0$ и делящей отрезок AB между точками $A(1,0)$ и $B(7,3)$ в отношении $2:1$. [Ответ]

186. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $y+2x+4=0$ относительно прямой $y-x-2=0$. [Ответ]

187. Даны вершины треугольника: $A(4,4)$, $B(0,1)$, $C(-2,-4)$. Найти уравнения высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из вершины A. [Ответ]

188. Даны вершины $A(-1,0)$, $B(7,9)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $M(8,6)$ пересечения его диагоналей. Найти координаты вершин C и D. [Ответ]

189. Даны уравнения сторон треугольника $x+y-1=0$ (AB), $y+1=0$ (BC) и точка $M(-1,0)$ пересечения его медиан. Найти уравнение третьей стороны AC. [Ответ]

2.1.2. Экономический профиль

190. Предприятие купило автомобиль стоимостью 24 тыс. ден. ед. Ежегодная норма амортизации составляет 10% от цены покупки. Написать уравнение, определяющее стоимость автомобиля в зависимости от времени t. Найти стоимость автомобиля:

1) через 5 лет; [Решение] [Ответ]

2) через 6 лет и 3 месяца. [Ответ]

191. Фирма купила четыре одинаковых компьютера. Первоначальная стоимость каждого компьютера составляет 3000 ден. ед., остаточная — 200 ден. ед. Срок службы компьютера по норме — 4 года. Через 2 года компьютеры были проданы по цене 1800 ден. ед. каждый. Построить график функции, определяющей стоимость четырех компьютеров в зависимости от времени t. Какую прибыль получило предприятие после продажи? [Ответ]

192. Цена телевизора — 1000 ден. ед., остаточная стоимость равна нулю, а срок службы составляет 5 лет. Построить график функции, определяющей стоимость телевизора в зависимости от времени t. За сколько нужно продать телевизор после трех с половиной лет эксплуатации, чтобы получить прибыль 100 ден. ед.? [Ответ]

193. Станок куплен за 12 тыс. ден. ед. По нормам его остаточная стоимость равна нулю, а срок службы составляет 8 лет. Написать уравнение, определяющее стоимость станка $p(t)$ в зависимости от времени t, построить график. Определить стоимость станка через 7 лет и 3 месяца эксплуатации. [Ответ]

194. Стоимость y перевозки груза на расстояние x автотранспортом задается формулой $y = 0{,}5x + 2$, а водным транспортом — $y = 0{,}25x + 3$. Каким видом транспорта выгоднее осуществлять перевозки? [Ответ]

195. Издержки перевозки двумя транспортными средствами выражаются функциями $y = 20x + 100$ и $y = 25x + 70$, где x — дальность перевозки в сотнях километров, y — транспортные расходы в денежных единицах. Определить, начиная с какого расстояния более экономичным становится первое транспортное средство. [Решение] [Ответ]

196. Мебельная фабрика продаёт каждый изготовленный стул по 64 тыс. руб. При этом издержки составляют 635 тыс. руб. за 8 стульев и 750 тыс. руб. за 13 стульев. Найти точку безубыточности, если функция издержек линейная. [Решение]

197. Фиксированные издержки составляют 10 тыс. ден. ед. в месяц, переменные издержки — 30 ден. ед., выручка — 50 ден. ед. за единицу продукции. Составить функцию прибыли и построить ее график. Найти точку безубыточности. [Ответ]

198. Функция издержек производства шин имеет вид

$$C(q) = 30q + 2100.$$

Цена одной шины — 60 ден. ед. Найти точку безубыточности. Дать графическую иллюстрацию. [Ответ]

199. Постоянные издержки при производстве ручных часов составляют 12 тыс. ден. ед. в месяц, а переменные — 300 ден. ед. за одни часы. Цена часов — 500 ден. ед. Написать функции дохода и издержек. Построить графики. Найти точку безубыточности. [Ответ]

200. Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются уравнениями

$$D = -2p + 12, \quad S = p + 3,$$

где p — цена товара. Найти:

1) точку рыночного равновесия; [Решение] [Ответ]

2) точку равновесия после введения налога, равного 3 ден. ед., определить увеличение цены и уменьшение равновесного объема продаж; [Решение] [Ответ]

3) величину субсидии, которая приведет к увеличению объёма продаж на 2 единицы; [Указание] [Ответ]

4) новую точку равновесия и доход государства, если вводится пропорциональный налог, равный 20%. [Указание] [Ответ]

201. Спрос на некоторый товар равен 10 единицам при цене 300 ден. ед. за штуку и 20 единицам при цене 280 ден. ед. Поставщик согласен продать 8 единиц товара при цене 84 ден. ед. и 5 единиц при цене 60 ден. ед. Найти точку рыночного равновесия. [Ответ]

202. При цене 100 ден. ед. покупают 30 единиц некоторого товара, а при цене 140 ден. ед. — только 20 единиц. Поставщик продает 8 единиц товара по цене 150 ден. ед. и 15 единиц по цене 255 ден. ед. Найти точку рыночного равновесия и построить графики. [Ответ]

203. Пусть предложение и спрос на некоторый товар определяются уравнениями $S = p+100$, $D = -2p+250$, где p — цена товара. Найти:

1) точку рыночного равновесия; [Ответ]

2) новую точку рыночного равновесия и доход государства от введения налога, равного 10 ден. ед. на единицу продукции; [Ответ]

3) доход государства, если налог был удвоен (подумать, может ли государство потерять деньги, увеличивая налог); [Ответ]

4) новую точку рыночного равновесия, если правительство предоставило субсидию, равную 5 ден. ед. на единицу продукции. [Ответ]

204. По одному вкладу банк выплачивает 15% годовых, а по другому, более рискованному — 20% годовых. Вкладчик хочет вложить 3 000 ден. ед. и получать ровно 500 ден. ед. в год. Какие суммы нужно вложить по вкладам каждого вида? [Ответ]

205. Петров взял кредит для строительства дома под 10% годовых в одном банке и под 12% в другом. Общая сумма займа составляет 10 тыс. ден. ед., а сумма выплат по процентам — 1 120 ден. ед. Сколько было взято в кредит в каждом банке? [Ответ]

206. Нужно восстановить границы квадратного участка земли по трем сохранившимся столбам: один — в центре участка, остальные — на двух противоположных границах. На плане положение центрального столба определено точкой $M(1, 6)$, а боковых — точками $A(5, 9)$ и $B(3, 0)$. Составить уравнения прямых, ограничивающих участок. [Ответ]

2.2. Кривые второго порядка

207. Найти координаты центра и радиус окружности:

1) $(x-1)^2+(y+3)^2=1$; [Ответ]

2) $x^2+y^2-4x+8y-16=0$; [Решение] [Ответ]

3) $9x^2+9y^2+42x-54y-95=0$; [Ответ]

4) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$; [Ответ]

5) $3x^2+3y^2+6x-4y-2=0$. [Ответ]

208. Составить уравнения окружностей для следующих случаев:

1) центр окружности — начало координат, радиус $r=4$; [Ответ]

2) центром окружности является точка $A(3,-2)$, а ее радиус $r=5$; [Ответ]

3) окружность проходит через точку $A(3,7)$, а ее центр совпадает с точкой $B(0,3)$; [Ответ]

4) точки $A(4,3)$ и $B(0,7)$ являются концами одного диаметра; [Ответ]

5) окружность проходит через точки $A_1(4,4)$, $A_2(-2,4)$, $A_3(-3,-3)$; [Ответ]

6) окружность касается прямой $5x-12y+17=0$, а центром окружности является точка $A(2,-1)$; [Ответ]

7) окружность касается двух параллельных прямых $2x+y-15=0$, $2x+y+5=0$ и проходит через точку $A(1,3)$; [Ответ]

8) окружность касается осей координат и проходит через точку $M(2,1)$. [Ответ]

209. Составить уравнение хорды окружности $x^2+y^2=25$, делящейся в точке $(-1,4)$ пополам. [Ответ]

210. Составить уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ в точке $M(5, 1)$. [Ответ]

211. Вывести условие, при котором прямая $y = kx + b$ касается окружности $x^2 + y^2 = R^2$. [Ответ]

212. Составить уравнения касательных к окружности $x^2+y^2+2x-19$, проведенных из точки $(1, 6)$. [Ответ]

213. Составить уравнение геометрического места точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до точек $F_1(-3, 0)$ и $F_2(3, 0)$ равна 10. [Ответ]

214. Составить каноническое уравнение эллипса для следующих случаев:

1) известны полуоси эллипса $a = 9$, $b = 5$; [Ответ]

2) малая ось равна 12, а расстояние между фокусами $2c = 5$; [Решение] [Ответ]

3) известны эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}6$ и расстояние между фокусами $2c = 12$; [Ответ]

4) большая ось равна 5, а расстояние между фокусами $2c = 4$. [Ответ]

215. Определить полуоси, фокусы и эксцентриситет каждого из следующих эллипсов:

1) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; [Ответ]

2) $4x^2 + y^2 = 16$; [Ответ]

3) $x^2 + 4y^2 = 36$; [Ответ]

4) $24x^2 + 49y^2 = 1176$; [Решение] [Ответ]

5) $16x^2 + 25y^2 = 400$. [Ответ]

216. Определить точки эллипса $x^2/25+y^2/9 = 1$, расстояние от которых до левого фокуса равно 7. [Ответ]

217. Определить, как расположены точки

$$A(4, 1/5),\ B(1, 1),\ C(-2, -5),\ D(-1, -2).$$

относительно эллипса $16x^2 + 25y^2 = 65$. [Ответ]

218. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2+5y^2=20$, а две другие совпадают с концами его малой оси. [Ответ]

219. Определить эксцентриситет эллипса, если известно, что его малая ось видна из фокуса под прямым углом. [Ответ]

220. Убедиться, что каждое из данных уравнений определяет эллипс, найти его центр симметрии и полуоси:

1) $x^2+4y^2+2x+16y-5=0$; [Ответ]

2) $5x^2+2y^2-50x-8y-27=0$. [Ответ]

221. Составить уравнение эллипса, длина большой оси которого равна 20, а фокусами служат точки $F_1(-1,0)$ и $F_2(5,0)$. [Ответ]

222. Установить, какие линии определяются приведёнными ниже уравнениями, и изобразить их на чертеже:

1) $y=\frac{5}{4}\sqrt{16-x^2}$; [Ответ]

2) $y=-\frac{5}{4}\sqrt{16-x^2}$; [Ответ]

3) $x=-\frac{2}{3}\sqrt{7-y^2}$; [Ответ]

4) $y=\frac{1}{9}\sqrt{6-x^2}$. [Ответ]

223. Найти точки пересечения прямой и эллипса:

1) $x+2y-6=0$ и $x^2+4y^2+2x-24=0$; [Ответ]

2) $4x-3y+40=0$ и $9x^2+16y^2=144$. [Ответ]

224. Дан эллипс

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1.$$

Определить, при каких значениях m прямая $y=-x+m$:

1) пересекает данный эллипс; [Ответ]

2) проходит вне эллипса; [Ответ]

3) касается его. [Указание] [Ответ]

225. Составить уравнения касательных к эллипсу $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$:

1) параллельных прямой $3x+2y-1=0$; [Ответ]

2) перпендикулярных этой прямой. [Ответ]

226. Составить уравнение касательной к эллипсу $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ в его точке $M(x_1,y_1)$. [Ответ]

227. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

1) известны оси гиперболы $2a=12$, $2b=10$; [Ответ]

2) расстояние между фокусами $2c=12$, эксцентриситет $\varepsilon=1{,}5$; [Ответ]

3) расстояние между фокусами $2c=20$, ось $2b=16$; [Ответ]

4) даны уравнения асимптот $y=\pm\dfrac{5}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c=2\sqrt{34}$; [Ответ]

5) расстояние между вершинами равно 20, а уравнение асимптоты $y=2{,}4x$. [Ответ]

228. Для каждой из следующих гипербол найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот:

1) $16x^2 - 9y^2 = 144$; [Ответ]

2) $x^2 - \dfrac{y^2}{16} = 1$; [Ответ]

3) $64x^2 - 9y^2 = 1$; [Ответ]

4) $25x^2 - 16y^2 = 1$; [Ответ]

5) $x^2 - y^2 = 1$; [Ответ]

6) $4x^2 - y^2 = 16$. [Ответ]

229. Установить, какие линии определяются уравнениями:

1) $y = \dfrac{3}{2}\sqrt{x^2 - 9}$; [Ответ]

2) $y = -4\sqrt{x^2 + 1}$; [Ответ]

3) $x = -\dfrac{3}{2}\sqrt{y^2 + 9}$; [Ответ]

4) $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + 16}$; [Ответ]

5) $y = 1 + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^2 + 4x + 9}$; [Ответ]

6) $x = 10 - 3\sqrt{y^2 + 4y + 16}$. [Ответ]

230. Убедиться, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, найти ее центр симметрии и полуоси:

1) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $9x^2 - 4y^2 - 36x - 16y - 16 = 0$; [Ответ]

3) $3x^2 - 9y^2 - 30x + 30y + 15 = 0$. [Ответ]

231. Составить уравнение гиперболы, зная, что расстояние между ее вершинами равно 24, а фокусы находятся в точках $F_1(-10, 2)$ и $F_2(16, 2)$. [Ответ]

232. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(-5, 2)$ параллельно асимптотам гиперболы $9x^2 - 4y^2 = 36$. [Ответ]

233. Найти на гиперболе $x^2/4 - y^2/9 = 1$ точки с абсциссой $x = 6$ и фокальные радиусы этих точек. [Ответ]

234. Найти на гиперболе $x^2/9 - y^2/16 = 1$ точки, фокальные радиусы которых равны 5. [Ответ]

235. Найти точки пересечения гиперболы $x^2/20 - y^2/5 = 1$ и прямой $x - 2y + 2 = 0$. [Ответ]

236. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет $\varepsilon = 2$. [Ответ]

237. Составить каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox, для следующих случаев:

1) парабола проходит через точку $\left(2, 2\sqrt{2}\right)$; [Ответ]

2) расстояние от фокуса до директрисы равно 4; [Ответ]

3) фокус параболы находится в точке $F(-2, 0)$; [Ответ]

4) расстояние между фокусом и вершиной равно 3. [Ответ]

238. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точку $(1, 1)$, если ее вершина находится в начале координат. [Ответ]

239. Найти координаты фокуса и записать уравнение директрисы каждой параболы, заданной уравнением:

1) $y^2 = 12x$; [Ответ]

2) $y^2 = -8x$; [Ответ]

3) $x^2 = -8y$. [Ответ]

240. Определить, какие линии задаются уравнениями:

1) $y = 3\sqrt{x}$; [Решение] [Ответ]

2) $y^2 + 5x - 6y + 4 = 0$; [Ответ]

3) $y = \sqrt{-2x}$; [Ответ]

4) $4x + 3y^2 - 6y - 9 = 0$; [Ответ]

5) $9x^2 - 18x + 3y + 12 = 0$; [Ответ]

6) $x = 5\sqrt{y}$; [Ответ]

7) $x = -5\sqrt{-y}$. [Ответ]

241. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в точке $(4, -1)$, а фокус — в точке $(4, 2)$. [Ответ]

242. На параболе $y^2 = 64x$ найти точку M_0, ближайшую к прямой $4x + 3y + 44 = 0$, и вычислить расстояние от точки M_0 до этой прямой. [Решение] [Ответ]

243. Составить уравнения касательных к параболе $x^2 = 16y$ для следующих случаев:

1) касательная проходит через точку $A(-4, 1)$; [Ответ]

2) касательная параллельна прямой $x - 2y + 1 = 0$; [Ответ]

3) касательная перпендикулярна прямой $x - 2y + 2 = 0$. [Ответ]

244. Определить точки пересечения параболы $x^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ и прямой $x + y - 2 = 0$. [Ответ]

245. Вычислить фокальный радиус точки параболы $y^2 = 40x$, если абсцисса этой точки равна 14. [Ответ]

246. Вершина параболы, проходящей через точку $(3, 5)$, совпадает с центром окружности $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$. Составить уравнение этой параболы, если ее ось параллельна оси Ox. [Ответ]

247. Установить, какую линию определяет уравнение:

1) $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$; [Ответ]

3) $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$; [Ответ]

4) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$; [Ответ]

5) $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0$; [Ответ]

6) $x^2 + 4y^2 + 8y + 5 = 0$; [Ответ]

7) $x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0$; [Ответ]

8) $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$; [Ответ]

9) $x^2 - 6x + 8 = 0$; [Ответ]

10) $x^2 + 2x + 5 = 0$. [Ответ]

248. Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке $C(x_0, y_0)$; сделать рисунок:

1) правый фокус гиперболы $57x^2 - 64y^2 = 3648$, $C(2, 8)$; [Решение] [Ответ]

2) левый фокус эллипса $13x^2 + 49y^2 = 637$, $C(1, 8)$; [Ответ]

3) $B(3,4)$, C — вершины параболы $y^2 = \dfrac{x+7}{4}$; [Ответ]

4) фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$, $C(0,-6)$; [Ответ]

5) правую вершину гиперболы $3x^2 - 25y^2 = 75$, $C(-5,-2)$; [Ответ]

6) фокусы эллипса $x^2 + 9y^2 = 9$, C — его нижняя вершина; [Ответ]

7) правую вершину гиперболы $40x^2 - 81y^2 = 3240$, $C(-2,5)$; [Ответ]

8) правый фокус эллипса $x^2 + 4y^2 = 12$, $C(2,-7)$; [Ответ]

9) $B(2,-5)$, C — вершина параболы $x^2 = -2(y+1)$; [Ответ]

10) левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$, $C(-1,-2)$; [Ответ]

11) правую вершину гиперболы $3x^2 - 16y^2 = 48$, $C(1,3)$; [Ответ]

12) фокусы эллипса $25x^2 + 26y^2 = 650$, C — его верхняя вершина; [Ответ]

13) левую вершину гиперболы $5x^2 - 9y^2 = 45$, $C(0,-6)$; [Ответ]

14) левый фокус эллипса $3x^2 + 7y^2 = 21$, $C(-1,-3)$; [Ответ]

15) $B(1,4)$, C — вершина параболы $y^2 = \dfrac{x-4}{3}$. [Ответ]

249. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет заданным условиям; привести к каноническому виду и сделать рисунок:

1) сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-1,2)$ и $B(3,-1)$ равна 18,5; [Ответ]

2) точка M отстоит от точки $A(1,5)$ на расстоянии, в 4 раза меньшем, чем от прямой $x = -1$; [Решение] [Ответ]

3) отношение расстояний от точки M до точек $A(3,-5)$ и $B(4,1)$ равно $1/4$; [Ответ]

4) точка M отстоит от прямой $x = -7$ на расстоянии, в 3 раза меньшем, чем от точки $A(3,1)$; [Ответ]

5) точка M отстоит от прямой $x = 2$ на расстоянии, в 5 раз большем, чем от точки $A(4, -3)$; [Ответ]

6) точка M отстоит от точки $A(-3, -4)$ на расстоянии, в 3 раза большем, чем от прямой $x = 5$; [Ответ]

7) точка M отстоит от точки $A(5, 7)$ на расстоянии, в 4 раза большем, чем от точки $B(-2, 1)$; [Ответ]

8) сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-5, 3)$ и $B(2, -4)$ равна 65; [Ответ]

9) отношение расстояний от точки M до точек $A(3, -2)$ и $B(4, 6)$ равно $3/5$; [Ответ]

10) точка M отстоит от прямой $x = 14$ на расстоянии, в 2 раза меньшем, чем от точки $A(2, 3)$; [Ответ]

11) точка M отстоит от прямой $x = -7$ на расстоянии, в 3 раза меньшем, чем от точки $A(1, 4)$; [Ответ]

12) точка M отстоит от точки $A(0, -5)$ на расстоянии, в 2 раза меньшем, чем от прямой $x = 3$; [Ответ]

13) точка M отстоит от точки $A(4, -2)$ на расстоянии, в 2 раза меньшем, чем от точки $B(1, 6)$; [Ответ]

14) сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-3, 3)$ и $B(4, 1)$ равна 31; [Ответ]

15) отношение расстояний от точки M до точек $A(2, -4)$ и $B(3, 5)$ равно $2/3$. [Ответ]

Глава 3

Предел последовательности и функции

3.1. Числовая последовательность
3.2. Функциональная зависимость
3.3. Предел функции. Два замечательных предела
3.4. Непрерывные функции

3.1. Числовая последовательность

250. Написать первые четыре члена последовательности $\{x_n\}$, если:

1) $x_n = 1$; [Ответ]

2) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$; [Решение] [Ответ]

3) $x_n = 2^{n+1}$; [Ответ]

4) $x_n = (-1)^n + 1$; [Ответ]

5) $x_n = n^2 + 2n + 3$; [Ответ]

6) $x_n = \dfrac{n+1}{n^2}$; [Ответ]

7) $x_n = \dfrac{4^n}{n^2}$; [Ответ]

8) $x_n = n!$; [Решение] [Ответ]

9) $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$; [Ответ]

10) $x_n = \left[\sqrt{n}\right]$; [Указание] [Ответ]

11) $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + 2$; [Решение] [Ответ]

12) $x_1 = -1$, $x_n = -n \cdot x_{n-1}$; [Ответ]

13) $x_1 = 2$, $x_n = |x_{n-1} - 2|$. [Ответ]

251. Зная несколько первых членов последовательности $\{x_n\}$, написать формулу её общего члена:

1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots;$ [Ответ]

2) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots;$ [Ответ]

3) $2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, \ldots;$ [Ответ]

4) $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots;$ [Ответ]

5) $2, 5, 10, 17, 26, \ldots.$ [Ответ]

252. Исследовать последовательности на ограниченность, ограниченность сверху и ограниченность снизу:

1) $x_n = (-1)^n;$ [Ответ]

2) $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n};$ [Ответ]

3) $x_n = \sin n;$ [Ответ]

4) $x_n = \ln n;$ [Ответ]

5) $x_n = n;$ [Ответ]

6) $x_n = n^3 + 2n;$ [Ответ]

7) $x_n = -2^n;$ [Ответ]

8) $x_n = \frac{n+1}{n};$ [Решение] [Ответ]

9) $x_n = (-1)^n n.$ [Ответ]

253. Исследовать данные последовательности на монотонность и строгую монотонность:

1) $x_n = 2n + 1$; [Решение] [Ответ]

2) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$; [Решение] [Ответ]

3) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$; [Решение] [Ответ]

4) $x_n = -\sqrt{n}$; [Ответ]

5) $x_n = \left[\sqrt{n}\right]$; [Решение] [Ответ]

6) $-1,\ -1,\ -2,\ -2,\ -3,\ -3,\ \ldots$; [Ответ]

7) $x_n = n - \dfrac{1}{n}$; [Ответ]

8) $x_n = \dfrac{n+1}{n}$; [Ответ]

9) $x_n = \cos\dfrac{\pi n}{2}$; [Ответ]

10) $2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots$. [Ответ]

254. Найти первые семь членов последовательности Фибоначчи, определяемой рекуррентной формулой

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1, \quad x_n = x_{n-2} + x_{n-1}\ (n \geqslant 3).$$ [Ответ]

255. Привести пример двух ограниченных последовательностей, частное которых является неограниченной последовательностью.

256. Показать на примере, что произведение двух возрастающих последовательностей может не быть даже монотонной последовательностью.

257. Доказать по определению, что приведённые ниже последовательности бесконечно малые:

1) $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$; [Решение]

2) $\alpha_n = \dfrac{2}{n+1}$;

3) $\alpha_n = \dfrac{1}{n^2}$;

4) $\alpha_n = \dfrac{1}{2^n}$;

5) $\alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

6) $\alpha_n = \dfrac{1}{n!}$.

258. Доказать, что последовательность

$$\alpha_n = \frac{1}{2n}$$

бесконечно малая, и для данных значений ε найти такой номер N, что для всех $n \geqslant N$ справедливо равенство $|\alpha_n| < \varepsilon$:

1) $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$; [Ответ]

2) $\varepsilon = 0{,}1$; [Ответ]

3) $\varepsilon = 0{,}015$. [Ответ]

259. По определению предела доказать, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n-1} = 1$; [Решение]

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+2}{n+1} = 3;$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0;$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n-1}{5n+2} = \dfrac{4}{5};$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{n^2} = 2;$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}-1}{3^n} = 3.$

260. Найти пределы последовательностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-5}{n};$ [Ответ]

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-n^2}{3-n^2};$ [Ответ]

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n+4}{7-9n};$ [Ответ]

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-n+2}{5n^2+2};$ [Решение] [Ответ]

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)(n+2)}{n^2+n+1};$ [Ответ]

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-2n+2}{2n+1+2n^2};$ [Ответ]

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n^2+n};$ [Ответ]

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n};$ [Ответ]

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3 - 5n^2 + 10n}{21n^3 + 7n - 8}$; [Ответ]

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + n + 4n^3}{1 - n + 2n^3}$; [Ответ]

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4 + 5n^2 - 1}{10n^3 - 3n + 2}$; [Ответ]

12) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2 - 1}{5n^3 + 4n^2 - 2n + 1}$; [Ответ]

13) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1000n^3 + 100n}{2n^4}$; [Ответ]

14) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)! + (n+2)!}{(n+3)!}$; [Решение] [Ответ]

15) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5(n+1)!}{4n! + (n-1)!}$; [Ответ]

16) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+3)n!}{(n+2)! + (n+1)!}$; [Ответ]

17) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n-1)! + (4n+1)n!}$; [Ответ]

18) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(7n+1)n!}{9(n+1)! + 7n!}$; [Ответ]

19) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)! + 7n!}{(n+2)!}$; [Ответ]

20) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n! - (n+2)!}{(n+3)n! + (n+1)!}$; [Ответ]

21) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n-3)! + (n-2)!}{(n-1)! - (n-2)!}$; [Ответ]

22) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)!+3n!}{(n+1)(n-1)!-(n-2)!}$; [Ответ]

23) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{n!+2(n+1)!}$; [Ответ]

24) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)!-(n+2)!}{(n+3)!-(n+1)!}$; [Ответ]

25) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)!+(n-3)!}{(2n^2+1)(n-3)!+(n-2)!}$; [Ответ]

26) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!+(n+3)!}{(n+2)!+(n+1)!}$; [Ответ]

27) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{(2n^2+3)(n+1)!-(n+2)!}$; [Ответ]

28) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n!+(n+1)!}{(3n+1)n!}$; [Ответ]

29) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n+1)(n-1)!-3(n+1)!}{7(n+1)!+4n!}$; [Ответ]

30) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2+1}$; [Ответ]

31) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$; [Решение] [Ответ]

32) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; [Ответ]

33) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$; [Ответ]

34) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n\right)$; [Указание] [Ответ]

35) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+n}-n^2\right)$; [Ответ]

36) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^2-n}\right)$; [Ответ]

37) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)$; [Ответ]

38) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}+1}$; [Решение] [Ответ]

39) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{n+2}$; [Ответ]

40) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{\sqrt[3]{n^2+n+4}}$; [Ответ]

41) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{9n^2+2n}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{8n^3+2}}$; [Ответ]

42) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n^2-3}}$; [Ответ]

43) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{n+2}-\dfrac{5}{2n+1}\right)$; [Ответ]

44) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{5n+7}-\dfrac{1+2n^3}{2+5n^3}\right)$; [Ответ]

45) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5+3n}{2n+4}-\dfrac{n}{2n-3}\right)$; [Ответ]

46) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5}{4n+1}-\dfrac{n^2+4}{2n+3}\right)$; [Указание] [Ответ]

47) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{2n^2-1}-\dfrac{n^2}{2n+1}\right)$; [Ответ]

48) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n+2}-\dfrac{n^2-1}{n+3}\right)$; [Ответ]

49) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n-1}{5^n+1}$; [Ответ]

50) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$; [Ответ]

51) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$; [Решение] [Ответ]

52) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2+1}$; [Ответ]

53) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\ldots+\dfrac{2n-1}{n^2}\right)$; [Ответ]

54) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{1+4+9+\ldots+n^2}$; [Указание] [Ответ]

55) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+4+9+\ldots+n^2}{n^3}$; [Ответ]

56) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right)$; [Ответ]

57) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$; [Ответ]

58) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}}$; [Указание] [Ответ]

59) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{25}+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{5^n}\right)$. [Ответ]

261. Показать на примерах, что частное двух бесконечно малых последовательностей может быть бесконечно малым и бесконечно большим.

262. Доказать, что указанные последовательности не имеют предела:

1) $x_n = (-1)^n$;

2) $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$.

263. Привести пример расходящейся последовательности $\{x_n\}$, для которой последовательность $|x_n|$ сходится.

264. Показать на примере, что не всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой.

265. Показать на примере, что не всякая ограниченная последовательность является сходящейся.

266. Следует ли из сходимости суммы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходимость каждой из этих последовательностей? [Ответ]

267. Доказать, что последовательность

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

сходится. [Решение]

268. Доказать сходимость и найти предел последовательности $\{x_n\}$, где

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}}, \quad x_3 = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}, \ \ldots,$$
$$x_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{n \text{ корней}},$$

если известно, что $a > 0$. [Решение] [Ответ]

269. Найти предел последовательности $\{x_n\}$, заданной рекуррентно:

$$x_1 \in (0,1), \quad x_{n+1} = x_n(2 - x_n), \ n \in \mathbb{N}.$$ [Ответ]

270. Найти предел последовательности $\{x_n\}$, если

$$x_1 = a, \ x_2 = b, \ a < b, \quad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}, \ n \geqslant 3.$$ [Ответ]

271. Доказать, что неограниченная монотонная последовательность является бесконечно большой.

3.2. Функциональная зависимость

3.2.1. Общие задачи
3.2.2. Экономический профиль

3.2.1. Общие задачи

272. Для функции $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ найти:

1) $f(0)$; [Решение] [Ответ]

2) $f\left(-\frac{3}{4}\right)$; [Ответ]

3) $f(-x)$; [Ответ]

4) $f\left(\frac{1}{x}\right)$; [Ответ]

5) $\frac{1}{f(x)}$. [Ответ]

273. Для функции $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$ найти:

1) $f(0)$; [Ответ]

2) $f(-2)$; [Ответ]

3) $f\left(\sqrt{2}\right)$; [Ответ]

4) $f(-x)$; [Ответ]

5) $f(1/x)$; [Решение] [Ответ]

6) $f(a+1)$; [Ответ]

7) $f(a)+1$; [Ответ]

8) $f(2x)$. [Ответ]

274. Для функции $f(x) = x^3\,2^x$ найти:

1) $f(1)$; [Ответ]

2) $f(-3)$; [Ответ]

3) $f(-\sqrt[3]{5})$; [Ответ]

4) $f(-x)$; [Ответ]

5) $f(3x)$; [Решение] [Ответ]

6) $f(1/x)$; [Ответ]

7) $\dfrac{1}{f(x)}$; [Ответ]

8) $f(b-2)$. [Ответ]

275. Определить область существования функций:

1) $y = \sqrt{x+1}$; [Ответ]

2) $y = \lg\dfrac{2+x}{2-x}$; [Решение] [Ответ]

3) $y = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2+x}}$; [Ответ]

4) $y = \arccos\dfrac{2x}{1+x}$; [Ответ]

5) $y = \dfrac{3x+1}{x^2-1}$; [Ответ]

6) $y = \dfrac{x^2+4}{x^3+1}$; [Ответ]

7) $y = \sin\dfrac{1}{|x|-2}$; [Ответ]

8) $y = \sqrt[4]{x^2 - 7x + 10}$; [Ответ]

9) $y = x^2 + \operatorname{tg} x$; [Ответ]

10) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{|x^2 - 2|}}$. [Ответ]

276. Найти множества значений функций:

1) $y = x^2 + 4x + 1$; [Решение] [Ответ]

2) $y = 2^{x^2}$; [Ответ]

3) $y = 3 - 5\cos x$; [Ответ]

4) $y = x^2 - 8x + 20$; [Ответ]

5) $y = 3^{-x^2}$; [Ответ]

6) $y = 2\sin x - 7$; [Ответ]

7) $y = \dfrac{1}{x} + 4$; [Ответ]

8) $y = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$; [Ответ]

9) $y = \sqrt{5 - x} + 2$; [Ответ]

10) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$; [Ответ]

11) $y = \arcsin \dfrac{x^2 + 1}{2x}$; [Ответ]

12) $y = \dfrac{|x|}{|x| + 1}$. [Ответ]

277. Выяснить, является ли функция $f(x)$ четной, нечетной или имеет общий вид:

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$; [Решение] [Ответ]

2) $f(x) = x^4 - 5|x|$; [Ответ]

3) $f(x) = e^x - 2e^{-x}$; [Решение] [Ответ]

4) $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$; [Ответ]

5) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; [Ответ]

6) $f(x) = x^5 + 3x^3 - x$; [Ответ]

7) $f(x) = \sqrt{x}$; [Ответ]

8) $f(x) = \arcsin x$; [Ответ]

9) $f(x) = \sin x + \cos x$; [Ответ]

10) $f(x) = |x| - 2$; [Ответ]

11) $f(x) = \dfrac{3}{x^2-1}$; [Ответ]

12) $f(x) = xe^x$. [Ответ]

278. Выяснить, является ли функция $f(x)$ периодической; если да, то найти основной период:

1) $f(x) = \sin 4x$; [Решение] [Ответ]

2) $f(x) = \cos^2 5x$; [Решение] [Ответ]

3) $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$; [Ответ]

4) $f(x) = x^2$; [Ответ]

5) $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$; [Указание] [Ответ]

6) $f(x) = \cos \frac{x}{4}$; [Ответ]

7) $f(x) = |x|$; [Ответ]

8) $f(x) = \operatorname{tg}(2x - 1)$; [Ответ]

9) $f(x) = \sin \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x$; [Ответ]

10) $f(x) = \sin 3x \cos 3x$. [Ответ]

279. Для функции $y = f(x)$ найти обратную, если:

1) $f(x) = \operatorname{arctg} 3x$; [Решение] [Ответ]

2) $f(x) = 3x + 2$; [Ответ]

3) $f(x) = \frac{2}{x+3}$; [Ответ]

4) $f(x) = \sqrt{x}$; [Ответ]

5) $f(x) = 2e^{3x}$; [Ответ]

6) $f(x) = x^3 - 2$; [Ответ]

7) $f(x) = \frac{x-2}{x}$. [Ответ]

280. Найти сложные функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$:

1) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$; [Решение] [Ответ]

2) $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x - 1$; [Ответ]

3) $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$; [Ответ]

4) $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 2x - 5$; [Ответ]

5) $f(x) = |x|$, $g(x) = \cos x$. [Ответ]

281. Представить сложную функцию $y = f(x)$ в виде суперпозиции соответствующих функций, если:

1) $f(x) = (2x-3)^{99}$; [Ответ]

2) $f(x) = \lg \operatorname{tg} \dfrac{x}{3}$; [Решение] [Ответ]

3) $f(x) = \arcsin 3^{-x^2}$; [Ответ]

4) $f(x) = \sqrt{\sin^3(5x+3)}$; [Ответ]

5) $f(x) = \ln^2 \dfrac{1-x}{1+x}$. [Ответ]

282. Построить графики следующих функций:

1) $y = x^3 - 2$;

2) $y = x^2 + 4x + 3$;

3) $y = x^2 - 6x + 11$;

4) $y = \dfrac{1}{x-1}$;

5) $y = -\dfrac{2}{x} + 1$;

6) $y = \dfrac{x+4}{x+2}$;

7) $y = \lg(x+2)$;

8) $y = \log_3(-x)$;

9) $y = 1 - 0{,}5^x$;

10) $y = 2^{x-1} + 3$;

11) $y = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; [Решение]

12) $y = -2\sin 3x$;

13) $y = 3\cos 2x$;

14) $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$;

15) $y = |x - 3|$;

16) $y = |x^2 - 2x + 3|$; [Указание]

17) $y = \operatorname{tg}|x|$;

18) $y = |1 + \ln x|$;

19) $y = [x]$;

20) $y = \{x\}$; [Решение]

21) $y = \left|\{x\} - \dfrac{1}{2}\right|$;

22) $y = \cos^2 x$; [Указание]

23) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; [Указание]

24) $y = \arcsin\sin x$;

25) $y = \operatorname{sign}\cos x$;

26) $y = |x| + |x + 1| + |x + 2|$. [Указание]

283. Выяснить, какие из следующих функций являются монотонными, какие строго монотонными, какие ограниченными:

1) $f(x) = c$; [Ответ]

2) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; [Ответ]

3) $f(x) = \sin^2 x$; [Ответ]

4) $f(x) = -x^2 + 2x$; [Ответ]

5) $f(x) = \dfrac{x+2}{x+5}$; [Ответ]

6) $f(x) = [x]$. [Указание] [Ответ]

3.2.2. Экономический профиль

284. Опытным путем установлены функции спроса и предложения

$$D(p) = \frac{25p + 4p^2}{1 + 10p}, \quad S(p) = \frac{20 + 4p^2}{1 + 10p},$$

где p — цена товара. Найти точку рыночного равновесия. [Решение] [Ответ]

285. Для функций спроса и предложения

$$p = 29 - 3q^2, \quad p = \frac{5}{4}q^3 + 7,$$

где q — число единиц товара, найти аналитически и графически точку рыночного равновесия. [Ответ]

286. Для функций спроса и предложения

$$D(p) = \frac{8 + p^2}{1 + 10p}, \quad S(p) = \frac{2 - 4p + 3p^2}{1 + 10p},$$

где p — цена товара, найти точку рыночного равновесия. [Ответ]

3.3. Предел функции. Два замечательных предела

287. Используя определение предела функции по Коши, доказать, что:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$; [Решение]

2) $\lim\limits_{x\to -1}(4x+3)=-1$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}(-x+5)=4$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{5}$;

6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x}{x+3}=-2$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$;

10) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2)=10$;

11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$; [Указание]

12) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{5x+4}=3$;

13) $\lim\limits_{x\to 1}x^3=1$.

288. Используя определение предела функции по Гейне, найти предел:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+2x-1)$; [Решение] [Ответ]

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^3-2x+1}{3x^2+2}$; [Ответ]

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2-2x+3}$. [Ответ]

289. Используя определение предела функции по Гейне, доказать, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке x_0:

1) $f(x)=\cos x$, $x_0=\infty$; [Решение]

2) $f(x)=\sin x$, $x_0=\infty$;

3) $f(x)=\operatorname{sign} x$, $x_0=0$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$;

5) $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{x}$, $x_0=0$;

6) $f(x)=\begin{cases}x, & x<2,\\ x^2, & x\geqslant 2,\end{cases}$ $x_0=2$;

7) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$ $x_0=0$.

290. Используя свойства предела функции, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -2}\left(5x^2+2x-1\right)$; [Ответ]

2) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2-1}{4x^2+5x+2}$; [Решение] [Ответ]

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x+1}{x^3-2x+3}$; [Ответ]

4) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\sin x + 2\operatorname{ctg} x}{(\pi - x)\sin\frac{x}{2}}$; [Ответ]

5) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x+1}$; [Ответ]

6) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x+5}{x-3}$; [Решение] [Ответ]

7) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2}{x^2-2x-3}$; [Ответ]

8) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-3}{x^3-8}$; [Ответ]

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-5x}{e^{1/x^2}}$; [Ответ]

10) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos x + \operatorname{tg}(\pi - x)}{2x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$; [Ответ]

11) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$; [Решение] [Ответ]

12) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{-x^2+x+20}{x^3+64}$; [Ответ]

13) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-8x^2-19x-6}{5x^2+9x-2}$; [Ответ]

14) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{-8x^2+33x+35}{x^3-125}$; [Ответ]

15) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{4x^2+23x+15}{-7x^2-36x-5}$; [Решение] [Ответ]

16) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-5x-14}{x^3+8}$; [Ответ]

17) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{4x^2+23x+28}{x^3+64}$; [Ответ]

18) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{8x^2-27x+9}{7x^2-18x-9}$; [Ответ]

19) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-8x^2-11x+10}{x^3+8}$; [Ответ]

20) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-8x+15}{x^3-27}$; [Ответ]

21) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4x^2-13x+3}{-7x^2+20x+3}$; [Ответ]

22) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{-2x^2-11x-5}{-5x^2-22x+15}$; [Ответ]

23) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-2x^2-5x+7}{x^3-1}$; [Ответ]

24) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{-8x^2-43x-15}{5x^2+26x+5}$; [Ответ]

25) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{8x^2+9x+1}{7x^2+10x+3}$; [Ответ]

26) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; [Ответ]

27) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-3x+2}$; [Ответ]

28) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2-x}$; [Ответ]

29) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-25}$; [Ответ]

30) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-3x^2+x}{2x}$; [Ответ]

31) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{x^3-x^2+4x-4}$; [Решение] [Ответ]

32) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x+2}{x^3+1}$; [Ответ]

33) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-x-1}{-6x^2+5x+4}$; [Ответ]

34) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+3x-3}{2x^3-2x^2+x-1}$; [Ответ]

35) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+7x+6}{x^3+6x^2+3x+18}$; [Ответ]

36) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$; [Ответ]

37) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$; [Ответ]

38) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{1-x^3}$; [Ответ]

39) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$; [Решение] [Ответ]

40) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; [Ответ]

41) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+2x}$; [Ответ]

42) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+6x}-4}$; [Ответ]

43) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{2-x^2}}{2x^2-5x+3}$; [Ответ]

44) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+4}}{2x^2-3x+1}$; [Ответ]

45) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+10}-4}{x^2-5x+6}$; [Ответ]

46) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-x}$; [Ответ]

47) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+6}-2\sqrt{2}}{2x^2-5x+3}$; [Ответ]

48) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+18}-4}{2x^2+9x+10}$; [Ответ]

49) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{-4x-6}-\sqrt{2}}{x^2+5x+6}$; [Ответ]

50) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+15}-4}{x^2-x}$; [Ответ]

51) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+7}}{x^2+5x+6}$; [Решение] [Ответ]

52) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{-3x+11}-\sqrt{x-1}}{x^2-5x+6}$; [Ответ]

53) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$; [Ответ]

54) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{5-x}-2}$; [Ответ]

55) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$; [Ответ]

56) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; [Ответ]

57) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x(1+\sqrt{x})}$; [Ответ]

58) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$; [Ответ]

59) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$; [Указание] [Ответ]

60) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x}$; [Указание] [Ответ]

61) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt[3]{5-x}-\sqrt[3]{x-3}}$; [Ответ]

62) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1+x-x^2}{2x^2+3x}$; [Решение] [Ответ]

63) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-x+3}{x^3-8x+5}$; [Ответ]

64) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+5x^2-x^3}{2x^3-x^2+7x}$; [Ответ]

65) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-3x^2}{x^2+7x-2}$; [Ответ]

66) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$; [Ответ]

67) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5-2x}{2x^3+x^2+1}$; [Ответ]

68) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^2(3-4x)^2}{(2x-1)^4}$; [Ответ]

69) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10+x\sqrt{x}}{x^2}$; [Ответ]

70) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+10x}{2x+\sqrt[3]{x^2}}$; [Ответ]

71) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$; [Ответ]

72) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$; [Ответ]

73) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-3}{2+|x|}$; [Ответ]

74) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+\sqrt{9x^2+1}}{2x+\sqrt{x^2-1}}$; [Ответ]

75) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; [Решение] [Ответ]

76) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$; [Ответ]

77) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$; [Ответ]

78) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x-3}\right)$; [Ответ]

79) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2-3}-x\right)$; [Ответ]

80) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-\dfrac{x^2}{3x+1}\right)$; [Ответ]

81) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$; [Ответ]

82) $\lim\limits_{x\to-7}\left(\dfrac{1}{x+7}+\dfrac{14}{x^2-49}\right)$; [Ответ]

83) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}\right)$; [Ответ]

84) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{27}{x^3-27}\right)$. [Ответ]

291. Найти пределы, используя первый замечательный предел (3.6) и его следствия:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}$; [Решение] [Ответ]

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$; [Решение] [Ответ]

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}$; [Решение] [Ответ]

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$; [Указание] [Ответ]

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; [Указание] [Ответ]

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 2x}$; [Ответ]

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 5x-\cos^3 5x}{x^2}$; [Решение] [Ответ]

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$; [Ответ]

9) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg} x$; [Ответ]

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$; [Ответ]

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$; [Решение] [Ответ]

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x\operatorname{tg} 3x}$; [Ответ]

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\operatorname{tg} 2x}$; [Ответ]

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(1-\sqrt{x+1}\right)}{\cos x-\cos^3 x}$; [Ответ]

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$; [Решение] [Ответ]

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-\operatorname{tg} x}-\sqrt{2-\sin 3x}}{\sin 2x}$; [Ответ]

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{9+x}}{\arcsin 2x}$; [Ответ]

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+7\operatorname{arctg} 5x}{\operatorname{tg} 2x-3\operatorname{arctg} 4x}$; [Ответ]

19) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\cos x}{2x-\pi}$; [Решение] [Ответ]

20) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 6\pi x}{\sin \pi x}$; [Ответ]

21) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 4x}$; [Ответ]

22) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)}$; [Ответ]

23) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$; [Ответ]

24) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$; [Ответ]

25) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\operatorname{arctg} x-\dfrac{\pi}{2}\right)$; [Указание] [Ответ]

26) $\lim\limits_{x\to2}(2-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$; [Ответ]

27) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\operatorname{ctg} 2x\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$. [Ответ]

292. Найти пределы, используя второй замечательный предел (3.7):

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x$, $k\in\mathbb{R}$; [Решение] [Ответ]

2) $\lim\limits_{x\to0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}$, $k\in\mathbb{R}$; [Указание] [Ответ]

3) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1+5x}$; [Решение] [Ответ]

4) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[2x]{1+3x}$; [Ответ]

5) $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$; [Ответ]

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$; [Решение] [Ответ]

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+4}\right)^{x}$; [Ответ]

8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+5x}{3+2x}\right)^{x}$; [Ответ]

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-x}{6-x}\right)^{x+2}$; [Ответ]

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x}{2x-1}\right)^{x^2}$; [Ответ]

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^{x}$; [Ответ]

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{2x+7}$; [Решение] [Ответ]

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x+3}$; [Ответ]

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)^{x-2}$; [Ответ]

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+6}{2x+4}\right)^{x+5}$; [Ответ]

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-2}\right)^{3x-1}$; [Ответ]

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{x+4}$; [Ответ]

18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x+6}{-x+4}\right)^{3x-1}$; [Ответ]

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+10}{4x+5}\right)^{4x-2}$; [Ответ]

20) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{5x-2}\right)^{-3x-1}$; [Ответ]

21) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-2}{4x-3}\right)^{3x-1}$; [Ответ]

22) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$; [Указание] [Ответ]

23) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$; [Указание] [Ответ]

24) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$; [Ответ]

25) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg} 3x}}$; [Ответ]

26) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; [Ответ]

27) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$. [Ответ]

293. Найти пределы, используя следствия (3.9) второго замечательного предела:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{kx}-1}{x}$; [Решение] [Ответ]

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$; [Решение] [Ответ]

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin 2x}$; [Ответ]

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2-1}-1}{x-1}$; [Ответ]

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^{5x}-e^{x}}$; [Указание] [Ответ]

6) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\operatorname{ctg} x}{e^{\cos x}-1}$; [Ответ]

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}$; [Ответ]

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$; [Ответ]

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+kx)}{x}$; [Ответ]

10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x^2}{x-1}$; [Решение] [Ответ]

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 3x)}{x}$; [Ответ]

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x\sin x}$; [Ответ]

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\bigl(2\sin(\pi/6+x)\bigr)}{x}$; [Ответ]

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln(1+x)}{2x-\ln(1+x)}$; [Ответ]

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+kx)^m-1}{x}$; [Ответ]

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$; [Ответ]

17) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$; [Решение] [Ответ]

18) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[7]{x^2-3x-9}-1}{x^3-125}$; [Ответ]

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[4]{1+x^2}}{x}$. [Указание] [Ответ]

294. Найти односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x)=2\operatorname{sign}x-1$, $x_0=0$; [Решение] [Ответ]

2) $f(x)=[x]$, $x_0=3$; [Ответ]

3) $f(x)=\{x\}$, $x_0=1$; [Ответ]

4) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$, $x_0=2$; [Ответ]

5) $f(x)=\dfrac{x-1+|x-1|}{x^2-1}$, $x_0=1$; [Ответ]

6) $f(x)=\begin{cases}x-2 & \text{при } x<1,\\ \ln x & \text{при } x\geqslant 1,\end{cases}$ $x_0=1$; [Решение] [Ответ]

7) $f(x)=\begin{cases}-2 & \text{при } x\leqslant 1,\\ x/3 & \text{при } x>1,\end{cases}$ $x_0=1$; [Ответ]

8) $f(x)=\begin{cases}e^x & \text{при } x\leqslant 0,\\ 3x+2 & \text{при } x>0,\end{cases}$ $x_0=0$. [Ответ]

295. Доказать эквивалентность БМФ при $x \to 0$:

1) $1 - \cos x$ и $\dfrac{x^2}{2}$; [Решение]

2) $\ln(1+5x)$ и $e^{5x} - 1$;

3) $\ln(1+4x)$ и $\sin 4x$;

4) $\dfrac{3^{\sin x} - 1}{\ln 3}$ и $\arcsin x$;

5) $\sqrt{1+x} - 1$ и $e^{x/2} - 1$.

296. Найти пределы, используя свойства эквивалентных БМФ и таблицу эквивалентностей (см. п. 3.3.8):

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}$; [Решение] [Ответ]

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}$; [Ответ]

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\ln(1-6x)}$; [Ответ]

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7^x - 1}{3^x - 1}$; [Ответ]

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+7x} - 1}{x}$; [Ответ]

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{(\operatorname{arctg} 2x)^2}$; [Ответ]

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x - \cos 2x}{x^2}$; [Ответ]

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{\operatorname{tg} x} - 1}{\operatorname{tg} 4x}$; [Ответ]

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}$; [Ответ]

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{1-\cos x}$; [Ответ]

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\sqrt{1+x+x^2}-1}$; [Ответ]

12) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$; [Решение] [Ответ]

13) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x^3-3}{x-e}$; [Ответ]

14) $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$; [Ответ]

15) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\operatorname{tg}(4-x^2)}$; [Ответ]

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x\ln(2x+1)}{1-\cos 2x}$; [Ответ]

17) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2-2x}$; [Указание] [Ответ]

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^{x^2}-1)}{2\sin x-\sin 2x}$. [Решение] [Ответ]

297. Привести пример, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют предела в точке x_0, а функция $f(x)+g(x)$ имеет.

298. Показать на примерах, что частное бесконечно малых функций может быть бесконечно малым, иметь любой конечный предел, быть бесконечно большим, не иметь предела вообще.

299. Привести пример, когда сумма двух бесконечно больших функций является бесконечно малой.

3.4. Непрерывные функции

300. Используя теорему о непрерывности элементарных функций, выяснить, в каких точках непрерывны данные функции:

1) $f(x) = \sqrt{-x^2}$; [Решение] [Ответ]

2) $f(x) = \dfrac{x^2 \cos x}{1 + \sin^2 x}$; [Решение] [Ответ]

3) $f(x) = \sqrt{-x^2} + \sin 3x$; [Ответ]

4) $f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2} + e^x \sqrt{x^2 + x - 6}$; [Ответ]

5) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{3 - x}{x^2 - 4}$; [Ответ]

6) $f(x) = \arcsin(1 - x) + \lg \lg x$; [Ответ]

7) $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x}$; [Ответ]

8) $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \lg \dfrac{x + 1}{x - 2}$. [Ответ]

301. Доказать, что функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0. Исследовать её на одностороннюю непрерывность.

1) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leqslant 1, \\ 2 & \text{при } x > 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$; [Ответ]

3) $f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{при } x < -2, \\ x^2-4 & \text{при } x \geqslant -2, \end{cases}$ $x_0 = -2.$ [Ответ]

302. Установить характер разрыва функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = \begin{cases} 1/(x-1), & x < 0, \\ (x+1)^2, & x \geqslant 0, \end{cases}$ $x_0 = 0;$ [Решение] [Ответ]

2) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0;$ [Ответ]

3) $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1), & 1 < x \leqslant 2, \\ \sin \pi x, & x > 2, \end{cases}$ $x_0 = 2;$ [Ответ]

4) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, $x_0 = 2;$ [Ответ]

5) $f(x) = \sin \ln |x|$, $x_0 = 0;$ [Ответ]

6) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x+4}$, $x_0 = -4;$ [Ответ]

7) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2};$ [Ответ]

8) $f(x) = \dfrac{|x-3|}{x-3}$, $x_0 = 3;$ [Ответ]

9) $f(x) = \ln |x|$, $x_0 = 0;$ [Ответ]

10) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0;$ [Ответ]

11) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$, $x_0 = \pi;$ [Ответ]

12) $f(x) = x - [x]$, $x_0 = 1$; [Ответ]

13) $f(x) = \dfrac{1}{x - [x]}$, $x_0 = 1$; [Ответ]

14) $f(x) = \operatorname{tg} x - [\operatorname{tg} x]$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. [Ответ]

303. Показать, что функция $y = |x|$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

304. Показать, что функции $[x]$ (см. рис. 3.51) и $\{x\}$ (см. рис. P.10) непрерывны во всех точках $x_0 \notin \mathbb{Z}$, а во всех точках $x_0 \in \mathbb{Z}$ непрерывны только справа.

305. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность. Построить график. Найти скачок в точках конечного разрыва:

1) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{при } |x| \leqslant \pi/2, \\ 1/2 & \text{при } |x| > \pi/2; \end{cases}$ [Решение] [Ответ]

2) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{при } x \leqslant 0, \\ 2x - 1 & \text{при } x > 0; \end{cases}$ [Ответ]

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } |x| < 1, \\ 2 & \text{при } |x| \geqslant 1; \end{cases}$ [Ответ]

4) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{при } x \in [0, 1), \\ 3x + 2 & \text{при } x \in (1, 2]; \end{cases}$ [Ответ]

5) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{при } x \in (-\infty, 0], \\ x & \text{при } x \in (0, +\infty); \end{cases}$ [Ответ]

6) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } x \in (-\infty, 0], \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{при } x \in (0,1) \cup (1, +\infty); \end{cases}$ [Ответ]

7) $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leqslant -\pi, \\ \sin x & \text{при } -\pi < x < \pi/2, \\ 1 & \text{при } x > \pi/2; \end{cases}$ [Ответ]

8) $f(x) = \begin{cases} x^3+1 & \text{при } x < 1, \\ 2 & \text{при } x \in [1, 2], \\ 3x & \text{при } x > 2; \end{cases}$ [Ответ]

9) $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1-x & \text{при } x \in (0, 1], \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{при } x > 1; \end{cases}$ [Ответ]

10) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } x < -2, \\ \sqrt{4-x^2} & \text{при } -2 \leqslant x < 2, \\ 1 & \text{при } x > 2; \end{cases}$ [Ответ]

11) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{при } x < 0, \\ 2x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, \\ \operatorname{tg} x & \text{при } x > \pi/2; \end{cases}$ [Ответ]

12) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n}$; [Решение] [Ответ]

13) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx$; [Ответ]

14) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+x^{2n}}{1+x^{4n}}$; [Ответ]

15) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x+e^{-nx}}{2+e^{-2nx}}$; [Ответ]

16) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$; [Ответ]

17) $f(x) = \dfrac{|x|-x}{x^2}$; [Ответ]

18) $f(x) = \log_2 |x-2|$; [Ответ]

19) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$; [Ответ]

20) $f(x) = \dfrac{x^2-|x|}{x^2+x}$. [Ответ]

306. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность:

1) $f(x) = \begin{cases} 2^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0; \end{cases}$ [Решение] [Ответ]

2) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1}$; [Ответ]

3) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$; [Ответ]

4) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$; [Ответ]

5) $f(x) = \ln|\cos x|$; [Ответ]

6) $f(x) = (1+x)\operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-x^2}$. [Ответ]

307. Выяснить, существует ли значение A, при котором данные функции непрерывны в точке x_0, и если существует, то найти его:

1) $x_0 = -2$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{при } x \neq -2, \\ A & \text{при } x = -2; \end{cases}$ [Ответ]

2) $x_0 = 3$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3} & \text{при } x \neq 3, \\ A & \text{при } x = 3; \end{cases}$ [Ответ]

3) $x_0 = 0$, $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \leqslant 0, \\ A(x-1) & \text{при } x > 0. \end{cases}$ [Ответ]

308. Выяснить, является ли функция $f(x)$ непрерывной на заданном отрезке:

1) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$, $[-1, 2]$; [Ответ]

2) $f(x) = \dfrac{1}{(x-5)(x+1)}$, $[4, 7]$; [Ответ]

3) $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$, $[-4, -3]$; [Ответ]

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^4-1}$, $[0, 1]$; [Ответ]

5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x-3}$, $[-2, 0]$. [Ответ]

309. Имеет ли уравнение $x^4 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$ хотя бы один корень на отрезке $[1, 2]$? [Решение] [Ответ]

310. Доказать, что всякий многочлен третьей степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень.

311. Доказать, что из непрерывности функции $f(x)$ следует непрерывность $|f(x)|$. Показать на примере, что обратное утверждение неверно.

312. Привести пример двух функций, разрывных в точке $x = 1$, сумма которых непрерывна в этой точке.

313. Существует ли на отрезке $[1, 2]$ такая точка, в которой функция $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$ имеет значение, равное нулю? [Ответ]

314. Показать, что уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$ имеет корень на интервале $(1, 2)$.

315. Доказать, что уравнение $8^x - 3 \cdot 2^x - 16 = 0$ имеет корень на отрезке $[0, 2]$.

316. Определить, имеет ли уравнение $\sin x - x + 1 = 0$ хотя бы один корень. [Ответ]

Глава 4

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

4.1. Производная функции
4.2. Дифференцируемость функции
4.3. Правило Лопиталя
4.4. Исследование функции с помощью производной

4.1. Производная функции

4.1.1. Общие задачи
4.1.2. Экономический профиль

4.1.1. Общие задачи

317. Найти производные функций:

1) $y = x^3 + 3x^2 - 4$; [Решение] [Ответ]

2) $y = 2x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 4x + 5$; [Ответ]

3) $y = \frac{x^4}{4} - 5\sqrt{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$; [Ответ]

4) $y = 3x^5 - 3\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{10}{\sqrt[5]{x^4}}$; [Ответ]

5) $y = \sin x \cdot e^x$; [Ответ]

6) $y = x \operatorname{arcctg} x$; [Ответ]

7) $y = \sqrt[4]{x} \ln x$; [Ответ]

8) $y = x^2 \operatorname{tg} x$; [Ответ]

9) $y = \frac{\cos x}{\ln x}$; [Ответ]

10) $y = \frac{3^x}{2x+1}$; [Ответ]

11) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$; [Ответ]

12) $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$; [Ответ]

13) $y = \frac{\ln x}{\sin x} + x \operatorname{ctg} x$; [Ответ]

14) $y = \sin 2x$; [Ответ]

15) $y = \arcsin 4x$; [Ответ]

16) $y = \log_3(2x - 5)$; [Ответ]

17) $y = \operatorname{tg}(5x + 1)$; [Ответ]

18) $y = (3x - 8)^7$; [Ответ]

19) $y = \ln \sqrt{x}$; [Ответ]

20) $y = \sin^2 x$; [Ответ]

21) $y = \cos^3 x$; [Ответ]

22) $y = \arcsin \dfrac{x}{5}$; [Ответ]

23) $y = \ln 3x$; [Ответ]

24) $y = \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2}$; [Ответ]

25) $y = \operatorname{arctg}\ e^x$; [Ответ]

26) $y = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x-1}{x+1}$; [Ответ]

27) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; [Ответ]

28) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; [Ответ]

29) $y = \ln \sin x$; [Ответ]

30) $y = \ln \cos x$; [Ответ]

31) $y = \sqrt{1 - x^2}$; [Ответ]

32) $y = \sqrt{1 + 5 \cos x}$; [Ответ]

33) $y = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$; [Ответ]

34) $y = \ln\ln x$; [Ответ]

35) $y = \arcsin\sqrt{x}$. [Ответ]

318. Найти производные функций:

1) $y = \operatorname{tg}^2 3x$; [Решение] [Ответ]

2) $y = \sqrt{\arcsin(5x+1)}$; [Ответ]

3) $y = 3^{4x^2-5x+1}$; [Ответ]

4) $y = \sin^2 x \cdot e^{4x+1}$; [Ответ]

5) $y = \arccos^3\left(\frac{x^2}{2}+1\right)$; [Ответ]

6) $y = \ln\frac{x^3-2x+1}{2x+4}$; [Ответ]

7) $y = \cos\left(2^{x^3}\right)$; [Ответ]

8) $y = \frac{e^{4x+1}}{\operatorname{ctg}(x/3)}$; [Ответ]

9) $y = \sqrt[3]{\sin^2 3x + \cos^2 3x}$; [Ответ]

10) $y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$; [Ответ]

11) $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$; [Ответ]

12) $y = \frac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$; [Ответ]

13) $y = (2^x + 3x^2)^4$; [Ответ]

14) $y = x \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$; [Ответ]

15) $y = \sqrt[5]{\cos(1 - x^2)}$; [Ответ]

16) $y = \frac{\operatorname{ctg} 7x}{(x^2 + 1)^3}$; [Ответ]

17) $y = \frac{1}{4(1 + 3\cos x)^7}$; [Ответ]

18) $y = \frac{1}{4(1 + 3\cos x)^7}$; [Ответ]

19) $y = \frac{1}{3}\ln\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$; [Ответ]

20) $y = \sqrt{xe^x + 1}$; [Ответ]

21) $y = 2^{\arccos 3x} + (1 - \arcsin 3x)^2$; [Ответ]

22) $y = \sqrt[3]{3e^x + 2^x - 1} + \ln^7 x$; [Ответ]

23) $y = \sqrt{1 - 9x^2}\arccos 3x$; [Ответ]

24) $y = \sin(x^3 + 4^x)$; [Ответ]

25) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$; [Ответ]

26) $y = e^{\sin^3 x}$; [Ответ]

27) $y = \ln\left(\sqrt{1 + e^x} + 1\right)$; [Ответ]

28) $y = \operatorname{arctg}\frac{1 + x}{1 - x}$; [Ответ]

29) $y = \sqrt{\cos(4^x + 4^{-x})}$; [Ответ]

30) $y = 4^{\sqrt{x^2+2x+2}}$; [Ответ]

31) $y = \left(5^{\arccos x} - \operatorname{tg}^8 x\right)^3$; [Ответ]

32) $y = \sin^3\left(\sqrt{x} + \lg x\right)^4$; [Ответ]

33) $y = \ln\sqrt{\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^3}}$; [Ответ]

34) $y = \operatorname{tg}^6 5x + 7^{\frac{2x}{3x-1}}$; [Ответ]

35) $y = \ln^5(x - 2^{-x})$. [Ответ]

319. Применив логарифмическое дифференцирование, найти производные следующих функций:

1) $y = (\sin x)^x$; [Решение] [Ответ]

2) $y = (x^2 + 3x)^{x-2}$; [Ответ]

3) $y = (\operatorname{tg} 2x)^{x^2}$; [Ответ]

4) $y = x^{2^x}$; [Ответ]

5) $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$; [Ответ]

6) $y = \sqrt[5]{\dfrac{(x^2+1)(x+3)}{(x-3)^3}}$; [Ответ]

7) $y = \dfrac{\cos 2x\sqrt[4]{(2x-3)^3}}{(x+1)^2 \operatorname{ctg} x}$; [Ответ]

8) $y = \dfrac{2^{x^2-3x}(1-5x)^3\sqrt{3x+1}}{(6x+5)^{10}\sqrt[3]{2x+x^2}}$; [Ответ]

9) $y = (\arcsin 5x)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$; [Ответ]

10) $y = (3x+1)^{1/x}$; [Ответ]

11) $y = x + x^x + x^{x^x}$; [Ответ]

12) $y = \left(\operatorname{ctg}(4x-1)^3\right)^{\cos 6x}$; [Ответ]

13) $y = (\operatorname{tg} 7x)^{\lg(3x+1)}$; [Ответ]

14) $y = (\sin 5x)^{\cos 5x} + x^{\cos 5x}$; [Ответ]

15) $y = x^{a^x} + x^{x^a} + a^{x^x}$; [Ответ]

16) $y = (\operatorname{ctg} 5x)^{x^3-1}$; [Ответ]

17) $y = (\sin(5x-1))^{\operatorname{ctg} x}$; [Ответ]

18) $y = (6x-9)^{x^2}$; [Ответ]

19) $y = (\arcsin 8x)^{\operatorname{tg}(3x-8)}$; [Ответ]

20) $y = (\operatorname{tg} x)^{\sin(3x+7)}$. [Ответ]

320. Найти значение производной функции в указанной точке:

1) $y = \sqrt[5]{4-3x^5} + 4^x \dfrac{2}{\ln 4}$, y' в точке $x = 1$; [Решение] [Ответ]

2) $y = \ln(\sin 5x) - \dfrac{4x^2}{\pi} + \dfrac{4}{5}$, y' в точке $x = \dfrac{\pi}{10}$; [Ответ]

3) $y = \ln\sqrt{(x-4)^3} + (x-4)^3$, y' в точке $x = 5$; [Ответ]

4) $y = e^{x+1}(4x-5)$, y' в точке $x = \ln 2$; [Ответ]

5) $y = (x+1)\operatorname{arctg} e^{-2x}$, y' в точке $x = 0$; [Ответ]

6) $y = \ln\dfrac{2+\operatorname{tg} x}{2-\operatorname{tg} x}$, y' в точке $x = \dfrac{\pi}{3}$; [Ответ]

7) $y = \arcsin\dfrac{x-1}{x}$, y' в точке $x = 5$; [Ответ]

8) $y = (4x^2 - 3x + 1)^3$, y'' в точке $x = 0$; [Ответ]

9) $y = \sin(7x^2 + x)$, y'' в точке $x = 0$; [Ответ]

10) $y = e^{4x^2 - 5x}$, y'' в точке $x = 0$; [Ответ]

11) $y = \arcsin \dfrac{1}{x}$, y'' в точке $x = 2$; [Ответ]

12) $y = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{4}\cos^2 x$, y''' в точке $x = \dfrac{\pi}{4}$; [Ответ]

13) $y = \cos(x^2 + 3x)$, y''' в точке $x = 0$; [Ответ]

14) $y = \sin(2x^2 + 5x)$, y''' в точке $x = 0$; [Ответ]

15) $y = e^{4x^2 - x}$, y''' в точке $x = 0$; [Ответ]

16) $6x^2 - xy - y^2 + 18x - 8y = -12$, y' в точке $(-2, 0)$; [Ответ]

17) $e^y = e - xy$, y' в точке $(0, 1)$; [Ответ]

18) $x^4 - xy + y^4 = 1$, y'' в точке $(0, 1)$; [Ответ]

19) $e^y + y - x = 0$, y'' в точке $(1, 0)$. [Ответ]

321. Найти производные второго порядка от функций:

1) $y = 3x^2 - x + 5$; [Решение] [Ответ]

2) $y = e^{x^2}$; [Ответ]

3) $y = \operatorname{ctg} x$; [Ответ]

4) $y = \sqrt{1 + x^3}$; [Ответ]

5) $y = \arcsin 2x$; [Ответ]

6) $y = \cos^2 x$. [Ответ]

322. Найти производные третьего порядка от функций:

1) $y = 5x^2 - 104x - 3$; [Решение] [Ответ]

2) $y = e^x \sin x$; [Ответ]

3) $y = 2x^2 \cos x$; [Ответ]

4) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{3}$; [Ответ]

5) $y = xe^{-x}$; [Ответ]

6) $y = x \ln x$. [Ответ]

323. Найти производные n-го порядка от функций:

1) $y = e^{-x}$; [Решение] [Ответ]

2) $y = x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1$; [Ответ]

3) $y = \sin 2x$; [Ответ]

4) $y = \cos \dfrac{x}{3}$; [Ответ]

5) $y = 2^{3x-5}$; [Ответ]

6) $y = x^2 \ln x$. [Ответ]

324. Применив формулу Лейбница, найти производные указанного порядка от функций:

1) $y = x \sin x$, $y^{(100)}$; [Решение] [Ответ]

2) $y = x^2 e^{2x}$, $y^{(20)}$; [Ответ]

3) $y = x^2 \sin 2x$, $y^{(50)}$; [Ответ]

4) $y = e^x \cos x$, $y^{(4)}$; [Ответ]

5) $y = \dfrac{\ln x}{x}$, $y^{(5)}$; [Ответ]

6) $y = \dfrac{x^2}{1-x}$, $y^{(8)}$. [Ответ]

325. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_0$. Найти угол наклона этой касательной к оси Ox. Построить график функции, искомую касательную и нормаль:

1) $y = \ln x$, $x_0 = 1$; [Решение] [Ответ]

2) $y = x^2 - 2x$, $x_0 = -1$; [Ответ]

3) $y = \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$; [Ответ]

4) $y = e^x$, $x_0 = 0$; [Ответ]

5) $y = x^3$, $x_0 = 2$; [Ответ]

6) $y = x^2 - 7x + 3$, $x_0 = 1$; [Ответ]

7) $y = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$; [Ответ]

8) $y = \dfrac{4}{x}$, $x_0 = -1$; [Ответ]

9) $y = \sqrt{x+4}$, $x_0 = 5$. [Ответ]

326. Выяснить, в каких точках кривой

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x + 4$$

касательная составляет с осью Ox угол $\pi/4$. [Ответ]

327. Найти точки на кривой

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} + 20x - 7,$$

касательная в которых параллельна оси Ox. [Ответ]

328. Найти точку на кривой $y = -3x^2+4x+7$, касательная в которой перпендикулярна прямой $x-20y+5 = 0$. [Ответ]

329. Найти точку на кривой $y = 3x^2 - 4x + 6$, касательная в которой параллельна прямой $8x - y - 5 = 0$. [Ответ]

330. На кривой $y = x^3$ найти точки, в которых касательные параллельны биссектрисе первого и третьего координатных углов. Сделать чертеж. [Ответ]

331. Записать уравнения касательных и нормалей к кривой $y = 4x - x^3$ в точках ее пересечения с осью Ox. [Ответ]

332. Составить уравнения касательных к графику функции

$$y = \frac{x-3}{x+5}$$

в точках его пересечения с прямой $y + 2x + 3 = 0$. Сделать чертеж. [Ответ]

333. Определить угловой коэффициент касательной к кривой $x^2-y^2+xy-11 = 0$ в точке $M(3, 2)$. [Ответ]

334. Найти точки на кривых, в которых касательные к графикам функций $f(x) = x^3 - x - 1$ и $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$ параллельны. [Ответ]

335. Записать уравнения касательных к гиперболе $xy = 4$ в точках с абсциссами $x_1 = 1$ и $x_2 = -4$ и найти угол между этими касательными. Сделать чертеж. [Ответ]

336. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{2x-5}$, проходящей через точку $A(-1, -3)$. Сделать чертеж. [Ответ]

337. Найти на кривой $y = \ln x$ точку, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей точки $A(1, 0)$ и $B(e, 1)$ этой кривой. [Ответ]

338. Найти угол наклона касательной к графику функции, проходящей через точку A:

1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 0{,}5$, $A(1, 2)$; [Ответ]

2) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 6$, $A(2, 4)$. [Ответ]

339. Найти расстояние от вершины параболы $y = x^2 - 4x + 5$ до касательной, проведенной в точке пересечения параболы с осью Oy. [Ответ]

340. В какой точке параболы $y = x^2 - 2x + 5$ надо провести касательную, чтобы она была перпендикулярна биссектрисе первого координатного угла? [Ответ]

341. В уравнении параболы $y = x^2 + bx + c$ определить b и c, если парабола касается прямой $y = x$ в точке $x_0 = 2$. [Ответ]

342. Написать уравнение общей касательной к графикам функций $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ и $g(x) = 2x^2 - x - 6$. [Ответ]

343. Найти угол между касательными к графику функции $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 3x + 5$, проведенными в точках с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. [Ответ]

344. Найти угол между двумя касательными, проведенными из точки $(0, -1)$ к графику функции $f(x) = x^2$. [Ответ]

345. Найти координаты центра окружности, описанной около треугольника, образованного осями координат и касательной к гиперболе $xy = 7$ в точке $M(7, 1)$. [Ответ]

346. Найти угол, под которым пересекаются кривые. Сделать чертеж:

1) $y^2 = 2x$ и $x^2 + y^2 = 8$; [Решение] [Ответ]

2) $x^2 = 2y$ и $y = 4 - \frac{1}{2}x^2$; [Ответ]

3) $y = 0{,}5$ и $y = \cos x$; [Ответ]

4) $y = \dfrac{1}{x}$ и $y = \sqrt{x}$; [Ответ]

5) $xy = 8$ и $x^2 - y^2 = 12$. [Ответ]

4.1.2. Экономический профиль

347. Пусть функция $C = C(q)$ характеризует зависимость издержек производства от количества выпускаемой продукции. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции $q = q_0$ ед.

1) $C(q) = 50q - 0{,}05q^3$, $q_0 = 10$; [Решение] [Ответ]

2) $C(q) = \dfrac{q^2 + 2q}{q^2 + 4}$, $q_0 = 4$; [Ответ]

3) $C(q) = qe^{2q+1}$, $q_0 = 1$; [Ответ]

4) $C(q) = \ln(q^3 + 3q + 1)$, $q_0 = 10$. [Ответ]

348. Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс. руб.) и объемом выпуска продукции x (млн руб.) выражается функцией $y = y(x)$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном $x = x_0$ млн руб.:

1) $y(x) = -0{,}5x + 80$, $x_0 = 60$; [Решение] [Ответ]

2) $y(x) = \sin 2x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$; [Ответ]

3) $y(x) = x^3 + x + 1$, $x_0 = 2$; [Ответ]

4) $y(x) = 4 \ln x$, $x_0 = e^2$. [Ответ]

349. Объем продукции q, произведенной бригадой рабочих, может быть описан уравнением

$$q = q(t) \text{ (ед.)}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 8,$$

где t — рабочее время, ч. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания:

1) $q(t) = -\dfrac{5}{6}t^3 + \dfrac{15}{2}t^2 + 100t + 50$; [Решение] [Ответ]

2) $q(t) = \ln(2t + 5)$; [Ответ]

3) $q(t) = -t^3 + 7t^2 + 100t + 25$; [Ответ]

4) $q(t) = e^{-t} + t$. [Ответ]

350. Опытным путем установлены функции спроса $q = q(p)$ и предложения $s = s(p)$, где q, s — количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу, p — цена товара. Найти: а) равновесную цену, т.е. цену, при которой спрос и предложение уравновешиваются; б) эластичность спроса и предложения для этой цены:

1) $q(p) = \dfrac{p+8}{p+2}$, $s(p) = p + 0{,}5$; [Решение] [Ответ]

2) $q(p) = \dfrac{4}{p+3}$, $s(p) = 2p - 1$; [Ответ]

3) $q(p) = \dfrac{12}{p+1}$, $s(p) = \log_2(p+5)$; [Ответ]

4) $q(p) = \sin\dfrac{\pi p}{2}$, $s(p) = (p-1)^2 + 1$. [Ответ]

4.2. Дифференцируемость функции

351. Найти дифференциалы первого порядка следующих функций:

1) $y = \arcsin 2x$; [Решение] [Ответ]

2) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; [Ответ]

3) $y = \sqrt{\arccos 2x}$; [Ответ]

4) $y = x^2 \operatorname{tg} 3x$; [Ответ]

5) $y = e^{x^2}$; [Ответ]

6) $y = \ln\left(2x^2 - \dfrac{x}{3} + 1\right)$. [Ответ]

352. Используя дифференциал первого порядка, вычислить приближенно:

1) $\sqrt{26}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sqrt{1{,}2}$; [Ответ]

3) $\log_2 1{,}9$; [Ответ]

4) $\operatorname{arctg} 1{,}01$; [Ответ]

5) $5{,}99^3$; [Ответ]

6) $\operatorname{arcctg} 0{,}99$; [Ответ]

7) $\sqrt[4]{80}$; [Ответ]

8) $\sqrt[3]{28}$; [Ответ]

9) $\operatorname{arctg} \dfrac{51}{50}$; [Ответ]

10) $\arcsin \dfrac{3}{100}$; [Ответ]

11) $\sin 29^\circ$; [Ответ]

12) $(3{,}01)^4$; [Ответ]

13) $\lg \dfrac{51}{5}$; [Ответ]

14) $\sin 31^\circ$; [Ответ]

15) $\sqrt{24}$; [Ответ]

16) $\sqrt[3]{126}$; [Ответ]

17) $\sqrt[5]{33}$; [Ответ]

18) $\sqrt[4]{82}$; [Ответ]

19) $\cos 91^\circ$; [Ответ]

20) $\operatorname{tg} 44^\circ$; [Ответ]

21) $\ln(e+1)$; [Ответ]

22) $\operatorname{arctg} 0{,}98$; [Ответ]

23) $(3{,}03)^4$; [Ответ]

24) $\ln 0{,}96$. [Ответ]

353. Найти приближенные значения функций:

1) $y = x^3 + x^2$ при $x = 2{,}01$; [Ответ]

2) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ при $x = 2{,}9$; [Ответ]

3) $y = \dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{1+x}}$ при $x = 3{,}02$; [Ответ]

4) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 12}$ при $x = 1{,}3$. [Ответ]

4.3. Правило Лопиталя

354. Используя правило Лопиталя, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$; [Решение] [Ответ]

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x-3x}{x}$; [Ответ]

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-3x+1}{e^{2x}}$; [Ответ]

4) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$; [Ответ]

5) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\ln x$; [Ответ]

6) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\operatorname{tg} 2x)^{\pi-2x}$; [Ответ]

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-7x^2+4x+2}{x^3-5x+4}$; [Ответ]

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; [Ответ]

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-1}{\operatorname{tg} 3x}$; [Ответ]

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x\sin 7x}$; [Ответ]

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}}{x-2}$; [Ответ]

12) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$; [Ответ]

13) $\lim\limits_{x\to a}\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}$; [Ответ]

14) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$; [Ответ]

15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x}+1\right)x$; [Ответ]

16) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}$; [Ответ]

17) $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{3}{x}$; [Ответ]

18) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$; [Ответ]

19) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$; [Ответ]

20) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$; [Ответ]

21) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{1+\ln x}}$. [Ответ]

4.4. Исследование функции с помощью производной

4.4.1. Общие задачи
4.4.2. Экономический профиль

4.4.1. Общие задачи

355. Найти экстремумы и промежутки монотонности функций:

1) $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 6x - 7;$ [Решение] [Ответ]

2) $y = e^{x^2-2x};$ [Ответ]

3) $y = \ln(3x^2 + 2x + 1);$ [Ответ]

4) $y = x^2 e^{-x};$ [Ответ]

5) $y = \sqrt{12x - 3x^3};$ [Ответ]

6) $y = x + \operatorname{arcctg} x;$ [Ответ]

7) $y = x^4 - 2x^2 + 5;$ [Ответ]

8) $y = \dfrac{x}{x^2 - 6x - 16};$ [Ответ]

9) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7;$ [Ответ]

10) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 6x + 5)^2};$ [Ответ]

11) $y = x - \ln(1 + x);$ [Ответ]

12) $y = x \ln^2 x;$ [Ответ]

13) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2};$ [Ответ]

14) $y = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 5;$ [Ответ]

15) $y = e^{3-6x-x^2};$ [Ответ]

16) $y = x^{\frac{2}{3}} - x;$ [Ответ]

17) $y = x^3 - 6x^2 + 12x$; [Ответ]

18) $y = \sqrt{3x - 7}$; [Ответ]

19) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$; [Ответ]

20) $y = \dfrac{4x + 1}{4x^2 + x + 8}$; [Ответ]

21) $y = \dfrac{1}{10x^2 + x + 20}$; [Ответ]

22) $y = \sqrt{3x^2 + 4x + 6}$. [Ответ]

356. Найти точки перегиба, промежутки выпуклости и вогнутости функций:

1) $y = x^4 - 4x^3 + x - 1$; [Решение] [Ответ]

2) $y = 2x^2 + \ln x$; [Ответ]

3) $y = e^{-x^2/2}$; [Ответ]

4) $y = \ln(1 + x^2)$; [Ответ]

5) $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$; [Ответ]

6) $y = \dfrac{2x^2}{1 + x^2}$; [Ответ]

7) $y = x \operatorname{arctg} x$; [Ответ]

8) $y = \operatorname{arctg} x - x$; [Ответ]

9) $y = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$; [Ответ]

10) $y = (3x + 6)e^{x/3}$; [Ответ]

11) $y = \dfrac{x^2}{x-2}$; [Ответ]

12) $y = xe^x$; [Ответ]

13) $y = \dfrac{x^3}{x^2+12}$; [Ответ]

14) $y = \dfrac{e^x}{x}$; [Ответ]

15) $y = x^5 - 10x^2 + 7x$; [Ответ]

16) $y = \ln(x^2 - 4x + 5)$; [Ответ]

17) $y = e^{\operatorname{arctg} x}$. [Ответ]

357. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на указанном отрезке:

1) $y = x^3 - 3x$, $[0, 2]$; [Решение] [Ответ]

2) $y = x^4 - 8x^2$, $[1, 3]$; [Ответ]

3) $y = x^5 - x^3 - 2x + 1$, $[-2, 0]$; [Ответ]

4) $y = x - \sqrt{x}$, $[0, 1]$; [Ответ]

5) $y = x - \ln x$, $[1/e, e]$; [Ответ]

6) $y = (x^2 + 3x + 3)e^{-x}$, $[-4, 0]$; [Ответ]

7) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $[-1, 5]$; [Ответ]

8) $y = x + \sqrt[3]{x}$, $[-1, 1]$; [Ответ]

9) $y = 2x - \sqrt{x}$, $[0, 4]$; [Ответ]

10) $y = x^2 - 4x + 1$, $[-3, 3]$; [Ответ]

11) $y = \operatorname{tg} x - x$, $[-\pi/4, \pi/4]$; [Ответ]

12) $y = x^4 - 8x^2 + 3$, $[-2, 2]$. [Ответ]

358. Найти асимптоты графиков функций:

1) $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$; [Решение] [Ответ]

2) $y = \dfrac{2x^2-9}{x-1}$; [Ответ]

3) $y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$; [Ответ]

4) $y = e^{-1/x}$; [Ответ]

5) $y = \sqrt{x^2-x+1}$; [Ответ]

6) $y = x\operatorname{arctg} x$; [Ответ]

7) $y = \ln(x-1)$; [Ответ]

8) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$; [Ответ]

9) $y = \dfrac{2x}{x-1}$; [Ответ]

10) $y = \operatorname{arctg} x$; [Ответ]

11) $y = \dfrac{2x-1}{3x}$; [Ответ]

12) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$; [Ответ]

13) $y = \dfrac{3x^2}{x^2+5}$; [Ответ]

14) $y = \dfrac{1}{x-3}$. [Ответ]

359. Провести полное исследование и построить график функций:

1) $y = \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2 - 9x + 1)$; [Решение]

2) $y = \ln(x^2 + 4)$;

3) $y = xe^{-x}$;

4) $y = \frac{(x+1)^2}{x-3}$;

5) $y = 4x^2 + \frac{25}{x-1}$;

6) $y = x \ln x$;

7) $y = x^3 - 3x^2$;

8) $y = x^2 + \frac{2}{x}$;

9) $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$;

10) $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$;

11) $y = \frac{2x - 1}{(x-1)^2}$;

12) $y = -\ln(x^2 - 4x + 5)$;

13) $y = \frac{1}{1 - x^2}$;

14) $y = \frac{1}{1 - \sqrt{1 - x}}$;

15) $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x$;

16) $y = \frac{1}{5}(x^3 - 6x^2 + 25)$;

17) $y = \frac{2}{x^2 + x + 1}$;

18) $y = x + \frac{1}{x}$;

19) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$;

20) $y = e^{2x - x^2}$;

21) $y = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$.

4.4.2. Экономический профиль

360. Предприятие производит q единиц продукции в месяц, а суммарные издержки производства составляют $C = C(q)$. Зависимость между удельной ценой p и количеством единиц продукции q, которое можно продать по этой цене, описывается формулой $p = p(q)$. Рассчитать, при каких условиях прибыль будем максимальной, и найти эту прибыль:

1) $C(q) = \dfrac{q}{50} + 15q + 800$, $p(q) = 50 - \dfrac{q}{10}$; [Решение] [Ответ]

2) $C(q) = q^2 - 2q + 3$, $p(q) = 20$; [Ответ]

3) $C(q) = 10\ln(q+5)$, $p(q) = 10$; [Ответ]

4) $C(q) = 10\ln(q+1) - 5$, $p(q) = 4 + \dfrac{1}{q+1}$, x — целое. [Ответ]

361. Завод A отстоит от железной дороги, идущей с юга на север и проходящей через город B, на a км (считается по кратчайшему расстоянию). Определить, под каким углом φ к железной дороге следует построить подъездной путь, чтобы транспортировка грузов из A в B была наиболее экономичной, если стоимость провоза 1 т груза на расстояние 1 км составляет по подъездному пути p ден. ед., а по железной дороге — q ден. ед. и город B расположен на b км севернее завода A. Рассчитать стоимость транспортировки в этом случае:

1) $a = 8$, $p = 4$, $q = 2$, $b = 15$; [Решение] [Ответ]

2) $a = 6$, $p = 8$, $q = 4$, $b = 17$; [Ответ]

3) $a = 7$, $p = 10$, $q = 8$, $b = 18$; [Ответ]

4) $a = 8$, $p = 5$, $q = 5\sqrt{3}$, $b = 16$. [Ответ]

362. Капитал в 1 млрд руб. может быть размещен в банке под $p_1\%$ годовых или инвестирован в производство, причем эффективность вложения ожидается в размере $p_2\%$, а издержки задаются квадратичной зависимостью с коэффициентом a. Кроме того, прибыль при вложении средств в производство облагается налогом в $p_3\%$. Определить, сколько денег следует вложить в производство и сколько в банк, чтобы максимизировать прибыль:

1) $p_1 = 50$, $p_2 = 100$, $p_3 = 10$, $a = 3$; [Решение] [Ответ]

2) $p_1 = 40$, $p_2 = 150$, $p_3 = 20$, $a = 2$; [Ответ]

3) $p_1 = 60$, $p_2 = 200$, $p_3 = 10$, $a = 1$; [Ответ]

4) $p_1 = 30$, $p_2 = 100$, $p_3 = 5$, $a = 0{,}5$. [Ответ]

363. Функция издержек производства имеет вид $C(q) = 100 + 3q + q^2$, где q — количество товара. Цена за единицу товара составляет 20 ден. ед. Найти функцию прибыли и функцию предельной прибыли. Вычислить и объяснить экономический смысл $\pi'(30)$, а также $\pi(31) - \pi(30)$. [Ответ]

364. Функция средних издержек имеет вид $AC(q) = 120 + q$, где q — количество единиц продукции. Найти: а) функцию полных издержек; б) издержки производства 100 единиц продукции; в) максимальную прибыль, если продукция продается по цене 250 ден. ед. [Ответ]

365. Пусть спрос на некоторый товар зависит от цены следующим образом:

$$D(p) = \frac{25\,000}{p^2} - \frac{1}{5}.$$

Найти: а) скорость изменения спроса при цене 10 ден. ед. и 25 ден. ед.; б) эластичность спроса относительно указанных цен. Определить, при каком значении цены спрос будет эластичным.

[Ответ]

366. Пусть зависимость издержек производства от объема выпускаемой продукции выражается формулой

$$C(q) = 40q - 0{,}03q^3.$$

Определить средние и предельные издержки при объеме продукции $q = 15$ ед. Объяснить экономический смысл полученных величин. [Ответ]

367. Для функции спроса $D(p) = 6 - p$ и функции предложения $S(p) = p + 2$, где p — цена товара, найти аналитически и графически точку рыночного равновесия. Вычислить эластичность спроса и предложения относительно равновесной цены. Сделать вывод. [Ответ]

368. Найти эластичность спроса по цене и вычислить значение эластичности при указанных значениях цены:

1) $D(p) = \dfrac{p^3}{2p^2 + 7}$, $p = 10$; [Ответ]

2) $D(p) = 14p^2 + 7p - \dfrac{8}{\sqrt{p}}$, $p = 25$. [Ответ]

369. Для функции спроса $p = -2q + 150$ и функции предложения $p = 4q + 30$, где q — число единиц товара, найти аналитически и графически точку рыночного равновесия. Вычислить эластичность спроса и предложения относительно равновесного объема продаж. Сделать вывод. [Ответ]

370. Уравнение спроса имеет вид $p = 100 - 10q$. Известна функция издержек $C(q) = 50 + 3q$, где p — цена товара; q — число единиц товара. Найти максимальное значение прибыли. Определить, при какой цене прибыль будет максимальной. [Ответ]

371. Функция издержек производства некоторой продукции определяется формулой

$$C(q) = q^3 + 15q - 6q^2.$$

Найти функцию предельных издержек, функцию средних издержек и функцию скорости изменения средних издержек. Определить, при каком объеме производства q средние издержки минимальны. [Ответ]

372. Функция средних издержек имеет вид

$$AC(q) = \frac{320\,000}{q^2} + \frac{8\,000}{q} + 0{,}5,$$

где q — количество единиц продукции. Найти: а) функцию полных издержек; б) функцию предельных издержек. Определить, при каком объеме производства полные издержки минимальны. [Ответ]

373. Уравнение спроса имеет вид $D(p) = 100\sqrt{4-p}$. Найти эластичность спроса и выяснить, как увеличение цены повлияет на выручку, если спрос составит:

1) 150 ед.; [Ответ]

2) 50 ед. [Ответ]

374. Функция издержек производства некоторой продукции имеет вид

$$C(q) = 150 + 10q + 0{,}01q^2.$$

Цена на товар составляет 36 ден. ед. Найти функцию предельной прибыли и ее значение в точке $q = 15$ ед. Вычислить и объяснить экономический смысл величин $\pi'(15)$, $\pi(16) - \pi(15)$. [Ответ]

375. Функция издержек производства некоторой продукции определяется формулой

$$C(q) = 2\,000 + 100q + 0{,}1q^2.$$

Найти функцию предельных издержек, функцию средних издержек и функцию скорости изменения средних издержек. Определить, при каком объеме производства q скорость изменения средних издержек равна нулю. [Ответ]

376. Для следующих функций спроса найти значение эластичности при указанных значениях цены:

1) $D(p) = \dfrac{p^3+7}{p}$, $p = 21$; [Ответ]

2) $D(p) = \dfrac{p}{p^2+7p-3}$, $p = 17$. [Ответ]

377. Определить, при каком объеме производства монополия получит максимальную прибыль, если функция совокупных издержек $C(q)$ и уравнение спроса на некоторый товар $p = p(q)$, где p — цена товара, q — количество единиц товара, имеют вид:

1) $C(q) = 400 + 30q + q^2$, $\quad p = -\dfrac{1}{3}q^2 - 3q + 50$; [Ответ]

2) $C(q) = 900 + 40q + 5q^2$, $\quad p = -2q^2 - 4q + 280$. [Ответ]

378. Функция издержек производства некоторой продукции определяется формулой

$$C(q) = 1\,000 + 2q + 0{,}04q^2.$$

Найти фиксированные издержки, функцию предельных издержек, функцию средних издержек и функцию скорости изменения средних издержек. Определить, при каком объеме производства q средние издержки минимальны. [Ответ]

379. Функция издержек производства некоторой продукции определяется формулой

$$C(q) = 96q - 2q^2 + q^3.$$

Установить, при каком объеме производства предельные и средние издержки совпадают. Найти эластичность полных и средних издержек при этом объеме. [Ответ]

380. Пусть производственная функция задается следующей эмпирической формулой:

$$F(L) = 300\sqrt{L} - 4L,$$

где L — численность персонала. Вычислить предельную производительность при $L = 9$, $L = 100$, $L = 2\,500$, $L = 22\,500$. Определить, как изменяется предельная производительность с ростом численности персонала. [Ответ]

381. Пусть зависимость между себестоимостью продукции и объемом производства задается формулой $C(q) = 50 - 0{,}4q$. Определить эластичность себестоимости при объеме продукции:

1) $q = 15$ ед.; [Ответ]

2) $q = 150$ ед. [Ответ]

382. Издержки производства некоторой продукции имеют вид

$$C(q) = 100 + 3q^2.$$

Цена на товар изменяется по закону $p(q) = 400 - 2q/5$. Определить, при каком объеме производства q прибыль π будет максимальной. [Ответ]

383. Для функции спроса

$$D(p) = 154 - \frac{2p^3}{p+1}$$

найти значение эластичности при цене $p = 7$. [Ответ]

Глава 5

Теория интегрирования

5.1. Неопределенный интеграл
5.2. Интегрирование некоторых классов функций
5.3. Определенный интеграл
5.4. Приложения определенного интеграла
5.5. Несобственные интегралы

5.1. Неопределенный интеграл

384. Найти интегралы:

1) $\int (2x+1)^2 dx;$ [Решение] [Ответ]

2) $\int \frac{x^2-1}{x}\, dx;$ [Ответ]

3) $\int \left(x + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right) dx;$ [Ответ]

4) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}}\, dx;$ [Ответ]

5) $\int \frac{2x - 3\sqrt{x} + 3\sqrt[4]{x^3}}{x}\, dx;$ [Ответ]

6) $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3}\, dx;$ [Ответ]

7) $\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx;$ [Ответ]

8) $\int \cos^2 \frac{x}{2}\, dx;$ [Ответ]

9) $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx;$ [Ответ]

10) $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx;$ [Ответ]

11) $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) dx;$ [Ответ]

12) $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx;$ [Ответ]

13) $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx;$ [Ответ]

14) $\int \frac{dx}{1+\cos 2x};$ [Ответ]

15) $\int \frac{dx}{1-\cos 2x};$ [Ответ]

16) $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\, dx;$ [Ответ]

17) $\int \sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}\, dx;$ [Ответ]

18) $\int e^x\left(3 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right) dx;$ [Ответ]

19) $\int 4^x\left(3 + \frac{4^{-x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx;$ [Ответ]

20) $\int \left(2^{x+1} - 5^{x-1}\right) dx;$ [Ответ]

21) $\int (2^x + 3^x)^2\, dx;$ [Ответ]

22) $\int \frac{2^x + 5^x}{10^x}\, dx;$ [Ответ]

23) $\int \frac{dx}{4+x^2};$ [Ответ]

24) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$; [Ответ]

25) $\int \dfrac{\operatorname{tg}^2 x - 4}{\sin^2 x}\,dx$; [Ответ]

26) $\int \dfrac{x^2+2}{x^2-1}\,dx$; [Ответ]

27) $\int \dfrac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,dx$; [Ответ]

28) $\int \dfrac{x^5-x+1}{x^2+1}\,dx$; [Ответ]

29) $\int \dfrac{-2x^4+4x^2-1}{1-x^2}\,dx$; [Ответ]

30) $\int \dfrac{dx}{16-x^2}$; [Ответ]

31) $\int \left(\dfrac{2-x}{x}\right)^3 dx$. [Ответ]

385. Найти интегралы, применив подходящие подстановки:

1) $\int \cos 3x\,dx$; [Решение] [Ответ]

2) $\int \dfrac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}}\,dx$; [Решение] [Ответ]

3) $\int \dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}}{\sin^2 4x}\,dx$; [Решение] [Ответ]

4) $\int \dfrac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}$; [Решение] [Ответ]

5) $\int e^{5-2x^2} x\,dx$; [Решение] [Ответ]

6) $\int \frac{2x-4}{x^2+16}\,dx$; [Решение] [Ответ]

7) $\int \frac{dx}{4+9x^2}$; [Ответ]

8) $\int (2+5x)^9\,dx$; [Ответ]

9) $\int \frac{dx}{3x-1}$; [Ответ]

10) $\int \operatorname{tg} x\,dx$; [Ответ]

11) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$; [Ответ]

12) $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$; [Ответ]

13) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; [Ответ]

14) $\int \frac{dx}{\arcsin^4 x\sqrt{1-x^2}}\,dx$; [Ответ]

15) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$; [Ответ]

16) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$; [Ответ]

17) $\int 4^{\cos 5x}\sin 5x\,dx$; [Ответ]

18) $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$; [Ответ]

19) $\int \sqrt[3]{3+5\cos x}\sin x\,dx$; [Ответ]

20) $\int \frac{x^3\,dx}{(8x^4+125)^{\frac{3}{4}}}\,dx$; [Ответ]

21) $\int \frac{x\,dx}{9+x^4}\,dx$; [Ответ]

22) $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^{12}+3}}\,dx$; [Ответ]

23) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; [Ответ]

24) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$; [Ответ]

25) $\int \cos\frac{1}{x}\,\frac{dx}{x^2}$; [Ответ]

26) $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; [Ответ]

27) $\int \frac{2x+\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$; [Ответ]

28) $\int \frac{e^{3x}\,dx}{e^x-1}$; [Ответ]

29) $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{e^x}\right)}{e^x}\,dx$; [Ответ]

30) $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$; [Ответ]

31) $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-1}$; [Ответ]

32) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6-1}}$; [Ответ]

33) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; [Ответ]

34) $\int \cos^4 x \sin x\,dx$; [Ответ]

35) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$; [Ответ]

36) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}\,dx$; [Ответ]

37) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}}$. [Ответ]

386. Найти интегралы, применив метод интегрирования по частям:

1) $\int \ln(x+8)\,dx$; [Решение] [Ответ]

2) $\int (x^2-x+1)\ln x\,dx$; [Решение] [Ответ]

3) $\int (3x-2)\ln^2 x\,dx$; [Решение] [Ответ]

4) $\int \frac{x \arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$; [Решение] [Ответ]

5) $\int (x+8)\sin 3x\,dx$; [Решение] [Ответ]

6) $\int (x^2 - 3)\cos x\, dx$; [Решение] [Ответ]

7) $\int x\cos(x - 4)\, dx$; [Решение] [Ответ]

8) $\int \arcsin x\, dx$; [Ответ]

9) $\int \operatorname{arctg} 2x\, dx$; [Ответ]

10) $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$; [Ответ]

11) $\int (5x - 1)e^{2x}\, dx$; [Ответ]

12) $\int x^2 \sin 3x\, dx$; [Ответ]

13) $\int (2x + 3)\cos 5x\, dx$; [Ответ]

14) $\int e^x \sin 2x\, dx$; [Ответ]

15) $\int e^{2x}\cos x\, dx$; [Ответ]

16) $\int \cos(\ln x)\, dx$; [Ответ]

17) $\int \sin(\ln x)\, dx$; [Ответ]

18) $\int \dfrac{x}{\cos^2 x}\, dx$; [Ответ]

19) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx;$ [Ответ]

20) $\int \sqrt{25-x^2}\,dx;$ [Ответ]

21) $\int \sqrt{x^2+7}\,dx;$ [Ответ]

22) $\int \ln^2 x\,dx;$ [Ответ]

23) $\int \ln(x^2+4)\,dx;$ [Ответ]

24) $\int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx;$ [Ответ]

25) $\int \arcsin^2 x\,dx;$ [Ответ]

26) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx;$ [Ответ]

27) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx;$ [Ответ]

28) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx;$ [Ответ]

29) $\int (e^x+2x)^2\,dx;$ [Ответ]

30) $\int (e^x-\sin x)^2\,dx;$ [Ответ]

31) $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx;$ [Ответ]

32) $\int \sqrt[3]{x}\ln^2 x\,dx$; [Ответ]

33) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$; [Ответ]

34) $\int x\cos^2 x\,dx$; [Ответ]

35) $\int x\sin\sqrt{x}\,dx$; [Ответ]

36) $\int x^2 e^{3x}\,dx$; [Ответ]

37) $\int xe^{-2x}\,dx$; [Ответ]

38) $\int (x^2+1)\sin 2x\,dx$. [Ответ]

5.2. Интегрирование некоторых классов функций

5.2.1. Общие задачи
5.2.2. Экономический профиль

5.2.1. Общие задачи

387. Найти интегралы от рациональных функций:

1) $\int \dfrac{2x-3}{x^2+2x+2}\,dx$; [Решение] [Ответ]

2) $\int \dfrac{x^3+2x^2+2x+3}{x^3-x^2+3x-3}\,dx$; [Решение] [Ответ]

3) $\int \dfrac{dx}{x^2+2x+5}$; [Ответ]

4) $\int \dfrac{x^2\,dx}{x^2-6x+10}$; [Ответ]

5) $\int \dfrac{(x-1)^2\,dx}{x^2+4x+5}$; [Ответ]

6) $\int \dfrac{x-4}{(x-2)(x-3)}\,dx$; [Ответ]

7) $\int \dfrac{dx}{x^2+x}$; [Ответ]

8) $\int \dfrac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$; [Ответ]

9) $\int \dfrac{2x+3}{(x-2)^3}\,dx$; [Ответ]

10) $\int \dfrac{3x-5}{(x+4)^2}\,dx$; [Ответ]

11) $\int \dfrac{x^2-14x+52}{(x-4)(x+2)(x-5)}\,dx$; [Ответ]

12) $\int \frac{5x^2-14x+3}{(2x+1)(x-1)(x-2)}\,dx;$ [Ответ]

13) $\int \frac{x^2+6x+7}{(x+3)^2(x+2)}\,dx;$ [Ответ]

14) $\int \frac{3x^2-10x+19}{(x-1)^2(x+5)}\,dx;$ [Ответ]

15) $\int \frac{x^2-7x-17}{(x^2+4x+8)(x-3)}\,dx;$ [Ответ]

16) $\int \frac{x^4-x^3-5x^2-11x-10}{(x^2+2x+2)(x-3)}\,dx;$ [Ответ]

17) $\int \frac{2x+1}{(x^2+5x+6)(x+2)}\,dx;$ [Ответ]

18) $\int \frac{2x^3+25x^2+61x-82}{(x^2+6x-7)(x+5)}\,dx;$ [Ответ]

19) $\int \frac{dx}{x^3-1};$ [Ответ]

20) $\int \frac{dx}{x^3+1};$ [Ответ]

21) $\int \frac{dx}{x^4-1};$ [Ответ]

22) $\int \frac{dx}{x^4+2x^2-3};$ [Ответ]

23) $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}\,dx;$ [Ответ]

24) $\int \frac{x^5}{x-2}\,dx;$ [Ответ]

25) $\int \frac{x^4}{x^2+7}\,dx$; [Ответ]

26) $\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx$; [Ответ]

27) $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}\,dx$; [Ответ]

28) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}\,dx$; [Ответ]

29) $\int \frac{5x-1}{x^3-3x-2}\,dx$; [Ответ]

30) $\int \frac{dx}{(x^2-9)(x^2+2)}$; [Ответ]

31) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$; [Ответ]

32) $\int \frac{x-2}{x^3+4x}\,dx$. [Ответ]

388. Найти интегралы от иррациональных функций:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$; [Решение] [Ответ]

2) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+2}\,dx$; [Решение] [Ответ]

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; [Ответ]

4) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; [Ответ]

5) $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$; [Ответ]

6) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$; [Ответ]

7) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$; [Ответ]

8) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+1}$; [Ответ]

9) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$; [Ответ]

10) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$; [Ответ]

11) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$; [Ответ]

12) $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$; [Ответ]

13) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$; [Ответ]

14) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$; [Ответ]

15) $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3\sqrt{x}}$; [Ответ]

16) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}$; [Ответ]

17) $\int \dfrac{1-\sqrt[3]{x-3}}{1+\sqrt{x-3}}\,dx;$ [Ответ]

18) $\int \dfrac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1-\sqrt[3]{x})}\,dx;$ [Ответ]

19) $\int \dfrac{x-1}{\sqrt{2x-1}}\,dx;$ [Ответ]

20) $\int \dfrac{\sqrt{x+2}}{x}\,dx;$ [Ответ]

21) $\int \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}}\,dx;$ [Ответ]

22) $\int \dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}\,dx;$ [Ответ]

23) $\int \dfrac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x}};$ [Ответ]

24) $\int \dfrac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})}\,dx;$ [Ответ]

25) $\int \dfrac{\sqrt{x}\,dx}{4x-\sqrt[3]{x^2}};$ [Ответ]

26) $\int \dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx;$ [Ответ]

27) $\int \dfrac{5x+6}{\sqrt{1-3x}}\,dx;$ [Ответ]

28) $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx;$ [Ответ]

29) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$; [Ответ]

30) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$; [Ответ]

31) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$; [Ответ]

32) $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}$. [Ответ]

389. Найти интегралы от тригонометрических функций:

1) $\int \sin 2x \cos 3x\,dx$; [Решение] [Ответ]

2) $\int \sin^2 x \cos x\,dx$; [Решение] [Ответ]

3) $\int \sin 5x \sin 2x\,dx$; [Ответ]

4) $\int \cos 3x \cos 4x\,dx$; [Ответ]

5) $\int \cos x \cos 3x \cos 5x\,dx$; [Ответ]

6) $\int \sin x \cos^3 x\,dx$; [Ответ]

7) $\int \sin^2 x\,dx$; [Ответ]

8) $\int \cos^2 x\,dx$; [Ответ]

9) $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx;$ [Ответ]

10) $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx;$ [Ответ]

11) $\int \frac{dx}{\sin x};$ [Ответ]

12) $\int \frac{dx}{\cos x};$ [Ответ]

13) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} \, dx;$ [Ответ]

14) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \, dx;$ [Ответ]

15) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \, dx;$ [Ответ]

16) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} \, dx;$ [Ответ]

17) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx;$ [Ответ]

18) $\int \cos^6 3x \, dx;$ [Ответ]

19) $\int \sin^4 2x \, dx;$ [Ответ]

20) $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x};$ [Ответ]

21) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x};$ [Ответ]

22) $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$; [Ответ]

23) $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$; [Ответ]

24) $\int \dfrac{dx}{2+\cos x}$; [Решение] [Ответ]

25) $\int \dfrac{dx}{1+\sin x}$; [Ответ]

26) $\int \dfrac{\sin x}{1-\sin x}\,dx$; [Ответ]

27) $\int \dfrac{dx}{\sin x+\cos x}$; [Ответ]

28) $\int \dfrac{dx}{\sin x-\cos x}$; [Ответ]

29) $\int \dfrac{dx}{4\sin x-3\cos x-5}$; [Ответ]

30) $\int \dfrac{dx}{2\sin x+\sin 2x}$; [Ответ]

31) $\int \dfrac{dx}{3\sin x+4\cos x}$; [Ответ]

32) $\int \dfrac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x}\,dx$; [Ответ]

33) $\int \dfrac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}\,dx$; [Ответ]

34) $\int \dfrac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$. [Ответ]

5.2.2. Экономический профиль

390. Функция предельных издержек имеет вид

$$MC(q) = 60 - 0{,}04q + 0{,}003q^2,$$

где q — количество единиц продукции. Найти: а) функцию полных издержек, если издержки производства 100 ед. продукции составляют 7 000 ден. ед. в месяц; б) фиксированные издержки; в) издержки производства 250 ед. продукции; г) максимальную прибыль, если продукция продается по цене 65,5 ден. ед. [Ответ]

391. Функция предельных издержек имеет вид

$$MC(q) = 50 + 0{,}02q,$$

где q — количество единиц продукции. Найти: а) функцию полных издержек, если фиксированные издержки составляют 25 000 ден. ед. в месяц; б) максимальную прибыль, если продукция продается по цене 75 ден. ед. [Ответ]

392. Функция предельной прибыли имеет вид

$$M\pi(q) = 25 - 0{,}004q,$$

где q — количество единиц продукции. Прибыль предприятия составляет 35,8 тыс. ден. ед., если продано 1 200 изделий. Найти функцию прибыли. Определить, при каком значении q прибыль будет максимальной. [Ответ]

393. Функция предельных издержек имеет вид

$$MC(q) = 30q\, e^{0{,}001q^2},$$

где q — количество единиц продукции. Найти: а) функцию полных издержек, если фиксированные издержки составляют 20 000 ден. ед. в месяц; б) функцию средних издержек. [Ответ]

5.3. Определенный интеграл

394. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^2 (6x^2 - 5)\,dx$; [Решение] [Ответ]

2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$; [Ответ]

3) $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; [Ответ]

4) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}$; [Ответ]

5) $\int\limits_0^{\pi/3} \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$; [Ответ]

6) $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2}\,dx$; [Ответ]

7) $\int\limits_1^2 \left(5x^2 - \frac{3}{x^2}\right) dx$; [Ответ]

8) $\int\limits_0^{\pi} \sin 3x \cos 2x \, dx$; [Ответ]

9) $\int\limits_{-\pi/4}^{0} \operatorname{tg}^2 x \, dx$. [Ответ]

395. Воспользовавшись подходящим методом, найти интегралы:

1) $\int\limits_0^1 x e^{x^2} \, dx$; [Решение] [Ответ]

2) $\int\limits_1^e \dfrac{\sin(\ln x)}{x} \, dx$; [Решение] [Ответ]

3) $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \dfrac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$; [Решение] [Ответ]

4) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\cos y \, dy}{4+\sqrt{\sin y}}$; [Решение] [Ответ]

5) $\int\limits_{-3/2}^{2} \dfrac{(x-1)^2}{x^2+3x+4} \, dx$; [Решение] [Ответ]

6) $\int\limits_{-1}^{0} \dfrac{x \, dx}{x^3-1}$; [Решение] [Ответ]

7) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\, dx$; [Решение] [Ответ]

8) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$; [Ответ]

9) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; [Ответ]

10) $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$; [Решение] [Ответ]

11) $\int_{-3}^{0} (x-2)e^{-x/3}\, dx$; [Решение] [Ответ]

12) $\int_0^2 \frac{\left(4\sqrt{2-x}-\sqrt{3x+2}\right) dx}{\left(\sqrt{3x+2}+4\sqrt{2-x}\right)(3x+2)^2}$; [Решение] [Ответ]

13) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$; [Ответ]

14) $\int_1^e x^2 \ln x\, dx$; [Ответ]

15) $\int_0^2 \frac{3x^5}{\sqrt{x^6+1}}\, dx$; [Ответ]

16) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; [Ответ]

17) $\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx$; [Ответ]

18) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$; [Ответ]

19) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; [Ответ]

20) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{x+x^2}$; [Ответ]

21) $\int\limits_0^1 \arccos x\,dx$; [Ответ]

22) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$; [Ответ]

23) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$; [Ответ]

24) $\int\limits_0^2 \sqrt{x}\ln x\,dx$; [Ответ]

25) $\int_0^{\pi} \sin x \cos^2 x \, dx;$ [Ответ]

26) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x};$ [Ответ]

27) $\int_0^{\sqrt{\pi}/2} \frac{x \, dx}{\cos^2 x^2};$ [Ответ]

28) $\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \, dx;$ [Ответ]

29) $\int_1^{2} \frac{e^x}{e^x-1} \, dx;$ [Ответ]

30) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x} \, dx;$ [Ответ]

31) $\int_1^{e} \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx;$ [Ответ]

32) $\int_1^{e} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)};$ [Ответ]

33) $\int_0^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}};$ [Ответ]

34) $\int\limits_1^3 \ln x\,dx;$ [Ответ]

35) $\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}};$ [Ответ]

36) $\int\limits_1^2 x\ln x\,dx;$ [Ответ]

37) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x};$ [Ответ]

38) $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x+\sqrt{2x+1}};$ [Ответ]

39) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx;$ [Ответ]

40) $\int\limits_{e^3}^{e^8} \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}};$ [Ответ]

41) $\int\limits_{e^{-3}}^{e^{-2}} \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}};$ [Ответ]

42) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$; [Ответ]

43) $\int\limits_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{4x+5}}$. [Ответ]

5.4. Приложения определенного интеграла

5.4.1. Общие задачи
5.4.2. Экономический профиль

5.4.1. Общие задачи

396. Найти площадь фигуры, ограниченной следующими кривыми:

1) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$; [Решение] [Ответ]

2) $y = 4 - x^2$, $y = 0$; [Ответ]

3) $y = x^2 + 4$, $y = 5$; [Ответ]

4) $y = 5 - x^2$, $y = 4$; [Ответ]

5) $y = (x + 4)(-x - 3)$ и осью абсцисс; [Ответ]

6) $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 2$; [Ответ]

7) $y = 2x - x^2$, $y = x$; [Ответ]

8) $y = x^2$, $y = 2x + 3$; [Ответ]

9) $y = x^2 - 3$, $y = 6 - 2x^2$; [Ответ]

10) $y = 9^x$, $y = 9$, $x = 0$; [Ответ]

11) $4y = x^2$, $y^2 = 4x$; [Ответ]

12) $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$; [Ответ]

13) $y = x^2 - 2$, $y = -x$; [Ответ]

14) $y = x - \dfrac{\pi}{2}$, $y = \cos x$, $x = 0$; [Ответ]

15) $y = x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$; [Ответ]

16) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$; [Ответ]

17) $y = (1 - x)(x - 5)$, $y = 4$, $x = 5$; [Ответ]

18) $y = x^2 - 3x$, $y = -2$, $y = 0$; [Ответ]

19) $y^2 + x = 4$, $y^2 - 3x = 12$; [Ответ]

20) $y = x^2$, $y = 2 - |x|$; [Ответ]

21) $y = |x| + 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$; [Ответ]

22) $y = |x^2 - 1| + 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$; [Ответ]

23) $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$; [Ответ]

24) $y = |\log_a x|$, $y = 0$, $x = 1/a$, $x = a$ $(a > 1)$; [Ответ]

25) $3x - 2y + 4 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$, $x = 3$, $x = 5$; [Ответ]

26) $y = x^3$, $y = (x - 2)^2$ и осью абсцисс; [Ответ]

27) $y = x^3$, $y = x^2 - x + 1$ и осью ординат; [Ответ]

28) $x^2 + y^2 = 8$, $y = \dfrac{x^2}{2}$; [Ответ]

29) $x^2 + y^2 = 9$, $y = 3 - x$, расположенной в первой четверти; [Ответ]

30) $x^2 + y^2 = 16$, $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + 4$, где $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; [Ответ]

31) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. [Ответ]

397. Определить длину дуги кривой:

1) $y = \sqrt{x^3}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$; [Решение] [Ответ]

2) $y = \dfrac{x^2}{4}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$; [Ответ]

3) $y = 4 - \dfrac{x^2}{2}$, $y \geqslant 0$; [Ответ]

4) $y = \frac{4}{5}\sqrt[5]{x^4}$, $0 \leqslant x \leqslant 9$; [Ответ]

5) $y = \ln x$, $2\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{6}$; [Ответ]

6) $y = \ln\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$; [Ответ]

7) $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant \ln 7$; [Ответ]

8) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$, $1 \leqslant x \leqslant e$; [Ответ]

9) $y = 1 - x^2$, отсеченной осью Ox; [Ответ]

10) $y = 2\ln\frac{4}{4 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$; [Ответ]

11) $y = \sqrt{2x - x^2} - 1$, $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1$; [Ответ]

12) $y = \frac{x}{4}\sqrt{2 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; [Ответ]

13) $y = 2\sqrt{x}$, $1 \leqslant x \leqslant 2$; [Ответ]

14) $y = \arcsin e^x$, $-\ln 7 \leqslant x \leqslant -\ln 2$; [Ответ]

15) $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{9}{16}$; [Ответ]

16) $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x} + 5$, $\frac{1}{9} \leqslant x \leqslant 1$. [Ответ]

398. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной данными кривыми:

1) $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 4$ вокруг оси Ox; [Решение] [Ответ]

2) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 1$ вокруг оси Ox; [Ответ]

3) $y^2 = 6x$, $y = 0$, $x = 3$ вокруг оси Ox; [Ответ]

4) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ вокруг оси Ox; [Ответ]

5) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ вокруг оси Ox; [Ответ]

6) $y=3\sqrt{1-x^2}$, $y=1-x^2$ вокруг оси Ox; [Ответ]

7) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$ вокруг оси Ox; [Ответ]

8) $y=\sqrt{x+1}$, $x+y=1$, $y=0$ вокруг оси Ox; [Ответ]

9) $y=\cos x$, $y=1-x$, $y=0$ вокруг оси Ox; [Ответ]

10) $y=\sqrt{x}e^x$, $x=1$, $y=0$ вокруг оси Ox; [Ответ]

11) $y=4-x^2$, $x=0$, $y=0$ вокруг оси Oy; [Ответ]

12) $y=x^2$, $8x=y^2$ вокруг оси Oy; [Ответ]

13) $y=\arcsin x$ вокруг оси Oy; [Ответ]

14) $y^2=4x$, $y=x$ вокруг оси Oy; [Ответ]

15) $y=x^3$, $x=0$, $y=8$ вокруг оси Oy; [Ответ]

16) $x^2-y^2=4$, $y=\pm 2$ вокруг оси Oy; [Ответ]

17) $y=\arccos\frac{x}{5}$, $y=\arccos\frac{x}{3}$, $y=0$ вокруг оси Oy; [Ответ]

18) $y=\frac{1}{1+x^2}$, $y=\frac{x}{2}$, $x=0$ вокруг оси Oy; [Ответ]

19) $y=\frac{2}{1+x^2}$, $y=x^2$ вокруг оси Oy; [Ответ]

20) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Oy. [Ответ]

5.4.2. Экономический профиль

399. Найти среднее значение издержек $K = K(x)$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x меняется от x_1 до x_2 единиц. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение:

1) $K(x) = 3x^2 + 4x + 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; [Решение] [Ответ]

2) $K(x) = 6x^2 + 4x + 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$; [Ответ]

3) $K(x) = \log_2(x + 1)$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$; [Ответ]

4) $K(x) = \sin^2 \dfrac{x}{2}$, $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$. [Ответ]

400. Определить объем продукции, произведенной рабочим за k-й час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией $z = z(t)$:

1) $z(t) = \dfrac{2}{3t + 4} + 3$, $k = 2$; [Решение] [Ответ]

2) $z(t) = \dfrac{3}{3t + 2} + 5$, $k = 5$; [Ответ]

3) $z(t) = xe^{-x}$, $k = 3$; [Ответ]

4) $z(t) = \cos \dfrac{x}{4} + 1$, $k = 1$. [Ответ]

401. Определить дисконтированный доход K за T лет при процентной ставке $p\%$, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили m млн руб. и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на n млн руб.:

1) $T = 3$, $p = 8$, $m = 10$, $n = 1$; [Решение] [Ответ]

2) $T = 5$, $p = 10$, $m = 5$, $n = 2$; [Ответ]

3) $T = 10,\ p = 5,\ m = 20,\ n = 1;$ [Ответ]

4) $T = 4,\ p = 10,\ m = 7,\ n = 3.$ [Ответ]

402. Определить запас товаров на складе, образуемый за k дней, если поступление товаров характеризуется функцией $f(t)$:

1) $f(t) = 3t^2 + 3t + 4,\ k = 2;$ [Решение] [Ответ]

2) $f(t) = 5t - t^2 + 6,\ k = 4;$ [Ответ]

3) $f(t) = te^{-t^2},\ k = 1;$ [Ответ]

4) $f(t) = te^{-t},\ k = 3.$ [Ответ]

5.5. Несобственные интегралы

403. Вычислить интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^3}$; [Решение] [Ответ]

2) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$; [Ответ]

3) $\int\limits_0^{+\infty} \cos 3x\,dx$; [Решение] [Ответ]

4) $\int\limits_{1/3}^{+\infty} \dfrac{\pi\,dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x}$; [Решение] [Ответ]

5) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+4}$; [Ответ]

6) $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx$; [Ответ]

7) $\int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{x+1}{x^2+1}dx$; [Ответ]

8) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arcctg} x}{1+x^2}\,dx;$ [Ответ]

9) $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}};$ [Ответ]

10) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+2x+2};$ [Ответ]

11) $\int\limits_4^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x-1}}.$ [Ответ]

404. Вычислить интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}};$ [Решение] [Ответ]

2) $\int\limits_0^{1/3} \dfrac{dx}{9x^2-9x+2};$ [Решение] [Ответ]

3) $\int\limits_0^3 \dfrac{dx}{\sqrt{9-x^2}};$ [Ответ]

4) $\int\limits_0^{1/2} \dfrac{dx}{x\ln^2 x};$ [Ответ]

5) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$; [Решение] [Ответ]

6) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$; [Ответ]

7) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$; [Ответ]

8) $\int_{-1}^0 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; [Ответ]

9) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+5x}\,dx$; [Ответ]

10) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$; [Ответ]

11) $\int_0^1 x^2 \ln x\,dx$; [Ответ]

12) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; [Ответ]

13) $\int_0^e \sin(\ln x)\,dx$. [Ответ]

Глава 6

Дифференцирование функций двух переменных

6.1. Функция двух переменных. Дифференциал
6.2. Экстремум функции двух переменных

6.1. Функция двух переменных. Дифференциал

6.1.1. Общие задачи
6.1.2. Экономический профиль

6.1.1. Общие задачи

405. Вычислить частные значения функций:

1) $z = x^2 \cos y$ в точке $M(2, \pi/3)$; [Решение] [Ответ]

2) $z = \dfrac{2x - y}{x - 2y}$ при $x = 3$ и $y = 1$, а также при $x = 1$ и $y = 3$; [Ответ]

3) $z = \sqrt{xy^2 + x + 1}$ в точках $M(1/2, 1)$ и $P(2, -1)$. [Ответ]

406. Найти области определения следующих функций:

1) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; [Решение] [Ответ]

2) $z = \arcsin(x + y)$; [Решение] [Ответ]

3) $z = \dfrac{1}{y - 3x}$; [Ответ]

4) $z = \ln(x + y)$; [Ответ]

5) $z = \sqrt{y^2 - 2x + 4}$; [Ответ]

6) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 16}}$; [Ответ]

7) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x + y}} + \sqrt{x - y}$; [Ответ]

8) $z = \sqrt{xy}$; [Ответ]

9) $z = \arccos(2 - x^2 - y^2)$; [Ответ]

10) $z = a^2 - x^2 - 2y^2$; [Ответ]

11) $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$; [Ответ]

12) $z = y + \sqrt{x}$. [Ответ]

407. Найти множества точек разрыва данных функций:

1) $f(x,y)=\dfrac{x^2+3x-y^2+2}{x^2+y^2}$; [Решение] [Ответ]

2) $f(x,y)=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2}$; [Ответ]

3) $f(x,y)=e^{\frac{2}{x^2+y^2}}$; [Ответ]

4) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2+1}{(x-y)^4}$; [Ответ]

5) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$; [Ответ]

6) $f(x,y)=\dfrac{8}{4-x^2-y^2}$; [Ответ]

7) $f(x,y)=\dfrac{x+3y}{2y-x}$; [Ответ]

8) $f(x,y)=\dfrac{1}{y-x^2}$. [Ответ]

408. Найти частные производные функции:

1) $\rho=u^4\cos^2\varphi$; [Решение] [Ответ]

2) $z=2x^3-6x^2y+y^3$; [Решение] [Ответ]

3) $u=x^2+2y^2-3xy-4x+2y+5$; [Ответ]

4) $z=x^3+6xy^2-4y^3-2xy$; [Ответ]

5) $z=\dfrac{y-2x}{x+2y}$; [Ответ]

6) $z=y^x$; [Ответ]

7) $z = \dfrac{x}{y}$; [Ответ]

8) $z = x^2 \cos(x + 3y)$; [Ответ]

9) $z = \ln(3x^2 - y^4)$; [Ответ]

10) $z = \sin\sqrt{x - y^3}$; [Ответ]

11) $z = \arcsin 2x^3 y$; [Ответ]

12) $z = e^{2x^2 - y^5}$; [Ответ]

13) $z = \operatorname{tg} \dfrac{3x - y^2}{x}$; [Ответ]

14) $r = \rho^2 \sin^4 \theta$; [Ответ]

15) $u = \dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{x}{y}$; [Ответ]

16) $z = e^{xy(x^2+y^2)}$; [Ответ]

17) $u = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{z^2}$; [Ответ]

18) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{1 + x^2}$; [Ответ]

19) $u = z^{xy^2}$; [Решение] [Ответ]

20) $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{-\frac{z}{y}}$; [Ответ]

21) $u = (x - y)(x - z)(y - z)$. [Ответ]

409. Для функции

$$f(x, y) = x^2 \sin^2 y$$

вычислить частные производные f'_x и f'_y в точке $(-1, \pi/4)$. [Ответ]

410. Для функции

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y}$$

вычислить значения $f'_x(3,-4)$ и $f'_y(-12,5)$. [Ответ]

411. Для функции $f(x,y) = x^3y + xy^2 - 2x + 3y - 1$ вычислить частные производные f'_x и f'_y в точке $(3,2)$. [Ответ]

412. Проверить выполнение теоремы Шварца на примере смешанных частных производных второго порядка:

1) $z = \dfrac{x^2}{y^2}$;

2) $z = \ln(x-2y)$;

3) $z = \dfrac{x^2}{1-y}$;

4) $z = x^2 \sin\sqrt{y}$;

5) $z = y^{x^2}$;

6) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

413. Найти частные производные второго порядка функции z:

1) $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$; [Решение] [Ответ]

2) $z = x^4 - 5x^2y - 2y^3$; [Ответ]

3) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$; [Ответ]

4) $z = \sin(x^2+y^3)$; [Ответ]

5) $z = \sin y \ln x + e^x \ln y$; [Ответ]

6) $z = \sqrt{2xy + y^2}$; [Ответ]

7) $z = xy + \dfrac{y}{x}$; [Ответ]

8) $z = \operatorname{tg} xy^2$; [Ответ]

9) $z = \dfrac{x^2}{1 - 2y}$; [Ответ]

10) $z = \sin x \cos y$; [Ответ]

11) $z = x + y + \dfrac{xy}{x - y}$; [Ответ]

12) $z = xe^y$; [Ответ]

13) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{x}$; [Ответ]

14) $z = \ln(x + e^{xy})$; [Ответ]

15) $z = x^{2y}$; [Ответ]

16) $z = e^x(\cos y + x \sin y)$. [Ответ]

414. Показать, что функция z удовлетворяет данному дифференциальному уравнению:

1) $z = y \ln(x^2 - y^2)$, $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$; [Решение]

2) $z = y^{\frac{y}{x}} \sin \dfrac{y}{x}$, $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = yz$;

3) $z = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$, $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^3}{y}$;

4) $z = e^{\frac{x}{y}}$, $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial x}$;

5) $z = \dfrac{xy}{x - y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2}{x - y}$.

415. Показать, что уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

удовлетворяют следующие функции:

1) $z = e^x \cos y$;

2) $z = \ln(x^2 + y^2)$.

416. Показать, что уравнению колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

удовлетворяют следующие функции:

1) $u(x, t) = A \sin(a\lambda t + \varphi) \sin \lambda x$;

2) $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$, где φ, ψ — произвольные дважды дифференцируемые функции.

417. Найти полный дифференциал данной функции:

1) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$; [Решение] [Ответ]

2) $z = 2x^4 + y^4 - x^2y^3 + 5xy$; [Ответ]

3) $z = \sin^2 x + \cos^2 y$; [Ответ]

4) $z = yx^y$; [Ответ]

5) $z = e^{y^2 - xy}$; [Ответ]

6) $z = \sqrt{3x^2 - y^2 + x}$; [Ответ]

7) $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$; [Ответ]

8) $z = \operatorname{ctg} \dfrac{y}{x}$; [Ответ]

9) $z = 5xy^4 + 2x^2y^7$; [Ответ]

10) $z = \cos\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$; [Ответ]

11) $z = (5x^2y - y^3 + 7)^3$; [Ответ]

12) $v = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{t}$; [Ответ]

13) $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$; [Ответ]

14) $z = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$; [Ответ]

15) $z = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$; [Ответ]

16) $z = \sqrt{u+\sqrt{u^2+v^2}}$; [Ответ]

17) $z = (x^2+y^2)\dfrac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$; [Ответ]

18) $u = \dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$; [Решение] [Ответ]

19) $u = x^2yz^4$; [Ответ]

20) $u = \dfrac{y}{xz}$; [Ответ]

21) $u = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z$; [Ответ]

22) $u = x^{\frac{y}{z}}$; [Ответ]

23) $u = x^{y^z}$. [Ответ]

418. Найти полный дифференциал функции:

1) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ при $x = 2$, $y = 3$, $dx = 0{,}1$, $dy = -0{,}2$; [Ответ]

2) $z = e^{xy}$ при $x = 1$, $y = 2$, $dx = -0{,}1$, $dy = 0{,}1$. [Ответ]

419. Вычислить приближённо, заменяя приращение функции её дифференциалом:

1) $1{,}07^{3{,}97}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sqrt{(4{,}03)^2 + (3{,}05)^2}$; [Ответ]

3) $1{,}03 \cdot 9{,}98$; [Ответ]

4) $1{,}94e^{0{,}12}$; [Ответ]

5) $1{,}04^{2{,}03}$; [Ответ]

6) $\operatorname{arctg}\dfrac{1{,}02}{0{,}95}$; [Указание] [Ответ]

7) $\sin 28^\circ \cos 61^\circ$; [Указание] [Ответ]

8) $\sqrt{5e^{0{,}02} + 2{,}03^2}$; [Ответ]

9) $\ln(0{,}09^3 + 0{,}99^3)$; [Ответ]

10) $\cos 2{,}36 \operatorname{arctg} 0{,}97 \cdot 3^{2{,}05}$; [Ответ]

11) $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$. [Ответ]

420. Найти производную dz/dt, если известно, что:

1) $z = e^{x^2+y^2}$, $x = a\cos t$, $y = a\sin t$; [Решение] [Ответ]

2) $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = a\sin t$, $y = a\cos t$; [Ответ]

3) $z = e^{xy}\ln(x + y)$, $x = t^3$, $y = 1 - t^3$; [Ответ]

4) $z = x^5 + 2xy - y^3$, $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{arctg} t$; [Решение] [Ответ]

5) $z = xy \operatorname{arctg} xy$, $x = t^2 + 1$, $y = t^3$; [Ответ]

6) $z = e^{2x-3y}$, $x = \operatorname{tg} t$, $y = t^2 - t$; [Ответ]

7) $z = x^y$, $x = \ln t$, $y = \sin t$; [Ответ]

8) $z = xy + xyu$, $x = \sin t$, $y = \ln t$, $u = e^t$; [Решение] [Ответ]

9) $z = \cos(2t + 4x^2 - y)$, $x = \dfrac{1}{t}$, $y = \dfrac{\sqrt{t}}{\ln t}$; [Ответ]

10) $z = x^2y^3u$, $x = t$, $y = t^2$, $u = \sin t$. [Ответ]

421. Найти производную по направлению функции

$$z = x^2 + y^2$$

в точке $M(1, 1)$. Рассмотреть случаи, когда направление составляет с осью Ox угол:

1) $\pi/3$; [Решение] [Ответ]

2) $\pi/6$; [Ответ]

3) $\pi/2$. [Ответ]

422. Найти производную по направлению биссектрисы первого координатного угла в точке $M(1, 1)$ функции $z = x^3y - 5xy^2 + 8$. [Ответ]

423. Найти производную по направлению биссектрисы первого координатного угла функции $z = \ln(e^x + e^y)$. [Ответ]

424. Найти производную функции

$$u = x^2 - 2xz + y^2$$

в точке $M(1, 2, -1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{MM_1}$, где M_1 — точка с координатами $(2, 4, -3)$. [Ответ]

425. Найти производную функции

$$u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2$$

в точке $M(2, 3, 1)$ по направлению:

1) радиуса-вектора точки M; [Ответ]

2) вектора $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$. [Ответ]

426. Найти градиент функции z в точке M:

1) $z = x^2 + 2y^2 - 5$, $M(2, -1)$; [Решение] [Ответ]

2) $z = 4 - x^2 - y^2$, $M(1, 2)$; [Ответ]

3) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$, $M(0, 3)$; [Ответ]

4) $z = (x - y)^2$, $M(1, 1)$; [Ответ]

5) $z = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$, $M(1, 1)$. [Ответ]

427. Найти градиент функции u:

1) $u = x^2yz^3$; [Решение] [Ответ]

2) $u = x^2 + y^2 - z^2$; [Ответ]

3) $u = e^{xy} - yz^2$; [Ответ]

4) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$. [Ответ]

428. Найти grad u и $|\operatorname{grad} u|$ в точке M:

1) $u = x^2 - y^2 + yz - x$, $M(1, 0, -1)$; [Решение] [Ответ]

2) $u = 3x^2 - xy^3 + xz - z^2$, $M(1, 2, 3)$; [Ответ]

3) $u = x^2 + y^2 - z^2$, $M(1, -1, 2)$; [Ответ]

4) $u = 4 - x^2 - y^2 + z^2$, $M(3, 2, 1)$; [Ответ]

5) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M(-1, 2, 0)$; [Ответ]

6) $u = xyz$, $M(3, -1, 2)$; [Ответ]

7) $u = z \sin(x - y)$, $M\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, 1\right)$; [Ответ]

8) $u = \frac{x + y}{z}$, $M(2, 0, 1)$; [Ответ]

9) $u = \operatorname{arctg}(x + 2y + z^2)$, $M(1, 1, 0)$. [Ответ]

6.1.2. Экономический профиль

429. Найти значение производственной функции Кобба — Дугласа

$$F(K, L) = 0{,}85K^{3/4}L^{1/3},$$

если величина капитала $K = 625$, а затраты труда $L = 216$. [Ответ]

430. Поток пассажиров z выражается функцией $z = x^2/y$, где x — число жителей; y — расстояние между городами. Найти частные производные и пояснить их смысл. [Решение]

431. Найти предельные полезности для следующих функций полезности:

1) логарифмической функции $u(x, y) = a_1 \ln(x - c_1) + a_2 \ln(y - c_2)$; [Ответ]

2) функции постоянной эластичности

$$u(x, y) = \frac{a_1}{1 - b_1}(x - c_1)^{1-b_1} + \frac{a_2}{1 - b_2}(y - c_2)^{1-b_2}.$$ [Решение] [Ответ]

432. Пусть

$$z = 2x^2y + 3xy^2 + x^3$$

производственная функция, где x — затраты живого труда; y — затраты овеществленного труда. Найти эластичности E_{zx} и E_{zy} в точке $(1, 1)$. [Ответ]

433. Найти эластичности функции Кобба — Дугласа $z = ax^\alpha y^\beta$. [Ответ]

434. Для функции $z = f(x, y)$ *коэффициентом эластичности замещения* называется величина

$$\sigma_{xy} = -\frac{d \ln \dfrac{x}{y}}{d \ln \dfrac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}}.$$

Найти коэффициент эластичности замещения:

1) для функции Кобба — Дугласа $z = ax^\alpha y^\beta$; [Решение] [Ответ]

2) функции с постоянной эластичностью замещения

$$z = e_0\left(e_1 x^{-\beta} + e_2 y^{-\beta}\right)^{-\frac{k}{\beta}}.$$ [Ответ]

6.2. Экстремум функции двух переменных

6.2.1. Общие задачи
6.2.2. Экономический профиль

6.2.1. Общие задачи

435. Найти экстремумы функций:

1) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$; [Решение] [Ответ]

2) $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$; [Ответ]

3) $z = y^2 - x^2 + xy - 2x - 6y$; [Ответ]

4) $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$; [Ответ]

5) $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 6$; [Ответ]

6) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$; [Ответ]

7) $z = 2xy - 4x - 2y$; [Ответ]

8) $z = xy(1 - x - y)$; [Ответ]

9) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$; [Ответ]

10) $z = x^3 - y^3 - 3xy$; [Ответ]

11) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$; [Ответ]

12) $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$; [Ответ]

13) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$; [Ответ]

14) $z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$; [Ответ]

15) $z = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x^2}{y} + y$; [Ответ]

16) $z = \dfrac{1 + 2x - 2y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$; [Ответ]

17) $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$; [Ответ]

18) $z = e^{x/2}(x + y^2)$; [Ответ]

19) $z = e^{x/2}(x + y^2)$; [Ответ]

20) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$; [Ответ]

21) $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$. [Ответ]

436. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в области D:

1) $z = x^2y(2-x-y)$, D — треугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x+y = 6$; [Решение] [Ответ]

2) $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$, D — замкнутый треугольник, ограниченный осями координат и прямой $x + y = -5$; [Ответ]

3) $z = x^2 + 3y^2 + x - y$, D — треугольник, определяемый неравенствами $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y - x \leqslant 1$; [Ответ]

4) $z = 3x + y - xy$, D — треугольник, ограниченный прямыми $y = x$, $y = 4$, $x = 0$; [Ответ]

5) $z = xy - x - 2y$, D — треугольник, ограниченный прямыми $x = 3$, $y = x$, $y = 0$; [Ответ]

6) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, D — треугольник, ограниченный прямыми $x - y + 1 = 0$, $x = 3$, $y = 0$; [Ответ]

7) $z = xy + x + y$, D — квадрат, задаваемый неравенствами $1 \leqslant x \leqslant 2$, $2 \leqslant y \leqslant 3$; [Ответ]

8) $z = 5x^2 - 3xy + y^2$, D — квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$; [Ответ]

9) $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$, D — прямоугольник $ABCD$ с вершинами $A(4, -3)$, $B(4, 2)$, $C(1, 2)$, $D(1, -3)$; [Ответ]

10) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, D — прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$; [Ответ]

11) $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$, D — прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 6$; [Ответ]

12) $z = x^3 + y^3 - 3xy$, D — прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 2$; [Ответ]

13) $z = x^2 + y^2$, D — ромб, определяемый неравенством $3|x| + 4|y| \leqslant 12$; [Ответ]

14) $z = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1$, D — ромб, определяемый неравенством

$$\frac{|x|}{7} + \frac{|y|}{2} \leqslant 1;$$ [Ответ]

15) $z = x^2 + 2xy - 10$, D — фрагмент параболы, ограниченный линиями $y = 0$, $y = x^2 - 4$; [Ответ]

16) $z = x^2/2 - xy$, D — фрагмент параболы, ограниченный линиями $y = 8$, $y = 2x^2$; [Ответ]

17) $z = \sin x + \sin y + \sin x + y$, D — прямоугольник, задаваемый неравенствами $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$; [Ответ]

18) $z = \sin x + \sin y + \sin x + y$, D — прямоугольник, задаваемый неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant 3\pi/2$; [Ответ]

19) $z = \cos x \cos y \cos(x + y)$, D — прямоугольник, задаваемый неравенствами $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$. [Ответ]

437. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в области D. На границе подозрительные на условный экстремум точки искать с помощью функции Лагранжа:

1) $z = x^2 + y^2 - 4x + 2y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 45$; [Решение] [Ответ]

2) $z = x + y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 4$; [Ответ]

3) $z = -x^2 - y^2 + 2x - 2y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 18$; [Ответ]

4) $z = xy$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 1$; [Ответ]

5) $z = 3xy$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 2$; [Ответ]

6) $z = -x^2 - y^2 + 4x - 4y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 72$; [Ответ]

7) $z = 1 - x^2 - y^2$, D: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1$; [Ответ]

8) $z = -x^2 - y^2 - 4x + 4y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 32$; [Ответ]

9) $z = -x^2 - y^2 + 4x + 2y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 20$; [Ответ]

10) $z = x^2 + y^2 - 2x + 2y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 18$; [Ответ]

11) $z = -x^2 - y^2 + 2x - 2y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 32$. [Ответ]

438. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = 6 - 4x - 3y$$

на окружности $x^2 + y^2 = 1$. [Ответ]

439. Найти расстояние между кривой и прямой:

1) $y = x^2$, $x - y - 5 = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $x^2 - y^2 = 3$, $y - 2x = 0$; [Ответ]

3) $9x^2 + 4y^2 = 36$, $3x + y - 9 = 0$; [Ответ]

4) $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y = 0$, $9x - 7y + 16 = 0$. [Ответ]

440. Найти кратчайшее расстояние от точки $M(1, 2, 3)$ до прямой

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}.$$ [Ответ]

6.2.2. Экономический профиль

441. На производстве изготавливается продукция двух видов в количестве x и y единиц. Цены продукции каждого вида составляют $P_1 = 8$ и $P_2 = 10$ ден. ед. за единицу продукции. Функция издержек имеет вид $C = x^2 + xy + y^2$. Найти максимум прибыли. [Решение] [Ответ]

442. Цены товаров двух видов равны $P_1 = 32$ и $P_2 = 24$ ден. ед. Определить, при каких количествах x и y продаж этих товаров прибыль будет максимальной, если функция издержек имеет вид

$$C = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + y^2.$$

[Ответ]

443. Определить, какие линейные размеры должен иметь открытый прямоугольный бассейн объёмом $V = 32\,\text{м}^2$, чтобы на облицовку его поверхности плиткой было затрачено минимальное количество средств. [Решение] [Ответ]

444. Определить, каковы должны быть наружные размеры открытого прямоугольного ящика с заданной толщиной стенок δ и вместимостью V, чтобы на его изготовление затрачивалось наименьшее количество материала. [Ответ]

445. Завод должен изготовить партию закрытых цилиндрических железных бочек заданного объема V. Какими выбрать радиус основания R и высоту H бочек, чтобы минимизировать затраты железа? [Ответ]

446. Вычислить, при каких радиусе основания R и высоте H на производство открытого цилиндрического стакана заданного объема V будет уходить минимальное количество стекла. [Ответ]

447. Золотой кулон имеет форму полого кругового конуса и должен иметь объём V. Чему должны быть равны радиус основания R и высота H кулона, чтобы затрачивать на его производство минимальное количество золота? [Ответ]

448. Молочный завод выпускает мороженое в вафельных стаканчиках, имеющих форму открытого кругового конуса. Какими должны быть радиус основания R и высота H стаканчика, чтобы на производство порции заданного объема V уходило как можно меньше вафли? [Ответ]

449. Палатка имеет форму цилиндра с насаженной на него конической верхушкой. При каких соотношениях между линейными размерами палатки для ее изготовления потребуется наименьшее количество материала при заданном объеме? [Ответ]

450. Требуется отгородить участок земли площадью S в форме равнобокой трапеции так, чтобы боковые стороны и одно из оснований были огорожены проволочной сеткой, а второе основание примыкало к длинной каменной стене. Какой должна быть форма участка, чтобы минимизировать затраты на покупку сетки? [Ответ]

451. Русла двух рек (в пределах некоторой области) приближенно представляют параболу $y = x^2$ и прямую $x - y - 2 = 0$. Требуется соединить данные реки прямолинейным каналом. Указать такие начальный и конечный пункты канала, чтобы минимизировать стоимость его строительства, которая тем больше, чем длиннее канал. [Указание] [Ответ]

Глава 7

Дифференциальные уравнения

7.1. Дифференциальные уравнения первого порядка
7.2. Решение уравнений первого порядка
7.3. Линейные уравнения второго порядка

7.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

452. Составить дифференциальные уравнения семейства линий:

1) $y = Cx$; [Решение] [Ответ]

2) $y = x^2 + Cx$; [Ответ]

3) $Cy = x^2 + y^2$; [Ответ]

4) $y = Ce^{2x}$; [Ответ]

5) $y^2 = 2Cx$; [Решение] [Ответ]

6) $y = \sqrt{1 - x^2} + C$; [Ответ]

7) $y = \sin(Cx)$; [Ответ]

8) $\ln \dfrac{x}{y} = 1 + Cy$; [Ответ]

9) $\ln y = C \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$; [Ответ]

10) $\sqrt{y} - \sqrt{x} = C$; [Ответ]

11) $(1 + x^2)(1 + y^2) = Cy^2$; [Ответ]

12) $y = Ce^{1-x^2}$; [Ответ]

13) $\arcsin \dfrac{y}{x} + x = C$. [Ответ]

453. Найти общее решение дифференциальных уравнений. В соответствующих случаях указать частное решение:

1) $y''' = \dfrac{6}{x^3}$; [Решение] [Ответ]

2) $y''' = e^{3x} + \sin^2 \dfrac{x}{2}$; [Ответ]

3) $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; [Ответ]

4) $y'' = 3\sin^2 x \cos x$, $y(0) = \dfrac{1}{3}$, $y'(0) = 0$; [Решение] [Ответ]

5) $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$; [Ответ]

6) $y^{(4)} = e^x - 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 1$; [Ответ]

7) $y''' \sin^4 x = \sin 2x$; [Ответ]

8) $\dfrac{y'''}{x} = \sin 3x$; [Ответ]

9) $y'' = \operatorname{arctg} x$. [Ответ]

7.2. Решение уравнений первого порядка

7.2.1. Общие задачи
7.2.2. Экономический профиль

7.2.1. Общие задачи

454. Найти общее решение дифференциального уравнения. В соответствующих случаях указать частное решение:

1) $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $(x^2-1)y' = 2xy^2$; [Ответ]

3) $x^2y' = 1 + \cos 2y$; [Ответ]

4) $y' = e^{x-y}$; [Ответ]

5) $dx - \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$; [Ответ]

6) $y' - 2xy - y = 0,\ y(0) = 1$; [Решение] [Ответ]

7) $y'\sin x = y\ln y,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$; [Ответ]

8) $2\sqrt{y}\,dx = dy,\ y(0) = 1$; [Ответ]

9) $y' = \dfrac{\sin y}{1+x^2},\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$; [Ответ]

10) $3x^2y\,dx + 2\sqrt{4-x^3}\,dy = 0$; [Ответ]

11) $e^{x+y}\,dx + y\,dy = 0$; [Ответ]

12) $xy' = \dfrac{y}{\ln x},\ y(e) = 1$; [Ответ]

13) $e^y(1+x^2)\,dy - 2x(1+e^y)\,dx = 0$; [Ответ]

14) $y' = y\ln y$; [Ответ]

15) $(2x+1)\,dy + y^2\,dx = 0,\ y(4) = 1$. [Ответ]

455. Найти общее решение дифференциального уравнения. В соответствующих случаях указать частное решение:

1) $x\,dy-(x+y)\,dx=0,\ y(1)=2;$ [Решение] [Ответ]

2) $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x},\ y(1)=1;$ [Решение] [Ответ]

3) $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}\,dy=0;$ [Ответ]

4) $(x^2+xy+y^2)\,dx-x^2\,dy=0;$ [Ответ]

5) $y'=\dfrac{y}{x}(1+\ln y-\ln x);$ [Ответ]

6) $x(x+2y)\,dx+(x^2-y^2)\,dy=0;$ [Ответ]

7) $xy'=y-2x-2\sqrt{xy-x^2};$ [Ответ]

8) $y'=\dfrac{x-y}{x-2y};$ [Ответ]

9) $y'=e^{-y/x}+\dfrac{y}{x},\ y(1)=0;$ [Ответ]

10) $(\sqrt{xy}-x)\,dy+y\,dx=0;$ [Ответ]

11) $y'=\dfrac{xy+y^2e^{-x/y}}{x^2};$ [Ответ]

12) $(x+2y+1)\,dx+(3-2x)\,dy=0;$ [Решение] [Ответ]

13) $(x-2)\,dx+(y-2x+1)\,dy=0;$ [Ответ]

14) $(6x+y-1)\,dx+(4x+y-2)\,dy=0;$ [Ответ]

15) $(3x-7y-3)y'+7x-3y-7=0;$ [Ответ]

16) $y'=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$ [Ответ]

456. Найти общее решение дифференциального уравнения. В соответствующих случаях указать частное решение:

1) $y' - y = e^x$; [Решение] [Ответ]

2) $y' = x + y$; [Ответ]

3) $y' + x^2 y = x^2$; [Ответ]

4) $xy' + y = 3$; [Ответ]

5) $x^2 y' = y^2 + xy$; [Решение] [Ответ]

6) $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x},\ y(1) = 0$; [Ответ]

7) $y' + \dfrac{3}{x} y = \dfrac{2}{x^3},\ y(1) = 1$; [Ответ]

8) $x^2 y' + 2xy = \ln x,\ y(1) = 2$; [Ответ]

9) $xy' - 3y = x^4 e^x,\ y(1) = e$; [Ответ]

10) $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$; [Ответ]

11) $y' + y = x\sqrt{y}$; [Ответ]

12) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$; [Ответ]

13) $(x + y^2)\, dy + dx = 0$; [Решение] [Ответ]

14) $xy' - y^2 \ln x = -y$; [Ответ]

15) $y' \sin x - y \cos x = 1,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; [Ответ]

16) $y\, dx + (4 \ln y - 2x - y)\, dy = 0$; [Ответ]

17) $y' + \dfrac{2y}{x} = 3x^2 \sqrt[4]{y^3},\ y(1) = 1$; [Ответ]

18) $y' = \dfrac{y}{x + y^2}$; [Ответ]

19) $(y' + y)(x^2 + 1) = e^{-x},\ y(0) = 1$; [Ответ]

20) $xy' + y = xy^2$. [Ответ]

7.2.2. Экономический профиль

457. Модель роста в условиях конкурентного рынка имеет вид

$$y' = mlp(y)y,$$

где $y = y(t)$ — объем продукции некоторой отрасли, реализованной к моменту времени t; m — норма инвестиций; l — норма акселерации; $p(y)$ — цена реализованной продукции. Найти выражение для объема реализованной продукции y, если известно, что кривая спроса $p(y)$ задается уравнением $p(y) = 2 - y$, $l = 2$, $m = 0{,}5$, $y(0) = 0{,}5$. [Решение] [Ответ]

458. Пусть национальный доход возрастает со скоростью, пропорциональной его величине, а дефицит в расходах правительства прямо пропорционален доходу. Найти функцию, описывающую изменение национального долга, если в начальный момент времени национальный доход был равен 100 млн ден. ед., а национальный долг — 50 млн ден. ед. [Решение] [Ответ]

459. Пусть торговой фирмой реализуется некоторая продукция, о которой в момент времени $t = 0$ из рекламы получили информацию x_0 человек из общего числа N потенциальных покупателей. Далее эта информация распространяется посредством общения людей. Функция $x(t)$, описывающая зависимость количества людей, знающих о продукции, от времени, называется *логистической функцией*. Сделаем предположение, что скорость роста количества людей, знающих о продукции, пропорциональна как числу осведомлённых в данный момент покупателей, так и числу неосведомленных покупателей. Получить представление для логистической функции. [Решение] [Ответ]

460. Доход $Y(t)$, полученный к моменту времени t некоторой отраслью, является суммой инвестиций $I(t)$ и величины потребления $C(t)$, т.е.

$$Y(t) = I(t) + C(t).$$

Пусть скорость увеличения дохода пропорциональна величине инвестиций, т.е.

$$bY'(t) = I(t),$$

где b — коэффициент капиталоемкости прироста дохода. Найти функцию дохода $Y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $C = 2t$, $b = 1/2$, $Y(0) = 2$. [Решение] [Ответ]

461. Пусть $y = y(t)$ — функция, характеризующая изменение национального дохода, $C(t)$ — функция, характеризующая непроизводственное потребление, прирост материальных оборотных средств, государственных материальных резервов, потери. Простейшая модель воспроизводства национального дохода имеет вид

$$y(t) = B\frac{dy}{dt} + C(t),$$

где B — коэффициент капиталоемкости национального дохода, т.е. отношение производственного накопления к приросту национального дохода. Найти функцию $y(t)$, если $C(t) = 2t + 1$, $B = 1/3$ и в начальный момент времени национальный доход составлял $5/9$. [Ответ]

462. Функция предложения промышленной продукции предприятия, являющаяся функцией цены предшествующего года, имеет вид

$$S = 3p - 8(t-1) + 2\frac{dp}{dt}.$$

Спрос на данный товар определяется ценой на промышленную продукцию этого года, и функция спроса имеет вид

$$q = -p + 7t - \frac{dp}{dt}.$$

Определить цену равновесия на товар, т.е. цену, при которой спрос равен предложению. [Ответ]

463. Пусть сумма A руб. положена в банк под $r\%$ годовых. Если начисление процентов осуществляется непрерывно, то закон изменения суммы $P(t)$ описывается дифференциальным уравнением

$$P' = \frac{r}{100}P.$$

Через какое время сумма вклада удвоится, если $r = 10$? [Решение] [Ответ]

464. Пусть $q = q(p)$ — функция, характеризующая изменение спроса на некоторую продукцию в зависимости от цены p. Найти эту функцию при условии, что эластичность постоянна и равна $E = -1/3$, а $q(1) = 1$. [Ответ]

7.3. Линейные уравнения второго порядка

7.3.1. Общие задачи
7.3.2. Экономический профиль

7.3.1. Общие задачи

465. Найти общее решение однородных дифференциальных уравнений:

1) $y'' - 5y' + 4y = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $y'' - 6y' + 9y = 0$; [Решение] [Ответ]

3) $y'' + 8y' + 25y = 0$; [Решение] [Ответ]

4) $y'' - 3y' - 4y = 0$; [Ответ]

5) $y'' + 4y' + 4y = 0$; [Ответ]

6) $y'' - 2y' + 2y = 0$; [Ответ]

7) $y'' - 5y' + 6y = 0$; [Ответ]

8) $y'' - 9y = 0$; [Ответ]

9) $y'' + 4y' = 0$; [Ответ]

10) $y'' + 2y' + 5y = 0$; [Ответ]

11) $y'' - y = 0$; [Ответ]

12) $y'' + y = 0$; [Ответ]

13) $y'' - 7y' + 10y = 0$; [Ответ]

14) $y'' + 10y' + 25y = 0$; [Ответ]

15) $y'' + 6y' + 10y = 0$; [Ответ]

16) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$; [Ответ]

17) $y''' - 8y = 0$; [Ответ]

18) $y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0$; [Ответ]

19) $y^{(4)} - 16y = 0$. [Ответ]

466. Решить уравнения Эйлера:

1) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$; [Ответ]

3) $xy'' + y' = 0$; [Ответ]

4) $xy'' + 4xy' + 2y = 0$; [Ответ]

5) $(2x+1)^2y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0$; [Решение] [Ответ]

6) $(x+2)^2y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0$. [Ответ]

467. Проинтегрировать уравнения методом вариации произвольных постоянных:

1) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$; [Решение] [Ответ]

2) $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2+2x+2}{x^3}$; [Ответ]

3) $y'' - y = 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$; [Ответ]

4) $y'' + y = \operatorname{tg} x$; [Ответ]

5) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$; [Ответ]

6) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$; [Ответ]

7) $y'' - 2y = 4x^2e^{x^2}$; [Ответ]

8) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$; [Ответ]

9) $y'' - y' = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; [Ответ]

10) $y''' + y' = \operatorname{tg} x$. [Ответ]

468. Проинтегрировать уравнения со специальной правой частью:

1) $y'' + 2y' + y = e^x$; [Решение] [Ответ]

2) $y'' + y' - 2y = 6x^2$; [Ответ]

3) $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$; [Ответ]

4) $y'' + 4y' - 5y = 1$; [Ответ]

5) $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$; [Ответ]

6) $y'' + 3y' - 4y = (x+1)e^x$; [Решение] [Ответ]

7) $y'' + 2y' + y = (x+3)e^{-x}$; [Ответ]

8) $2y'' + 3y' + y = (1-2x)e^{-x}$; [Ответ]

9) $y'' + 4y' + 4y = (1-4x)e^{-2x}$; [Ответ]

10) $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$; [Решение] [Ответ]

11) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$; [Ответ]

12) $y'' + 4y = 3\sin 2x$; [Ответ]

13) $y'' + y = x\cos x$; [Ответ]

14) $y'' + 9y = \dfrac{5}{4}\sin 3x + x\cos 3x$; [Ответ]

15) $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$; [Ответ]

16) $5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x}\sin\dfrac{4}{5}x$; [Ответ]

17) $y'' - y' = x^2 - e^{3x}$; [Ответ]

18) $y'' + y = e^x + \sin x$; [Ответ]

19) $y'' - 3y' + 2y = \sin x \sin 2x$; [Ответ]

20) $y'' + y' = \cos^2 x + e^x + x^2 + \dfrac{1}{2}$. [Ответ]

469. Решить задачу Коши:

1) $y'' - 4y' + 3y = 0,\ y(0) = 6,\ y'(0) = 10;$ [Решение] [Ответ]

2) $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$ [Ответ]

3) $y'' + 4y' = 0,\ y(0) = 7,\ y'(0) = 8;$ [Ответ]

4) $4y'' + 4y' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0;$ [Ответ]

5) $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3;$ [Ответ]

6) $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3,\ y(0) = \dfrac{4}{3},\ y'(0) = \dfrac{1}{27};$ [Ответ]

7) $y'' + 4y = 4(\cos 2x + \sin 2x),\ y(\pi) = \pi,\ y'(\pi) = 2\pi;$ [Ответ]

8) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0;$ [Ответ]

9) $y'' + y = x,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0;$ [Ответ]

10) $y'' - 3y' + 2y = x^2e^{3x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$ [Ответ]

7.3.2. Экономический профиль

470. Установить зависимость цены P от времени t при условии рыночного равновесия, если функции спроса $D(t)$ и предложения $S(t)$ определяются формулами:

1) $D(t) = 2P'' - 2P' - 3P + 10$, $S(t) = 3P'' + 2P' + 5P + 2$; [Ответ]

2) $D(t) = 3P'' - P' - 5P + 3$, $S(t) = 4P'' + P' - 4P + 2$; [Ответ]

3) $D(t) = 2P'' - 3P' - P + 7$, $S(t) = 4P'' + 2P' + P + 3$. [Ответ]

471. Рассмотрим экономическую модель паутинообразного типа с запасами товаров, в которой скорость изменения цены P зависит от величины запаса. Если спрос и предложение являются линейными функциями цены, т.е.

$$D = \alpha + aP, \quad S = \beta + bP,$$

а λ — постоянная, определяющая скорость реакции (т.е. изменения цены при изменении запасов товара), то процесс изменения цены описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2P}{dt^2} + \lambda(b - a)P = \lambda(\alpha - \beta).$$

Найти закон изменения цены во времени при условии, что $a < 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$. [Решение] [Ответ]

Глава 8

Ряды

8.1. Числовые ряды
8.2. Функциональные ряды

8.1. Числовые ряды

472. Написать формулу общего члена ряда:

1) $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots$; [Решение] [Ответ]

2) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\ldots$; [Ответ]

3) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\ldots$; [Ответ]

4) $1+\frac{4}{2}+\frac{9}{6}+\frac{16}{24}+\ldots$; [Ответ]

5) $1-1+1-1+\ldots$; [Ответ]

6) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots$; [Ответ]

7) $\frac{1}{2+3}+\frac{1}{4+3}+\frac{1}{8+3}+\frac{1}{16+3}+\ldots$; [Ответ]

8) $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 4}+\ldots$; [Ответ]

9) $1+2\frac{1}{4}+2\frac{7}{9}+3\frac{1}{16}+3\frac{6}{25}+\ldots$. [Ответ]

473. Найти сумму ряда:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$; [Ответ]

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$; [Решение] [Ответ]

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$; [Ответ]

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; [Ответ]

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; [Ответ]

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-2}{(n+1)!}$; [Ответ]

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$. [Ответ]

474. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда. В соответствующем случае сделать вывод о сходимости ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$; [Решение] [Ответ]

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$; [Ответ]

4) $\sum_{n=1}^{\infty} 3$; [Ответ]

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n}$; [Ответ]

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n}$; [Ответ]

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$; [Ответ]

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos \dfrac{1}{n^2}$. [Ответ]

475. Пользуясь признаками сравнения, исследовать ряд на сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot 2^n}$; [Решение] [Ответ]

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{1+2^{2n}}$; [Ответ]

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$; [Ответ]

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2)^n}$; [Ответ]

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2-1}{3n^3+4n^2-1}$; [Решение] [Ответ]

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{n}}{n(n+2)}$; [Ответ]

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}$; [Ответ]

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+2^n}$; [Ответ]

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(3^n+1)}$; [Ответ]

11) $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\ldots$; [Ответ]

12) $\frac{1}{2^3}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{4^3}+\ldots$; [Ответ]

13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n}$; [Ответ]

14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$; [Ответ]

15) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$; [Ответ]

16) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$; [Ответ]

17) $\sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin\frac{\pi}{n^2}$. [Ответ]

476. Пользуясь признаком Д'Аламбера, исследовать ряд на сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n!}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{n^5}$; [Ответ]

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n(3n-1)}$; [Ответ]

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{2^n\sqrt{2n+3}}$; [Ответ]

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n(2n+1)}{3^n}$; [Ответ]

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$; [Ответ]

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$; [Ответ]

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\,2^n}{n^n}$; [Ответ]

9) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{6}{27} + \dfrac{8}{81} + \ldots$; [Ответ]

10) $1 + \dfrac{3}{2\cdot 3} + \dfrac{3^2}{2^2\cdot 5} + \dfrac{3^3}{2^3\cdot 7} + \ldots$. [Ответ]

477. Пользуясь признаком Коши, исследовать ряд на сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n}{3n+5}\right)^{n}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n-1}{2n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$; [Ответ]

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$; [Ответ]

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n^n}$; [Ответ]

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^3}$; [Ответ]

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{3n-1}{2n+10}\right)^{n}$; [Ответ]

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$; [Ответ]

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}\right)^{n}$; [Ответ]

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; [Ответ]

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{n}$. [Ответ]

478. Пользуясь интегральным признаком, исследовать ряд на сходимость:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^2 n}$; [Ответ]

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{1+n^2}$; [Ответ]

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^4-1}$; [Ответ]

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$; [Ответ]

6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$; [Ответ]

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$. [Ответ]

479. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n^2}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$; [Решение] [Ответ]

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n(n+1)/2}}{2^n}$; [Ответ]

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{3n+1}{2n-1}\right)^{n}$; [Ответ]

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{n+2}{n^2+4}$; [Ответ]

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{5n-1}{n!}$; [Ответ]

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{2n+2^n}{n!}$; [Ответ]

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n(n+1)/2}}{2^n}$; [Ответ]

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{\ln n+2}}$; [Ответ]

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$; [Ответ]

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{\ln(n+1)}$; [Ответ]

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}}$; [Ответ]

13) $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}-\ldots$; [Ответ]

14) $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$; [Ответ]

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n(n^2+1)}$; [Ответ]

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+7)}{3n^2+7n+1}$; [Ответ]

17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}$; [Ответ]

18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n^3}$. [Ответ]

8.2. Функциональные ряды

480. Найти область сходимости функционального ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{x^{2n+1}}$; [Решение] [Ответ]

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2 x^n}$; [Ответ]

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lg^n x}{n}$; [Ответ]

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi x}{4}$; [Ответ]

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$; [Ответ]

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$; [Ответ]

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$; [Ответ]

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$; [Ответ]

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x(x+n)}{n}\right)^n$; [Ответ]

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+1}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^n$; [Ответ]

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$; [Ответ]

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3-x^2)^n$; [Ответ]

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2^n}$; [Ответ]

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\sin\dfrac{\pi}{x^n}$. [Ответ]

481. Найти область сходимости степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!(x-3)^n$; [Ответ]

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n^2}$; [Ответ]

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n\cdot 5^n}$; [Ответ]

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$; [Ответ]

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n x^n$; [Решение] [Ответ]

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2(x+3)^n}{n!}$; [Ответ]

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{n(5^n+1)}$; [Ответ]

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3-x)^n}{4^{n-1}}$; [Ответ]

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n+1}$; [Ответ]

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$; [Ответ]

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$; [Ответ]

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3-x)^{2n-1}}{3^{2n}(3n+2)}$; [Ответ]

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1}x^{2n-1}}{4n-3}$; [Ответ]

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^2(x+4)^n}{2n^2-3}$; [Ответ]

16) $\sum_{n=1}^{\infty}(2+3x)^n$; [Ответ]

17) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$; [Ответ]

18) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(5-2x)^n}{2n+1}$; [Ответ]

19) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(x+1)^n$; [Ответ]

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}(2-x)^n$. [Ответ]

482. Разложить функции в ряд Маклорена и найти область сходимости полученного ряда:

1) $f(x)=2^x$; [Решение] [Ответ]

2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x}}$; [Ответ]

3) $f(x)=x^2e^{-3x}$; [Ответ]

4) $f(x)=\sin x^2$; [Ответ]

5) $f(x)=\sin^2 x$; [Ответ]

6) $f(x)=x^2\cos 3x$; [Решение] [Ответ]

7) $f(x)=\ln(1+2x^2)$; [Ответ]

8) $f(x)=\ln\sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}}$; [Ответ]

9) $f(x)=\ln(5+2x)$; [Ответ]

10) $f(x) = \ln(x^2 + 5x + 6)$; [Ответ]

11) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$; [Ответ]

12) $f(x) = \ln(6 + x - x^2)$; [Ответ]

13) $f(x) = \dfrac{1}{3 + 2x}$; [Ответ]

14) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 + 3x + 2}$; [Ответ]

15) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 4x + 3}$; [Ответ]

16) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$; [Ответ]

17) $f(x) = \sqrt[3]{27 + x}$. [Ответ]

483. Разложить функции в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти область сходимости полученного ряда:

1) $f(x) = \ln x,\ x_0 = 1$; [Решение] [Ответ]

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ x_0 = -1$; [Ответ]

3) $f(x) = e^x,\ x_0 = -2$; [Ответ]

4) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1},\ x_0 = 2$; [Ответ]

5) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 4$; [Ответ]

6) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{2}$; [Ответ]

7) $f(x) = \ln \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2},\ x_0 = -1$. [Ответ]

Решения и указания

Глава 1. Линейная алгебра

Решение задачи 1.1

По определению операций суммы матриц и произведения матрицы на число

$$2A-4B=2\begin{pmatrix}-4&0\\4&-2\\-5&3\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}5&-3\\4&-4\\7&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&0\\8&-4\\-10&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}20&-12\\16&-16\\28&12\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-8-20&0+12\\8-16&-4+16\\-10-28&6-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-28&12\\-8&12\\-38&-6\end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 2.1

По определению произведения матриц

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 0 + 3\cdot 3 + 1(-1) & 2\cdot 3 + 3\cdot 5 + 1(-2) \\ -2\cdot 0 - 1\cdot 3 - 2(-1) & -2\cdot 3 - 1\cdot 5 - 2(-2) \\ 0\cdot 0 + 3\cdot 3 - 5(-1) & 0\cdot 3 + 3\cdot 5 - 5(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ -1 & -7 \\ 14 & 25 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 3.1

В данном случае имеем произведение вектора-строки на вектор-столбец:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 3(-2) + 3(-5) + (-2)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 5.1

Пользуясь свойством ассоциативности умножения матриц, начнем с поиска произведения первой и второй матриц:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-3)+0\cdot 4 & 3\cdot 0+0(-2) \\ 0(-3)+(-1)4 & 0\cdot 0+(-1)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Домножим результат на третью матрицу справа:

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9(-1)+0(-1) & -9(-3)+0(-1) \\ -4(-1)+2(-1) & -4(-3)+2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 27 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 6.11

Находим квадрат матрицы A:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 0 & -10 \\ -8 & 28 & 10 \\ 10 & 25 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем значение матричного многочлена:

$$\begin{aligned} f(A) &= A^2 + 4A - 6E = \\ &= \begin{pmatrix} 26 & 0 & -10 \\ -8 & 28 & 10 \\ 10 & 25 & 3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -20 & -10 \\ -16 & 38 & 18 \\ -6 & 29 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 7.1

Находим матрицу, транспонированную к A:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AA^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + 0\cdot 0 & 3\cdot 4 + 0\cdot 2 & 3\cdot 1 + 0(-1) \\ 4\cdot 3 + 2\cdot 0 & 4\cdot 4 + 2\cdot 2 & 4\cdot 1 + 2(-1) \\ 1\cdot 3 + (-1)0 & 1\cdot 4 + (-1)2 & 1\cdot 1 + (-1)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 3 \\ 12 & 20 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + 4\cdot 4 + 1\cdot 1 & 3\cdot 0 + 4\cdot 2 + 1(-1) \\ 0\cdot 3 + 2\cdot 4 + (-1)1 & 0\cdot 0 + 2\cdot 2 + (-1)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 8.1

Согласно определению

$$\begin{vmatrix} 8 & -8 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = 8(-3) - (-7)(-8) = -24 - 56 = -80.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 9.1

Вычисляя определитель, получаем, а затем решаем уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2x+1)2 - 3(x+5) = 0, \quad x - 13 = 0, \quad x = 13.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 10.1

Применим правило треугольников (см. рис. 1.3):

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2(-2)4 + 0 \cdot 3 \cdot 3 + 3(-3)(-3) - \\ - 3(-2) \cdot 3 - 0(-3) \cdot 4 - 2 \cdot 3(-3) = \\ = -16 + 0 + 27 + 18 + 0 + 18 = 47.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 11.1

Разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} \boxed{2} & 0 & \boxed{3} \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$2\Big(7\cdot 6-(-3)(x-3)\Big)+3\Big((-1)(-3)-5\cdot 7\Big)=0,$$

$$2(3x+33)+3(-32)=0, \quad 6x-30=0, \quad x=5.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 12.1

Вторая строка содержит один нуль и единицу. Пользуясь теоремой Лапласа, будем раскладывать определитель по элементам этой строки, предварительно обратив в нуль все ее элементы, кроме -1, путём элементарных преобразований. Для этого, поочередно домножая четвертый столбец на 4 и -2, будем добавлять результат соответственно к первому и третьему столбцам:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -10 & -2 & 6 & -2 \\ -2 & -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -11 & 2 & 4 \\ -10 & -2 & 6 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -11 & 2 & 4 \\ -10 & -2 & 6 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Вынесем из второй строки -2, обратим в нуль все элементы второго столбца, кроме единицы, и разложим определитель по элементам этого столбца:

$$D = 2 \begin{vmatrix} -11 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -21 & 0 & 10 \\ 5 & 1 & -3 \\ 13 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -21 & 10 \\ 13 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\Big((-21)(-6) - 13 \cdot 10\Big) = 2(126 - 130) = -8.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 13.1

Из первой строки вычтем сумму четвертой и пятой строк, а из второй — сумму третьей и четвертой строк. Обозначим исходный определитель через Δ. Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3)1 \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(1+18) = -57.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 14.1

Обозначим данный определитель через Δ и представим его в виде суммы двух других определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ 0+n & 0+n & 0+n & \dots & 0+n & n+n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}.$$

Первый из этих определителей треугольный, потому он равен произведению диагональных элементов, т.е.

$$n!.$$

Второй определитель равен нулю, так как его первая и последняя строки пропорциональны. Значит,

$$\Delta = n! + 0 = n!.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 14.2

Данный определитель именуется *определителем Вандермонда*. Для его вычисления из каждой строки, начиная с последней, следует поочередно вычесть предыдущую строку, умноженную на x_1, а затем разложить полученный определитель по первому столбцу. [Вернуться к условию]

Решение задачи 15.1

Обозначим данную матрицу A. Применим формулу (1.7) для вычисления обратной матрицы для матрицы второго порядка:

$$A^{-1} = \frac{1}{3(-5) - 6(-1)} \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{5}{9} + 6\left(-\frac{1}{9}\right) & 3 \cdot \frac{2}{3} + 6\left(-\frac{1}{3}\right) \\ -1 \cdot \frac{5}{9} + (-5)\left(-\frac{1}{9}\right) & -1 \cdot \frac{2}{3} + (-5)\left(-\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{3} - \frac{2}{3} & 2 - 2 \\ -\frac{5}{9} + \frac{5}{9} & -\frac{2}{3} + \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 16.1

Обозначим данную матрицу через A и вычислим её определитель:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & \boxed{-1} & -4 \\ 1 & \boxed{-1} & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$
$$= (-4)(-2) - 2 \cdot 5 = 8 - 10 = -2.$$

Определитель отличен от нуля, поэтому обратная матрица существует.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2,$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 - 2) = 4,$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2.$$

Заметив, что знаки алгебраических дополнений чередуются, сокращаем выкладки:

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$
$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Присоединённая матрица A^* представляет собой транспонированную матрицу алгебраических дополнений:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 4 & -2 & -9 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (1.6)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 4 & -2 & -9 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 \\ -4 & 2 & 9 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку:

$$AA^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 \\ -4 & 2 & 9 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -10+4+8 & 10-2-8 & 25-9-16 \\ -2+4-2 & 2-2+2 & 5-9+4 \\ -4+0+4 & 4+0-4 & 10+0-8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = E.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 18.9

Запишем уравнение в виде $AXB = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 32 & 2 \\ -3 & -33 \end{pmatrix}.$$

Умножаем это уравнение слева на A^{-1} и справа на B^{-1}: $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Находим A^{-1} и B^{-1} по формуле (1.7):

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу X:

$$\begin{aligned} X = A^{-1}CB^{-1} &= \frac{1}{15}\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32 & 2 \\ -3 & -33 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{15\cdot 7}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 126 & -28 \\ 21 & -63 \end{pmatrix} = \frac{1}{15\cdot 7}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\cdot 7\begin{pmatrix} 18 & -4 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 & -4 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 60 & -30 \\ 15 & -45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 19.33

Будем приводить данную матрицу к ступенчатому виду, выполняя над ней элементарные преобразования и вычёркивая нулевые ряды:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ \boxed{3} & -4 & -3 & 2 & 3 \\ \boxed{-3} & -3 & 1 & 0 & -1 \\ \boxed{-3} & 8 & 11 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Разделим последнюю строку на 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & \boxed{2} & 4 \\ 3 & -4 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -2 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 2 & 4 & \boxed{2} & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-6} & -4 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{3} & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученная ступенчатая матрица имеет три строки. Значит, искомый ранг равен 3.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 20.1

Вычисляем определитель основной матрицы данной системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Чтобы применить формулы Крамера, вычисляем определители (1.14):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 15 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 = -15, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 15 \end{vmatrix} = 15 - 0 = 15.$$

Тогда $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-15}{-3} = 5$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{15}{-3} = -5$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 20.11

Находим определитель основной матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 5 \\ 13 & -10 & 1 \\ \boxed{2} & \boxed{-2} & \boxed{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 11 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 11 & -8 \end{vmatrix} = 16 - 44 = -28.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение. Вычислим определители (1.14):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 15 & -6 & \boxed{5} \\ 32 & -10 & \boxed{1} \\ 5 & -2 & \boxed{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 4 & 0 \\ 27 & -8 & 0 \\ 5 & -2 & \boxed{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 27 & -8 \end{vmatrix} = 80 - 108 = -28,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & 15 & \boxed{5} \\ 13 & 32 & \boxed{1} \\ 2 & 5 & \boxed{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -10 & 0 \\ 11 & 27 & 0 \\ 2 & 5 & \boxed{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 11 & 27 \end{vmatrix} = -54 + 110 = 56,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & \boxed{-6} & 15 \\ 13 & \boxed{-10} & 32 \\ 2 & \boxed{-2} & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \\ 2 & \boxed{-2} & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 14 = 28.$$

Тогда

$$x = \frac{-28}{-28} = 1, \quad y = \frac{56}{-28} = -2, \quad z = \frac{28}{-28} = -1.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 20.31

Воспользоваться тем, что определитель системы — это определитель Вандермонда, рассмотренный в задаче 14.2. [Вернуться к условию]

Решение задачи 21.17

Выполним прямой ход метода Гаусса с помощью элементарных преобразований расширенной матрицы системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -3 & 2 & -5 \\ \boxed{-4} & 7 & -6 & 7 \\ \boxed{-2} & 2 & 1 & 11 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & 6 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Отсюда находим:

$$z = 3, \quad y = -3 + 2z = -3 + 2 \cdot 3 = 3,$$
$$x = \frac{-5 - 2z + 3y}{2} = \frac{-5 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Итак, $x = -1$, $y = 3$, $z = 3$ — решение данной системы.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 21.18

Будем оперировать с расширенной матрицей данной системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & -2 \\ \boxed{}1 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -9 & -18 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & \boxed{}-3 & -6 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Выполнив элементарные преобразования, мы привели одно из уравнений к виду $0 = -1$. Значит, система несовместна.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 21.35

Выполним прямой ход метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 15 & \boxed{-4} & -5 \\ 2 & 7 & \boxed{3} & -21 \\ 9 & 10 & \boxed{7} & -32 \\ 3 & 5 & \boxed{1} & -10 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 25 & 35 & 0 & -45 \\ -7 & -8 & 0 & 9 \\ -12 & -25 & 0 & 38 \\ 3 & 5 & 1 & -10 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{5} & 7 & 0 & -9 \\ \boxed{-35} & -40 & 0 & 45 \\ \boxed{-60} & -125 & 0 & 190 \\ 3 & 5 & 1 & -10 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 0 & -9 \\ 0 & 9 & 0 & -18 \\ 0 & -41 & 0 & 82 \\ 3 & 5 & 1 & -10 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 0 & -9 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & -10 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & -10 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & -10 \end{array}\right).$$

Осуществим обратный ход:

$$\begin{aligned} &y = -2, \\ &x = \frac{-9 - 7y}{5} = \frac{-9 + 14}{5} = 1, \\ &z = -10 - 5y - 3x = -10 + 10 - 3 = -3. \end{aligned}$$

Итак, $x = 1$, $y = -2$, $z = -3$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 21.50

Применяем элементарные преобразования к расширенной матрице системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & -3 & 1 \\ \boxed{1} & 4 & -1 & -2 & -2 \\ \boxed{1} & -4 & 3 & -2 & -2 \\ \boxed{1} & -8 & 5 & -2 & -2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & -3 & 1 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & -7 & 3 & \boxed{1} & -3 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Объявляем неизвестную x_2 свободной и обозначаем через α. Получаем:

$$x_3 = 2\alpha,$$
$$x_4 = -3 - 5x_2 + 3x_3 = -3 - 5\alpha + 6\alpha = -3 + \alpha,$$
$$x_1 = 1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 + \alpha - 4\alpha - 9 + 3\alpha = -8.$$

Итак, $x_1 = -8$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 2\alpha$, $x_4 = -3 + \alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 22.17

Применим элементарные преобразования к расширенной матрице системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & 10 & -4 & 15 & -13 \\ \boxed{6} & 13 & -1 & 9 & 2 \\ \boxed{24} & 59 & -11 & 57 & -20 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 10 & -4 & 15 & -13 \\ 0 & -7 & 7 & -21 & 28 \\ 0 & -21 & 21 & -63 & 84 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 10 & -4 & 15 & -13 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 10 & -4 & 15 & -13 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 + x_2 + 3x_4, \\ x_1 &= -\frac{13}{3} - \frac{10}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 - 5x_4 = \\ &= -\frac{13}{3} - \frac{10}{3}x_2 + \frac{4}{3}(4 + x_2 + 3x_4) - 5x_4 = 1 - 2x_2 - x_4. \end{aligned}$$

Обозначив свободные неизвестные x_2 и x_4 через α и β, получим общее решение системы:

$$x_1 = 1 - 2\alpha - \beta,\ x_2 = \alpha,\ x_3 = 4 + \alpha + 3\beta,\ x_4 = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Придавая параметрам α и β некоторые вещественные значения, мы будем получать частные решения системы. Положив, например, $\alpha = \beta = 0$, получим частное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 24.1

Обозначим ежедневный объём выпуска продукции каждого типа через x_1, x_2 и x_3. Тогда в соответствии с таблицей получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + 3x_2 + 2x_3 = 1\,650, \\ \boxed{3x_1} + 11x_2 + 9x_3 = 6\,400, \\ \boxed{x_1} + 5x_2 + 8x_3 = 4\,150. \end{cases}$$

Будем решать ее методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1\,650, \\ \boxed{2x_2} + 3x_3 = 1\,450, \\ \boxed{2x_2} + 6x_3 = 2\,500, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1\,650, \\ 2x_2 + 3x_3 = 1\,450, \\ 3x_3 = 1\,050. \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$x_3 = 350, \quad x_2 = \frac{1\,450 - 3 \cdot 350}{2} = 200, \quad x_1 = 1\,650 - 3 \cdot 200 - 2 \cdot 350 = 350.$$

Итак, необходимо выпустить 350 единиц продукции первого типа, 200 второго и 350 единиц продукции третьего типа.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 25.1

Подвергнем элементарным преобразованиям расширенную матрицу $(E - A|Y)$ соотношений баланса (1.17):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-0{,}04 & -0{,}25 & 209 \\ -0{,}18 & 1-0{,}16 & 516 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}96 & -0{,}25 & 209 \\ -0{,}18 & 0{,}84 & 516 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{96} & -25 & 20\,900 \\ \boxed{-3} & 14 & 8\,600 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 423 & 296\,100 \\ -3 & 14 & 8\,600 \end{array}\right).$$

Отсюда имеем: $x_2 = 700$, $x_1 = \dfrac{14x_2 - 8600}{3} = \dfrac{1200}{3} = 400$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 27.1

Выпишем расширенную матрицу $(E - A|Y)$ системы 1.17, содержащей соотношения баланса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0{,}96 & -0{,}10 & -0{,}05 & -0{,}14 & 392 \\ -0{,}04 & 0{,}97 & -0{,}06 & -0{,}09 & 456 \\ -0{,}10 & -0{,}11 & 0{,}95 & -0{,}10 & 574 \\ -0{,}06 & -0{,}07 & -0{,}11 & 0{,}93 & 392 \end{array}\right).$$

Решая эту систему на компьютере, находим: $X = (600, 600, 800, 600)$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 28

Очевидно, что $\mathbf{q} = -\sqrt{5}\mathbf{p}$. Тогда по замечанию 1.18 векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ коллинеарны. Поскольку коэффициент $-\sqrt{5} < 0$, то $\mathbf{p} \not\uparrow\downarrow \mathbf{q}$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 31

Пусть начало вектора **a** совпадает с точкой $A(x, y, z)$. Тогда

$$\begin{cases} 0 - x = 3, \\ 1 - y = 1, \\ -1 - z = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3, \\ y = 0, \\ z = -3. \end{cases}$$

Значит, начало вектора — это точка $A(-3, 0, -3)$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 40

Проверим, будут ли параллельны стороны AB и CD. Находим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (1-3, 2-(-1), -1-2) = (-2, 3, -3),$$
$$\overrightarrow{CD} = (3-(-1), -5-1, 3-(-3)) = (4, -6, 6).$$

Так как $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$, следовательно, четырехугольник $ABCD$ является трапецией.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 45.4

Имеем:

$$(3\mathbf{a}+2\mathbf{b})^2 = 9\mathbf{a}^2 + 12\mathbf{ab} + 4\mathbf{b}^2 = 9|\mathbf{a}|^2 + 12|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) + 4|\mathbf{b}|^2 = \\ = 36 + 60 + 100 = 196.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 58

Первый способ. Находим векторы, входящие в искомое скалярное произведение:

$$2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = 2(4, -2, -4) - 3(6, -3, 2) = (-10, 5, -14),$$
$$\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = (4, -2, -4) + 2(6, -3, 2) = (16, -8, 0).$$

Вычисляем скалярное произведение:

$$(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) = (-10, 5, -14)(16, -8, 0) = -160 - 40 + 0 = -200.$$

Второй способ. Вычислим искомое скалярное произведение, не находя векторов $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ и $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, а раскрывая скобки с учётом свойств скалярного произведения:

$$\begin{aligned}(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) &= 2\mathbf{a}^2 + 4\mathbf{ab} - 3\mathbf{ba} - 6\mathbf{b}^2 = 2\mathbf{a}^2 + \mathbf{ab} - 6\mathbf{b}^2 = \\ &= 2(16 + 4 + 16) + (24 + 6 - 8) - 6(36 + 9 + 4) = \\ &= 2 \cdot 36 + 22 - 6 \cdot 49 = 72 + 22 - 294 = -200.\end{aligned}$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 64

Найдем векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$, образующие искомый угол B:

$$\overrightarrow{BA} = \Big(-1-(-4), -2-(-2), 4-0\Big) = (3,0,4),$$
$$\overrightarrow{BC} = \Big(3-(-4), -2-(-2), 1-0\Big) = (7,0,1).$$

Следовательно,

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|} = \frac{3\cdot 7+0\cdot 0+4\cdot 1}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}\,\sqrt{7^2+0^2+1^2}} = \frac{25}{\sqrt{25}\,\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \pi/4$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 74.1

С помощью элементарных преобразований найдём ранг матрицы данной системы векторов:

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & \boxed{-2} \\ 1 & -3 & \boxed{1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & -11 & 0 \\ 1 & -3 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

Полученная ступенчатая матрица содержит 2 строки. Значит, ранг матрицы данной системы векторов равен 2. Таким образом, число векторов системы равно рангу матрицы системы. По теореме 1.21 такая система является линейно независимой.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 75.1

Вычислим ранг матрицы данной системы векторов. Так как ранг матрицы не меняется при транспонировании, то мы можем располагать векторы системы как в виде строк, так и в виде столбцов. В последнем случае, например, будем иметь:

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 15 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 2 & -1 \\ \boxed{-2} & 1 & -1 \\ \boxed{-1} & 5 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{-3} & 1 \\ 0 & \boxed{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, ранг матрицы равен 2, а в качестве её базисного минора можно, например, взять минор, образованный строками 1 и 2 и столбцами 1 и 2. Тогда по теореме 1.22 ранг данной системы векторов также равен 2, а в качестве её базиса можно взять систему $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, соответствующую выбранному нами базисному минору.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 76.1

Путём элементарных преобразований найдём какой-либо базисный минор матрицы данной системы векторов:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 9 & -1 & -4 & 2 \\ \boxed{-1} & -6 & 5 & 2 & 0 \\ \boxed{-1} & -3 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & -15 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & -12 & -1 & 6 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & \boxed{6} & 3 & -2 \\ 0 & -4 & \boxed{-1} & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -29 & 0 & 21 & -20 \\ 0 & -4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен количеству векторов в данной системе, и в силу теоремы 1.21 система линейна независима. Базисный минор матрицы A образован первыми тремя её столбцами. Выберем единичные векторы $\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$ и $\mathbf{e}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$, соответствующие столбцам, не вошедшим в базисный минор. Достроим с их помощью матрицу A до квадратной матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & -6 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что эта матрица является невырожденной, поэтому, согласно следствию 1.4, векторы, составляющие её строки, являются линейно независимыми и образуют базис пространства $\mathbb{R}^5$.

Итак, чтобы дополнить систему $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ до базиса, достаточно добавить к ней векторы

$$\mathbf{a}_4 = \mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1, 0), \quad \mathbf{a}_5 = \mathbf{e}_5 = (0, 0, 0, 0, 1).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 77.11

Представим вектор $\mathbf{x}$ в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ и $\mathbf{b}_3$:

$$\beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2 + \beta_3\mathbf{b}_3 = \mathbf{x}.$$

Полученное равенство равносильно системе линейных уравнений

$$\begin{cases} 2\beta_1 + 6\beta_2 + 2\beta_3 = 10, \\ 2\beta_1 + 3\beta_2 - \beta_3 = 4, \\ -5\beta_1 - 9\beta_2 + 2\beta_3 = -12. \end{cases}$$

Осуществим прямой ход метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & \boxed{2} & 10 \\ 2 & 3 & \boxed{-1} & 4 \\ -5 & -9 & 2 & -12 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{6} & 12 & 0 & 18 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ \boxed{-1} & -3 & 0 & -4 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -6 & 0 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 0 & -4 \end{array}\right).$$

Мы привели основную матрицу A рассматриваемой системы к треугольному виду и тем самым доказали её невырожденность. Очевидно, что матрица системы векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ получается транспонированием матрицы A и потому также является невырожденной. Тогда по следствию 1.4 система векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ линейно независима.

Осуществим обратный ход метода Гаусса:

$$\beta_2 = 1, \quad \beta_1 = -3\beta_2 + 4 = 1, \quad \beta_3 = 2\beta_1 + 3\beta_2 - 4 = 1.$$

Таким образом, имеет место разложение

$$\mathbf{x} = 1\mathbf{b}_1 + 1\mathbf{b}_2 + 1\mathbf{b}_3.$$

Итак, в базисе $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ вектор $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$.

Отметим, что при решении этой задачи метод Гаусса фактически позволил не только найти коэффициенты разложения β_1, β_2 и β_3, но и доказать линейную независимость векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ и $\mathbf{b}_3$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 78.6

Используя элементарные преобразования, преобразуем основную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} \boxed{-11} & -23 & -6 & 39 \\ \boxed{-1} & -9 & -4 & 7 \\ \boxed{6} & 16 & 5 & -23 \\ \boxed{9} & 5 & -2 & -25 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 76 & 38 & -38 \\ -1 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & -38 & -19 & 19 \\ 0 & -76 & -38 & 38 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Объявляем неизвестные x_1 и x_3 базисными, а x_2 и x_4 — свободными. Выражаем базисные через свободные:

$$x_3 = -2x_2 + x_4, \quad x_1 = -9x_2 - 4x_3 + 7x_4 = -x_2 + 3x_4.$$

Таким образом, общее решение имеет вид:

$$x_1 = -\alpha + 3\beta, \quad x_2 = \alpha, \quad x_3 = -2\alpha + \beta, \quad x_4 = \beta.$$

Так как в данном случае число переменных $n = 4$, а ранг основной матрицы системы $r = 2$, то по теореме 1.27 число векторов фундаментальной системы решений равно $n - r = 4 - 2 = 2$. Полагая $\alpha = 1$, $\beta = 0$, получаем первое решение: $(-1, 1, -2, 0)$. Полагая $\alpha = 0$, $\beta = 1$, имеем второе решение: $(3, 0, 1, 1)$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 79.1

По определению угла между векторами косинус угла α между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ может быть найден по формуле

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{1\cdot 1 + 1(-1) + (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2+1^2}} = -\frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что $\alpha = 2\pi/3$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 83.1

Проверяем ортогональность векторов $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$:

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = (1, 2, -2, 1)(1, -1, -1, -1) = 1 - 2 + 2 - 1 = 0.$$

Найдём такой вектор $\mathbf{b}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, что $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_3 = 0$ и $\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3 = 0$. Переходя к координатам, получаем однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что основная матрица этой системы уравнений совпадает с матрицей системы векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$. С помощью элементарных преобразований приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -2 & 1 \\ \boxed{1} & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Полагая $x_2 = 1$, $x_4 = 0$, находим:

$$x_3 = 3x_2 + 2x_4 = 3, \quad x_1 = -2x_2 + 2x_3 - x_4 = 4.$$

Имеем ненулевое частное решение $(4, 1, 3, 0)$. Итак, найден вектор $\mathbf{b}_3 = (4, 1, 3, 0)$, ортогональный векторам $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$.

В поиске вектора $\mathbf{b}_4$, ортогонального векторам системы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, выписываем и преобразуем матрицу этой системы векторов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & \boxed{1} \\ 1 & -1 & -1 & \boxed{-1} \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & \boxed{-3} & 0 \\ 4 & 1 & \boxed{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем:

$$x_2 = -3x_1, \quad x_3 = -\frac{4}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 = -\frac{4}{3}x_1 + x_1 = -\frac{1}{3}x_1,$$
$$x_4 = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -x_1 + 6x_1 - \frac{2}{3}x_1 = \frac{13}{3}x_1.$$

Полагая $x_1 = 3$, получаем ненулевое частное решение $(3, -9, -1, 13)$. Тем самым найден вектор $\mathbf{b}_4 = (3, -9, -1, 13)$, и система $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ достроена до ортогонального базиса $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 87.1

Находим характеристический многочлен:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\Big((4-\lambda)(1-\lambda)+2\Big) = \\ = (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6) = -\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda-6.$$

Приравнивая характеристический многочлен нулю, вычисляем характеристические числа: $(1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)=0$, $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$.

Итак, спектр матрицы: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 88.1

Обозначив данную матрицу A, ищем её собственные значения:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}7-\lambda & 12\\ -2 & -3-\lambda\end{vmatrix}=$$
$$=(7-\lambda)(-3-\lambda)+24=$$
$$=\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3).$$

Имеем два собственных значения: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$. Находим соответствующие этим значениям собственные векторы, решая с помощью элементарных преобразований однородные системы $(A-\lambda_i E)X^i=0$, где $i=1,2$:

$$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix}6 & 12\\ -2 & -4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix},\qquad X^1=\alpha\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix},$$
$$A-\lambda_2 E=\begin{pmatrix}4 & 12\\ -2 & -6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix},\qquad X^2=\alpha\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}.$$

Итак, оба подпространства собственных векторов, соответствующие значениям λ_1 и λ_2, одномерные. В качестве базиса первого из них можно взять вектор $\mathbf{b}_1^1=(-2,1)$, в качестве базиса второго — вектор $\mathbf{b}_1^2=(-3,1)$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 88.15

Обозначив данную матрицу A, вычисляем её характеристический многочлен:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda)\Big((1-\lambda)(3-\lambda)+1\Big) = \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4) = -(\lambda-2)^3.\end{aligned}$$

Имеем единственное собственное значение $\lambda_1 = 2$.

Находим соответствующие λ_1 собственные векторы, решая с помощью элементарных преобразований однородную систему линейных уравнений $(A-\lambda_1 E)X = 0$:

$$A-\lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем общее решение $x_3 = -x_1$, где x_1, x_2 — любые действительные числа. Тогда векторы

$$\mathbf{b}_1^1 = (0,1,0), \quad \mathbf{b}_2^1 = (1,0,-1),$$

представляют собой фундаментальную систему решений, которая и будет искомым базисом подпространства собственных векторов, соответствующих значению λ_1.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 88.44

Выписываем характеристический многочлен данной матрицы, обозначив её через A:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-4-\lambda & 0 & -2 & 1\\ -5 & -2-\lambda & -4 & 2\\ 5 & 0 & 2-\lambda & -2\\ 1 & 0 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=-(2+\lambda)\begin{vmatrix}-4-\lambda & -2 & 1\\ 5 & 2-\lambda & -2\\ 1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=-(2+\lambda)\left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2-\lambda & -2\end{vmatrix}-(2+\lambda)\begin{vmatrix}-4-\lambda & -2\\ 5 & 2-\lambda\end{vmatrix}\right)=$$

$$=-(2+\lambda)\Big((4-2+\lambda)-(2+\lambda)(\lambda^2+2\lambda+2)\Big)=$$

$$=(\lambda+2)^2\Big(-1+(\lambda^2+2\lambda+2)\Big)=(\lambda+2)^2(\lambda+1)^2.$$

Имеем два собственных значения: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$.

Решаем однородную систему линейных уравнений с основной матрицей $A-\lambda_1 E$:

$$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix}-3 & 0 & -2 & 1\\ -5 & -1 & -4 & 2\\ 5 & 0 & 3 & -2\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-3 & 0 & -2 & 1\\ -5 & -1 & -4 & 2\\ -1 & 0 & -1 & 0\\ -2 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-3 & 0 & -2 & 1\\ -5 & -1 & -4 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Придавая неизвестной x_1, которую будем считать свободной, значение 1, имеем:

$$x_3 = -x_1 = -1,$$
$$x_4 = 3x_1 + 2x_3 = 3 - 2 = 1,$$
$$x_2 = -5x_1 - 4x_3 + 2x_4 = -5 + 4 + 2 = 1.$$

В данном случае фундаментальная система решений состоит из одного вектора $(1, 1, -1, 1)$, который можно выбрать в качестве вектора $\mathbf{b}_1^1$, образующего базис подпространства собственных векторов, соответствующих значению λ_1.

Решаем однородную систему линейных уравнений с основной матрицей $A - \lambda_2 E$:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & -4 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Придавая неизвестным x_2 и x_3, которые мы объявим свободными, конкретные значения, находим фундаментальную систему решений:

$$x_2 = 1,\ x_3 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_4 = 2x_1 + 2x_3 = 0,$$
$$x_2 = 0,\ x_3 = 1, \quad x_1 = 0, \quad x_4 = 2x_1 + 2x_3 = 2.$$

Итак, в качестве базиса подпространства собственных векторов, соответствующих значению λ_2, можно выбрать систему векторов

$$\mathbf{b}_1^2 = (0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{b}_2^2 = (0, 0, 1, 2).$$

[Вернуться к условию]

Глава 2. Аналитическая геометрия

Решение задачи 90

Пусть $M(0, y)$ — искомая точка. Получаем и решаем уравнение для нахождения координаты y с помощью формулы (1.21) для нахождения расстояния между двумя точками:

$$5 = \sqrt{(3-0)^2 + (-8-y)^2}, \quad 25 = 9 + (8+y)^2, \quad (8+y)^2 = 16, \quad |8+y| = 4.$$

Имеем два решения: $y_1 = -4$, $y_2 = -12$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют две точки: $M_1(0, -4)$ и $M_2(0, -12)$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 98

Как известно, диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам. Тогда точка $O(x, y)$ пересечения диагоналей может быть найдена как середина отрезка AC по формулам (2.2):

$$x = \frac{2 + (-6)}{2} = -2, \quad y = \frac{4 + 6}{2} = 5.$$

Обозначим через $D(x, y)$ четвертую вершину параллелограмма. Тогда найденная точка $O(-2, 5)$ делит пополам диагональ BD. Применяя формулы середины отрезка (2.2), составляем и решаем уравнения для определения координат точки D:

$$\frac{-3 + x}{2} = -2, \ -3 + x = -4, \ x = -1; \qquad \frac{7 + y}{2} = 5, \ 7 + y = 10, \ y = 3.$$

Итак, четвертая вершина — $D(-1, 3)$.

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 101

Воспользоваться тем, что точка пересечения медиан делит медианы в отношении $2:1$.

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 102

Воспользоваться тем, что по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $\frac{CM}{MA} = \frac{BC}{BA}$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 106

Воспользуемся формулой (2.3) и найдем площадь треугольника с вершинами в данных точках:

$$S = \frac{1}{2}\Big|(5-2)(15-3) - (11-2)(7-3)\Big| = \frac{1}{2}\Big|3\cdot 12 - 9\cdot 4\Big| = 0.$$

Площадь S треугольника равна нулю. Это и означает, что его вершины лежат на одной прямой.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 110.3

Угол наклона данной прямой к оси Ox равен $\pi/4$. Значит, угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. В уравнение прямой с угловым коэффициентом (2.4) подставляем значения $k = 1$ и $b = -2$:

$$y = 1 \cdot x + (-2), \quad y = x - 2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 112

Угловой коэффициент данной прямой $k = \operatorname{tg} \operatorname{arctg} 3 = 3$. Подставляем значение k и координаты точки A в уравнение (2.5):

$$y - \frac{2}{5} = 3(x + 2), \quad 5y - 2 = 15x + 30, \quad 15x - 5y + 32 = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 116.1

Подставляем координаты точек A и B в уравнение (2.7):

$$\frac{x-7}{4-7}=\frac{y-4}{-8-4},\quad \frac{x-7}{-3}=\frac{y-4}{-12},\quad \frac{x-7}{1}=\frac{y-4}{4},$$
$$4(x-7)=y-4,\quad 4x-y-24=0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 124.1

Приведём данное уравнение к уравнению прямой с угловым коэффициентом:

$$5y = -2x + 1, \quad y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}.$$

Из формулы (2.4) следует, что $k = -2/5$, $b = 1/5$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 128.1

Чтобы построить прямую, достаточно знать координаты любых ее двух точек. Полагая $x = 0$, получаем $y = -4$, полагая $x = 1$, получаем $y = -2$. Имеем две точки: $A(0, -4)$ и $B(1, -2)$. Проводим через них прямую (рис. Р.1).

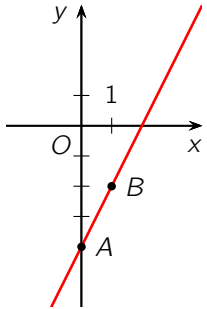

Рис. Р.1

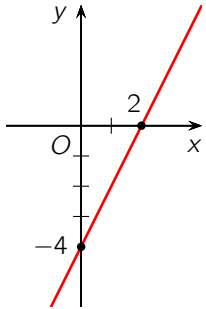

Рис. Р.2

Задачу можно решить иначе, преобразуя данное уравнение к уравнению прямой в отрезках:

$$2x - y - 4 = 0, \quad 2x - y = 4, \quad \frac{2x}{4} - \frac{y}{4} = 1, \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1.$$

Теперь на оси Ox отложим 2 единицы вправо, а на оси Oy — 4 единицы вниз. Получим две точки на осях координат, через которые проведём прямую (рис. Р.2).

[Вернуться к условию]

Решение задачи 139.1

Преобразуем данные уравнения прямых к уравнениям с угловым коэффициентом:

$$2x - 3y + 10 = 0,\ y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3};$$
$$5x - y + 4 = 0,\ y = 5x + 4.$$

Выписываем угловые коэффициенты: $k_1 = 2/3$, $k_2 = 5$. Тогда по формуле (2.10)

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{5 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}\cdot 5}\right| = \frac{13}{13} = 1.$$

Значит, угол между прямыми $\varphi = \pi/4$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 146.1

В силу параллельности искомая прямая и прямая MN имеют общий угловой коэффициент k, который может быть вычислен по координатам точек M и N по формуле (2.6):

$$k = \frac{-1-(-2)}{4-5} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Итак, нам известны угловой коэффициент k и точка A искомой прямой. Выписываем ее уравнение по формуле (2.5):

$$y - 1 = -1(x - 3), \quad x + y - 4 = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 148.1

По формуле (2.6) вычисляем угловой коэффициент прямой MN:

$$k_{MN} = \frac{-5-(-4)}{-4-(-3)} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Согласно условию перпендикулярности двух прямых (2.12) угловой коэффициент искомого перпендикуляра

$$k_{\perp} = -\frac{1}{k_{MN}} = -\frac{1}{1} = -1.$$

Зная точку и угловой коэффициент, выписываем искомое уравнение по формуле (2.5):

$$y - 1 = -1(x+1), \quad x + y = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 149

По формуле (2.6) находим угловой коэффициент стороны AC:

$$k_{AC} = \frac{5-(-6)}{8-6} = \frac{11}{2}.$$

Тогда угловой коэффициент искомой высоты

$$k = -\frac{1}{k_{AC}} = -\frac{2}{11}.$$

Зная угловой коэффициент k и точку B высоты, по формуле (2.5) выписываем ее уравнение:

$$y-(-3) = -\frac{2}{11}(x-2), \quad 11y+33 = -2x+4, \quad 2x+11y+29 = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 155.1

Найдем уравнение стороны BC по формуле (2.7):

$$\frac{x-(-2)}{-5-(-2)}=\frac{y-5}{2-5},\quad \frac{x+2}{-3}=\frac{y-5}{-3},$$
$$x+2=y-5,\quad x-y+7=0.$$

По формуле (2.13) вычислим высоту AD как расстояние от точки A до прямой BC:

$$AD=\left|\frac{-8-(-5)+7}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 164

Обозначим первую из данных прямых L_1, а вторую — L_2. Пусть точка $M(x, y)$ лежит на одной из искомых биссектрис. Тогда по свойству биссектрисы расстояние d_1 от точки M до прямой L_1 равно расстоянию d_2 от точки M до прямой L_2. По формуле (2.13) расстояния от точки до прямой составляют:

$$d_1 = \frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|3x+4y-1|}{5}, \quad d_2 = \frac{|5x+12y-2|}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{|5x+12y-2|}{13}.$$

Тогда условие $d_1 = d_2$ даёт уравнение

$$\frac{|3x+4y-1|}{5} = \frac{|5x+12y-2|}{13}.$$

Решаем его:

$$13|3x+4y-1| = 5|5x+12y-2|,$$

$$\left[\begin{array}{l} 13(3x+4y-1) = 5(5x+12y-2), \\ 13(3x+4y-1) = -5(5x+12y-2), \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 14x-8y-3=0, \\ 64x+112y-23=0. \end{array}\right.$$

Итак, мы нашли две биссектрисы:

$$14x-8y-3=0, \quad 64x+112y-23=0.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 165

Найти обе биссектрисы углов, образованных прямыми AB и AC. Затем выбрать ту, от которой точки B и C находятся по разные стороны. [Вернуться к условию]

Решение задачи 167.1

Найдем уравнение диагонали AC как уравнение прямой (2.7), проходящей через две точки:

$$\frac{x-(-10)}{-3-(-10)}=\frac{y-(-16)}{12-(-16)},\quad \frac{x+10}{7}=\frac{y+16}{28},\quad \frac{x+10}{1}=\frac{y+16}{4},$$
$$4(x+10)=y+16,\quad 4x-y+24=0.$$

Аналогично найдем уравнение диагонали BD:

$$\frac{x-(-15)}{20-(-15)}=\frac{y-(-2)}{19-(-2)},\quad \frac{x+15}{35}=\frac{y+2}{21},\frac{x+15}{5}=\frac{y+2}{3},$$
$$3(x+15)=5(y+2),\quad 3x-5y+35=0.$$

Для нахождения общей точки диагоналей составим из полученных уравнений систему, а затем решим ее:

$$\begin{cases}4x-y+24=0,\\3x-5y+35=0,\end{cases}\qquad\begin{cases}4x-y+24=0,\\-17x-85=0,\end{cases}$$

откуда

$$x=-5,\quad y=4x+24=4(-5)+24=4.$$

Итак, точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ имеет координаты $(-5,4)$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 190.1

По условию ежегодная амортизация составляет 2,4 тыс. ден. ед. Тогда стоимость автомобиля через t лет

$$p(t) = 24 - \frac{12}{5}t.$$

Соответственно через 5 лет стоимость автомобиля будет равна

$$p(5) = 24 - \frac{12}{5} \cdot 5 = 12 \text{ тыс. ден. ед.}$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 195

Для нахождения требуемого расстояния приравниваем транспортные расходы:

$$20x + 100 = 25x + 70, \quad 5x = 30, \quad x = 6.$$

Итак, при перевозке на 600 км транспортные расходы совпадают и составляют $y = 20 \cdot 6 + 100 = 220$ ден. ед. Поэтому начиная с 600 км более экономичным становится первое транспортное средство. [Вернуться к условию]

Решение задачи 196

По формуле (2.7) построим функцию издержек $C(q)$, где q — количество произведенной продукции, как прямую, проходящую через точки $M_1(8, 635)$ и $M_2(13, 750)$:

$$\frac{C(q)-635}{750-635}=\frac{q-8}{13-8}, \quad \frac{C(q)-635}{115}=\frac{q-8}{5}, \quad \frac{C(q)-635}{23}=\frac{q-8}{1},$$
$$C(q)-635=23(q-8), \quad C(q)=23q-184+635=23q+451.$$

Функция выручки по условию имеет вид $R(q) = 64q$. Находим точку безубыточности как абсциссу точки пересечения линий издержек и выручки:

$$23q+451=64q, \quad 41q=451, \quad q=11.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 200.1

Равновесие на рынке определяется равенством спроса и предложения. С геометрической точки зрения точка рыночного равновесия — это точка пересечения линий спроса и предложения (рис. Р.3):

$$p + 3 = -2p + 12, \quad 3p = 9, \quad p = 3.$$

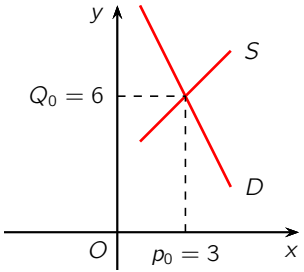

Рис. Р.3

Таким образом, равновесная цена $p_0 = 3$ ден. ед., равновесный объем продаж $Q_0 = 6$ ден. ед., т.е. точка рыночного равновесия имеет координаты 3 и 6. [Вернуться к условию]

Решение задачи 200.2

Закон спроса не изменится, а закон предложения примет вид $S_1 = S + 3 = p + 6$ (рис. P.4).

Находим точку рыночного равновесия в новых условиях:

$$p + 6 = -2p + 12, \quad 3p = 6, \quad p = 2.$$

Получена новая точка равновесия $M'(2, 8)$. Следовательно, после введения налога равновесная цена увеличится на 2 единицы, а равновесный объем уменьшится на 1 единицу.

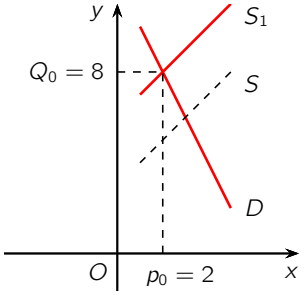

Рис. P.4

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 200.3

После введения субсидии s закон спроса не изменится, а закон предложения примет вид $S = p + 3 - s$.

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 200.4

Если налог составляет 20%, то вся рыночная цена составляет 120%, из них 100% получают поставщики товара, 20% — государство. После введения данного налога закон спроса не изменится, а закон предложения примет вид $S = 1{,}2(p + 3)$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 207.2

Выделяем полные квадраты в левой части уравнения:

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 8y + 16) - 16 - 16 = 0,$$
$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 - 36 = 0.$$

Таким образом, центр окружности находится в точке $(2, -4)$, а её радиус равен 6.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 214.2

Найдем квадрат большой полуоси:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 6^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 36 + \frac{25}{4} = \frac{169}{4} = \left(\frac{13}{2}\right)^2 = 6{,}5^2.$$

Следовательно, уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{6{,}5^2} + \dfrac{y^2}{6^2} = 1$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 215.4

Преобразуем уравнение к каноническому виду:

$$\frac{24x^2}{1176}+\frac{49y^2}{1176}=1,\quad \frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1,\quad \frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{\left(2\sqrt{6}\right)^2}=1.$$

Отсюда следует, что

$$a=7,\quad b=2\sqrt{6},\quad c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{49-24}=\sqrt{25}=5,\quad \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{7}.$$

Координаты фокусов: $F_1(-5,0)$, $F_2(5,0)$.

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 224.3

Касательной к эллипсу называется прямая, пересекающая эллипс в единственной точке.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 230.1

Выделим полный квадрат по переменным x и y:

$$16(x^2-4x+4)-64-9(y^2+6y+9)+81-161=0,$$

$$16(x-2)^2-9(y+3)^2=144,\quad \frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{16}=1.$$

Отсюда следует, что центр гиперболы находится в точке $(2,-3)$, действительная полуось $a=\sqrt{9}=3$, мнимая полуось $b=\sqrt{16}=4$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 240.1

Преобразуем данное уравнение к равносильному виду:

$$y = 3\sqrt{x}, \quad \begin{cases} y^2 = 9x, \\ y > 0. \end{cases}$$

Полученная система уравнений определяет часть параболы $y^2 = 9x$, лежащую в верхней полуплоскости, а точнее — в I квадранте. [Вернуться к условию]

Решение задачи 242

Проверим, нет ли у данных параболы и прямой общих точек. Для точек прямой имеет место равенство $4x = -3y - 44$. Подставив его в уравнение параболы, получим:

$$y^2 = 16\,(4x), \quad y^2 = 16\,(-3y - 44), \quad y^2 + 48y + 704 = 0.$$

Очевидно, что дискриминант данного квадратного уравнения отрицательный. Следовательно, данные парабола и прямая не пересекаются. В таком случае ближайшая к прямой точка параболы является общей точкой этой параболы и ее касательной, параллельной данной прямой. Такая касательная имеет уравнение

$$4x + 3y + C = 0,$$

где константа C подлежит определению.

Касательная — это прямая, пересекающая параболу в единственной точке, называемой *точкой касания*. Чтобы найти касательную, подберем число C так, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 64x, \\ 4x + 3y + C = 0 \end{cases}$$

имела единственное решение. Из второго уравнения находим: $4x = -3y - C$. Подставляя это значение в первое уравнение, получаем:

$$y^2 = 16(-3y - C), \quad y^2 + 48y + 16C = 0.$$

Данное квадратное уравнение имеет единственное решение, если его дискриминант равен нулю. На этом основании вычисляем C:

$$24^2 - 16C = 0, \quad C = \frac{24^2}{16} = \frac{4^2 \cdot 6^2}{16} = 36.$$

Подставляя полученное значение C обратно в квадратное уравнение, находим его решение:

$$y^2 + 48y + 16 \cdot 36 = 0, \quad (y + 24)^2 = 0, \quad y = -24.$$

Теперь, зная y, находим x из уравнения параболы:

$$(-24)^2 = 64x, \quad 8^2 \cdot 3^2 = 64x, \quad x = 9.$$

Итак, ближайшей к прямой $4x + 3y + 44 = 0$ точкой параболы $y^2 = 64x$ является точка $M_0(9, -24)$. Вычисляем расстояние от точки M_0 до данной прямой:

$$d = \frac{|4 \cdot 9 + 3(-24) + 44|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{8}{5}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 247.1

Выделяем полные квадраты и проводим преобразования:

$$(x^2+2x+1)-1-9(y^2-4y+4)+36-44=0,$$

$$(x+1)^2-9(y-2)^2=9, \quad \frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{1}=1.$$

Получили каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $(-1,2)$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 248.1

Приведем данное уравнение гиперболы к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{\frac{3648}{57}} - \frac{y^2}{\frac{3648}{64}} = 1, \quad \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{57} = 1.$$

Таким образом, для данной гиперболы

$$a^2 = 64, \quad b^2 = 57, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{64 + 57} = \sqrt{121} = 11.$$

Значит, правый фокус гиперболы $F_2 = (11, 0)$ (рис. Р.5).

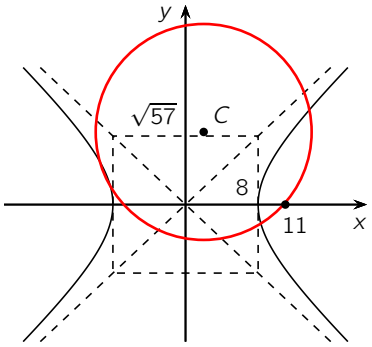

Рис. Р.5

Окружность с центром в точке $C(2, 8)$ имеет уравнение

$$(x - 2)^2 + (y - 8)^2 = R^2,$$

где радиус R подлежит определению. Подставим в это уравнение координаты найденной ранее точки F_2, по условию принадлежащей окружности:

$$(11 - 2)^2 + (0 - 8)^2 = R^2, \quad 81 + 64 = R^2, \quad R^2 = 145.$$

Итак, искомое уравнение окружности

$$(x-2)^2+(y-8)^2=145.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 249.2

Расстояние r между точками $M(x, y)$ и A, а также расстояние d от точки M до прямой $x = -1$ (рис. Р.6) могут быть вычислены по формулам:

$$r = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2}, \quad d = |x+1|.$$

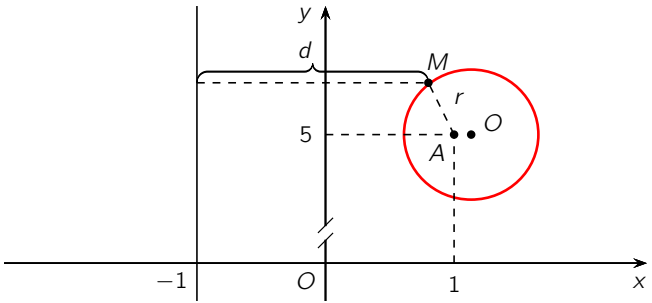

Рис. Р.6

Так как по условию $4r = d$, то

$$4\sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2} = |x+1|, \quad 16\Big((x-1)^2 + (y-5)^2\Big) = (x+1)^2,$$

$$16\Big(x^2 - 2x + 1\Big) - \Big(x^2 + 2x + 1\Big) + 16(y-5)^2 = 0,$$

$$15x^2 - 34x + 15 + 16(y-5)^2 = 0,$$

$$15\left(x^2 - 2\cdot\frac{17}{15} + \left(\frac{17}{15}\right)^2\right) - \frac{17^2}{15} + 15 + 16(y-5)^2 = 0,$$

$$15\left(x - \frac{17}{15}\right)^2 + 16(y-5)^2 = \frac{64}{15}, \quad \frac{(x-17/15)^2}{(8/15)^2} + \frac{(y-5)^2}{(2/\sqrt{15})^2} = 1.$$

Получено каноническое уравнение эллипса со следующими полуосями и центром:

$$a = \frac{8}{15}, \quad b = \frac{2}{\sqrt{15}}, \quad O\left(\frac{17}{15}, 5\right).$$

[Вернуться к условию]

Глава 3. Предел последовательности и функции

Решение задачи 250.2

Подставляя в формулу общего члена значения $n = 1, 2, 3, 4$, последовательно находим:

$$x_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1, \quad x_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}, \quad x_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 250.8

Факториал натурального числа n представляет собой произведение всех натуральных чисел от 1 до n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n.$$

Поэтому

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1 \cdot 2 = 2, \quad x_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad x_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 250.10

Квадратные скобки служат для указания целой части числа (см. рис. 3.51). [Вернуться к условию]

Решение задачи 250.11

Данная последовательность задана рекуррентно: каждый последующий её член вычисляется через предыдущий. Имеем:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= x_1 + 2 = 1 + 2 = 3, \\ x_3 &= x_2 + 2 = 3 + 2 = 5, \\ x_4 &= x_3 + 2 = 5 + 2 = 7. \end{aligned}$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 252.8

Поскольку для всякого $n \in \mathbb{N}$ верно, что $x_n > 0$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу. Так как, кроме того,

$$x_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leqslant 1 + 1 = 2,$$

то $\{x_n\}$ ограничена также сверху и, следовательно, ограничена. [Вернуться к условию]

Решение задачи 253.1

В данном случае для всех натуральных n

$$x_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 3 > 2n + 1 = x_n.$$

Поэтому последовательность $\{x_n\}$ строго возрастающая. [Вернуться к условию]

Решение задачи 253.2

Найдём три первых элемента:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = -\frac{1}{3}.$$

Отсюда видно, что с одной стороны $x_1 < x_2$, а с другой — $x_2 > x_3$. Значит, данная последовательность не является монотонной. [Вернуться к условию]

Решение задачи 253.3

Так как

$$x_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} = x_n,$$

то данная последовательнось строго убывает.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 253.5

В данном случае для всех натуральных n

$$x_{n+1} = \left[\sqrt{n+1}\right] \geqslant \left[\sqrt{n}\right] = x_n.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ возрастает. Отсутствие строгого возрастания следует из того, что $x_1 = x_2 = 1$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 257.1

Пусть ε — произвольное положительное число. Тогда требование $|\alpha_n| < \varepsilon$ влечёт за собой неравенства

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Так как номер N должен быть натуральным числом, положим

$$N = [1/\varepsilon] + 1.$$

При $n \geqslant N$ будем иметь

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{[1/\varepsilon] + 1} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon.$$

Это и означает, что последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая. [Вернуться к условию]

Решение задачи 259.1

Зададимся произвольным положительным числом ε и введём обозначение $x_n = n/(n-1)$. Тогда

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n-1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n-1)}{n-1}\right| = \frac{1}{n-1}.$$

Найдём, при каких значениях n это выражение будет меньше ε:

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \quad \frac{1}{n-1} < \varepsilon, \quad n-1 > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n > 1 + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Если теперь положить

$$N = \left[1 + \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 2,$$

то при всех $n \geqslant N$ окажется, что $|x_n - 1| < \varepsilon$. А это и доказывает, что последовательность x_n сходится к единице.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 260.4

Вынесем из числителя и знаменателя n в старшей (в данном случае второй) степени:

$$\frac{3n^2-n+2}{5n^2+2}=\frac{n^2}{n^2}\,\frac{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{5+\dfrac{2}{n^2}}=\frac{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{5+\dfrac{2}{n^2}}.$$

Теперь мы можем применить свойство 4 сходящихся последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+2}{5n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{5+\dfrac{2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{2}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}}=\frac{3-0+0}{5+0}=\frac{3}{5}.$$

Мы воспользовались тем, что предел константы — константа, а последовательности $\{1/n\}$ и $\{1/n^2\}$ — бесконечно малые.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 260.14

Используя определение факториала из задачи 250.8, разделим числитель и знаменатель на $(n+1)!$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(n+2)}{(n+2)(n+3)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2+5n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}=\frac{0+0}{1+0+0}=0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 260.31

Домножим и разделим выражение под знаком предела на его сопряжённое, после чего применим к числителю формулу разности квадратов:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n+1}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=0\cdot\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=0\cdot\frac{2}{2}=0.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 260.34

Дополнить данное выражение до разности кубов, умножив и разделив его на сопряжённое ему выражение.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 260.38

Вынесем, как всегда, из числителя и знаменателя n в старшей степени:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/2}}{n^{1/2}}\frac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}n\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\infty\cdot 1=\infty.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 260.46

Привести дроби к общему знаменателю.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 260.51

Применив формулу суммы арифметической прогрессии

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2(n+2)}-\frac{n(n+2)}{2(n+2)}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2+4/n}=\frac{-1}{2+0}=-\frac{1}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 260.54

Воспользоваться формулой

$$1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 260.58

Применить формулу суммы геометрической прогрессии

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 267

Выясним, является ли эта последовательность монотонной. Действительно, запишем $(n+1)$-й член:

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}.$$

Сравним члены x_n и x_{n+1}. С этой целью преобразуем их следующим образом:

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+(1+k)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+(1+k)} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2},$$
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+(1+k)} = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+(1+k)}.$$

Остаётся заметить, что

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} > \frac{1}{n+1}.$$

Таким образом, для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $x_n < x_{n+1}$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ возрастает.

Покажем, что эта последовательность ограничена. В самом деле, для $n \in \mathbb{N}$ с одной стороны $x_n > 0$ и с другой стороны

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} n = 1.$$

Значит, для любого натурального n имеет место двойное неравенство $0 < x_n < 1$, убеждающее нас в ограниченности $\{x_n\}$.

Будучи возрастающей и ограниченной, последовательность $\{x_n\}$ имеет предел.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 268

Поскольку

$$x_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a+\sqrt{0}}}}}_{n+1 \text{ корней}} < \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a+\sqrt{a}}}}}_{n+1 \text{ корней}} = x_{n+1},$$

то последовательность $\{x_n\}$ возрастает.

Докажем, что $\{x_n\}$ ограничена сверху, например числом $\sqrt{a}+1$. В самом деле, для первого элемента это верно:

$$x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a}+1.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ имеет место представление

$$x_{n+1} = \sqrt{a+x_n}, \tag{P.1}$$

и, если предположить, что $x_n \leqslant \sqrt{a}+1$, то

$$x_{n+1} \leqslant \sqrt{a+\sqrt{a}+1} < \sqrt{a+2\sqrt{a}+1} = \sqrt{\left(\sqrt{a}+1\right)^2} = \sqrt{a}+1,$$

что и доказывает ограниченность всех элементов последовательности.

По теореме 3.5 возрастающая и ограниченная последовательность $\{x_n\}$ сходится. Обозначим ее предел через x. Факт существования предела последовательности $\{x_n\}$ делает возможным предельный переход при $n \to \infty$ в рекуррентном равенстве (P.1). В результате получаем и решаем уравнение относительно x:

$$x = \sqrt{a+x}, \quad x^2 = a+x, \quad x^2 - x - a = 0, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}.$$

Итак, предел x необходимо равен одному из двух полученных значений. Так как отрицательное значение не подходит, то

$$x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 272.1

Подставим значение $x = 0$ в аналитическое выражение данной функции:

$$f(0) = \sqrt{1 + 0^2} = \sqrt{1} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 273.5

В выражении функции f заменяем x на $1/x$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1/x + 3}{(1/x)^2 - 1} = \frac{x + 3x^2}{1 - x^2} = \frac{3x^2 + x}{1 - x^2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 274.5

Заменяем x на $3x$ в выражении функции $f(x)$:

$$f(3x) = (3x)^3\, 2^{3x} = 3^3\, x^3\, (2^3)^x = 27x^3 8^x.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 275.2

Так как логарифм задан для положительных значений аргумента, то область определения находится из условия

$$\frac{2+x}{2-x} > 0.$$

Этому условию удовлетворяет интервал $(-2, 2)$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 276.1

Выделим полный квадрат:

$$y = x^2 + 4x + 4 - 3 = (x+2)^2 - 3.$$

Множеством значений функции $z = (x+2)^2$ является промежуток $[0, +\infty)$. Так как $y(x) = z(x) - 3$, то для функции y множество значений $E = [-3, +\infty)$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 277.1

Область определения $D(f) = (-\infty, +\infty)$ симметрична относительно начала координат, и

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^3}{x^2 + 1} = -f(x).$$

Следовательно, функция $f(x)$ нечетная.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 277.3

Здесь $D(f) = (-\infty, \infty)$, и

$$f(-x) = e^{-x} - 2e^{x} \neq \pm f(x).$$

Значит, функция $f(x)$ не является как чётной, так и нечётной, т.е. имеет общий вид. [Вернуться к условию]

Решение задачи 278.1

Основной период функции $\sin x$ равен 2π. Функция $f(x) = \sin 4x$ получается из неё путём сжатия в 4 раза вдоль оси Ox. Следовательно, функция $f(x)$ периодическая и её основной период

$$T = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 278.2

Поскольку

$$\cos^2 5x = \frac{1+\cos 10x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 10x,$$

то функция f периодическая и её период

$$T = \frac{1}{10} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{5}.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 278.5

Убедиться, что период суммы двух периодических функций равен наименьшему общему кратному их периодов.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 279.1

Функция $f(x)$ определена на всей вещественной оси. Её областью значений является интервал $(-\pi/2, \pi/2)$. Выразим аргумент x через значение функции y:

$$y = \operatorname{arctg} 3x, \quad \operatorname{tg} y = 3x, \quad x = \frac{1}{3}\operatorname{tg} y.$$

Таким образом, $x = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg} y$ является искомой обратной функцией. [Вернуться к условию]

Решение задачи 280.1

Вычисляем искомые суперпозиции:

$$f(g(x)) = \sqrt{x^2} = |x|,\ x \in \mathbb{R}, \quad g(f(x)) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x,\ x \geqslant 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 281.2

Данная функция является суперпозицией линейной функции $v = x/3$, тригонометрической функции $u = \operatorname{tg} v$ и логарифмической функции $y = \lg u$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 282.11

В качестве исходного возьмём график функции $y = \cos x$ (рис. P.7).

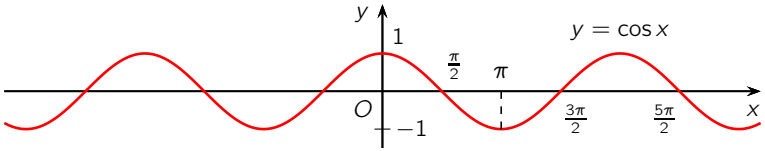

Рис. P.7

С помощью сдвига вправо на величину $a = \pi/4$ получаем график функции $y = \cos(x - \pi/4)$ (рис. P.8).

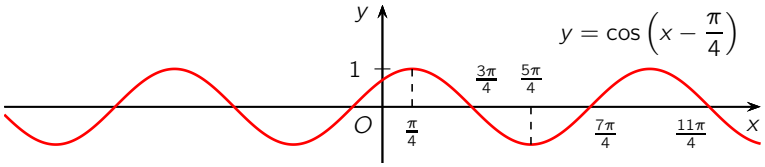

Рис. P.8

Растягивая полученный график в 2 раза вдоль оси Oy, получаем требуемый график функции $y = 2\cos(x - \pi/4)$ (рис. P.9).

[Вернуться к условию]

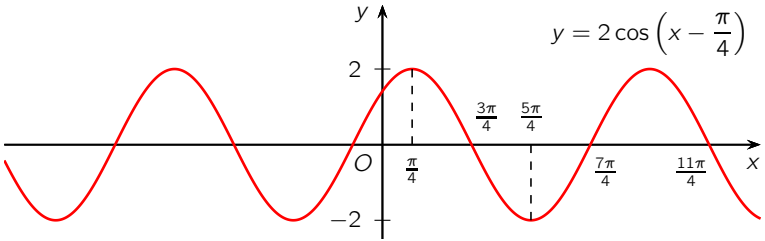
y
x
O
2
−2
$y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{11\pi}{4}$

Рис. Р.9

Указание к задаче 282.16

Выделить полный квадрат в выражении под знаком модуля.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 282.20

Дробная часть числа x определяется как разность самого числа x и его целой части:

$$\{x\} = x - [x].$$

Так как значение дробной части не изменяется при изменении числа x на любое целое значение, то достаточно построить часть графика функции $y = \{x\}$ на полуинтервале $[0, 1)$, а затем путём сдвигов влево и вправо на целочисленные значения аргумента получить весь график. Если $x \in [0, 1)$, то $[x] = 0$, поэтому $\{x\} = x$. На рис. Р.10 изображён получающийся в итоге график. [Вернуться к условию]

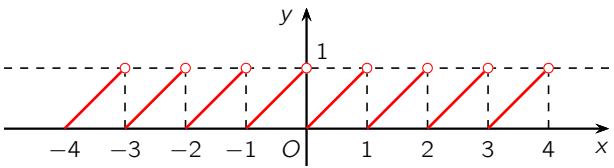

Рис. Р.10

Указание к задаче 282.22

Воспользоваться тем, что $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 282.23

Воспользоваться тем, что

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 282.26

Провести построение графика отдельно для промежутков $(-\infty, -2]$, $[-2, -1]$, $[-1, 0]$ и $[0, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 283.6

См. задачу 282.19.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 284

Находим равновесную цену:

$$D(p_0) = S(p_0), \quad \frac{25p_0 + 4p_0^2}{1 + 10p_0} = \frac{20 + 4p_0^2}{1 + 10p_0},$$

$$25p_0 + 4p_0^2 = 20 + 4p_0^2, \quad 25p_0 = 20, \quad p_0 = \frac{4}{5}.$$

Определяем равновесный объем продаж:

$$Q_0 = S(p_0) = \frac{20 + 4\left(\frac{4}{5}\right)^2}{1 + 10 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{500 + 64}{25 + 200} = \frac{564}{225} = \frac{188}{75}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 287.1

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдём такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполнялось бы неравенство

$$\big|(2x + 1) - 5\big| < \varepsilon.$$

Решая последнее неравенство, получаем:

$$\big|2x - 4\big| < \varepsilon, \quad \big|2(x - 2)\big| < \varepsilon, \quad \big|x - 2\big| < \varepsilon/2.$$

Для завершения доказательства достаточно принять $\delta = \varepsilon/2$. [Вернуться к условию]

Указание к задаче 287.11

Воспользоваться тем, что по определению предела переменная x, стремясь к числу $a = 1$, не принимает этого значения. [Вернуться к условию]

Решение задачи 288.1

Рассмотрим функцию

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 1.$$

Выберем произвольным образом последовательность $\{x_n\}$ такую, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2, \quad x_n \neq 2, \ n \in \mathbb{N}.$$

Найдем предел последовательности $f(x_n)$, пользуясь свойством 4 сходящихся последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (3x_n^2 + 2x_n - 1) =$$

$$= 3\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2 + 2\lim_{n\to\infty} x_n - 1 = 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - 1 = 15.$$

В силу произвольности выбора последовательности $\{x_n\}$ искомый предел равен 15.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 289.1

Рассмотрим последовательности $x_n = 2\pi n$ и $y_n = \pi + 2\pi n$, сходящиеся к $x_0 = \infty$. Для них:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos 2\pi n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \cos\Big(\pi + 2\pi n\Big) = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1.$$

Пределы последовательностей $\{f(x_n)\}$ и $\{f(y_n)\}$ оказались различными. Это означает, что предел функции не существует.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 290.2

По свойствам предела арифметических операций

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-1}{4x^2+5x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -1}(4x^2+5x+2)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to -1}3x^2-\lim\limits_{x\to -1}1}{\lim\limits_{x\to -1}4x^2+\lim\limits_{x\to -1}5x+\lim\limits_{x\to -1}2}=\frac{3\lim\limits_{x\to -1}x\lim\limits_{x\to -1}x-1}{4\lim\limits_{x\to -1}x\lim\limits_{x\to -1}x+5\lim\limits_{x\to -1}x+2}=$$

$$=\frac{3(-1)(-1)-1}{4(-1)(-1)+5(-1)+2}=\frac{3-1}{4-5+2}=2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 290.6

Свойство предела частного здесь неприменимо, поскольку в точке $a = 3$ знаменатель обращается в нуль. Числитель в этой точке в нуль не обращается, что позволяет найти предел «перевернутой дроби»:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{2x+5} = \frac{0-3}{2\cdot 3+5} = 0.$$

Итак, мы доказали, что функция

$$\alpha(x) = \frac{x-3}{2x+5}$$

бесконечно малая. Тогда по теореме 3.8 функция $1/\alpha(x)$, т.е. функция под знаком предела, является бесконечно большой и её предел равен ∞.

Вышесказанное позволяет при решении примеров выполнять для сокращения записи формальное деление ненулевой константы на нуль, получая в результате бесконечность:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x+5}{x-3} = \frac{2\cdot 3+5}{3-3} = \frac{11}{0} = \infty.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 290.11

В точке $x = 2$ как числитель, так и знаменатель обращаются в нуль. Это означает, что мы имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Для её раскрытия разложим числитель и знаменатель на множители, а затем сократим их общий множитель:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-3}.$$

Знаменатель последней дроби теперь не обращается в нуль, что даёт возможность применить свойства предела арифметических операций:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)} = \frac{2+2}{2-3} = \frac{4}{-1} = -4.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 290.15

Очевидно, что здесь мы имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Для её раскрытия разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to -5}\frac{4x^2+23x+15}{-7x^2-36x-5}=\lim_{x\to -5}\frac{(x+5)(4x+3)}{(x+5)(-7x-1)}=$$
$$=\lim_{x\to -5}\frac{4x+3}{-7x-1}=\frac{4(-5)+3}{-7(-5)-1}=\frac{-17}{34}=-\frac{1}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 290.31

В точке $x = 1$ числитель и знаменатель рассматриваемой дроби обращаются в нуль, поэтому имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Так как число $x = 1$ является корнем многочленов в числителе и знаменателе, то последние делятся без остатка на $x - 1$. Выполним деление «уголком»:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - x - 2 & x - 1 \\ \cline{2-2} -\,(3x^2 - 3x) & 3x + 2 \\ \cline{1-1} -2x - 2 & \\ -\,(2x - 2) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + 4x - 4 & x - 1 \\ \cline{2-2} -\,(x^3 - x^2) & x^2 + 4 \\ \cline{1-1} -4x - 4 & \\ -\,(4x - 4) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Тогда

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 + 4x - 4} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(3x+2)}{(x-1)(x^2+4)} = \lim_{x\to 1} \frac{3x+2}{x^2+4} = \frac{3\cdot 1 + 2}{1^2 + 4} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 290.39

Подставляя значение $x = 1$ в числитель и знаменатель, убеждаемся, что имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Для её раскрытия избавимся от иррациональности в числителе, домножив числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое числителю:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+8-9}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}=\frac{1}{\sqrt{1+8}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 290.51

Имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Избавимся от иррациональности в числителе, разложим на множители знаменатель и сократим общий множитель:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+7}}{x^2+5x+6} &= \frac{\left(\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+7}\right)\left(\sqrt{2x+9}+\sqrt{x+7}\right)}{(x+2)(x+3)\left(\sqrt{2x+9}+\sqrt{x+7}\right)} = \\ &= \frac{(2x+9)-(x+7)}{(x+2)(x+3)\left(\sqrt{2x+9}+\sqrt{x+7}\right)} = \\ &= \frac{x+2}{(x+2)(x+3)\left(\sqrt{2x+9}+\sqrt{x+7}\right)} = \\ &= \frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{2x+9}+\sqrt{x+7}\right)}.\end{aligned}$$

Полученная дробь не содержит неопределённости, так что нахождение предела сводится к простой подстановке значения $x=-2$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+7}}{x^2+5x+6} &= \frac{1}{(-2+3)\left(\sqrt{2(-2)+9}+\sqrt{-2+7}\right)} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}.\end{aligned}$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 290.59

Положить $x = t^{12}$.

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 290.60

Пользуясь формулой $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, дополнить числитель до разности кубов.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 290.62

В данном случае имеем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для её раскрытия применим стандартный приём. Вынесем из числителя и знаменателя x в старшей степени, а затем воспользуемся тем, что функции $1/x$ и $1/x^2$ бесконечно малые при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+x-x^2}{2x^2+3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}{2+\frac{3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}{2+\frac{3}{x}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}1}{\lim\limits_{x\to\infty}2+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{0+0-1}{2+3\cdot 0} = -\frac{1}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 290.75

Выражение в скобках представляет собой неопределённость вида $\infty - \infty$. Умножим и разделим функцию под знаком предела на выражение, сопряженное разности в скобках:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 291.1

Приведём данный предел к первому замечательному:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}2\frac{\sin 2x}{2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}.$$

Так как при $x\to 0$ функция $2x$ является бесконечно малой, то последний предел является первым замечательным и, таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1.$$

Значит, искомый предел равен 2. [Вернуться к условию]

Решение задачи 291.2

Воспользуемся первым замечательным пределом и свойствами пределов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x\,\dfrac{\sin 6x}{6x}}{2x\,\dfrac{\sin 2x}{2x}}=\lim_{x\to 0}3\frac{\dfrac{\sin 6x}{6x}}{\dfrac{\sin 2x}{2x}}=3\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{6x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}=3\frac{1}{1}=3.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 291.3

Сделаем замену $y = \arcsin x$. Так как $x = \sin y$ и $y \to 0$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 291.4

Представить тангенс как отношение синуса и косинуса и воспользоваться тем, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha = 1$.

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 291.5

Воспользоваться формулой $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 291.7

Данное выражение содержит неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем его к виду, содержащему первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos^3 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x(1-\cos^2 5x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x\sin^2 5x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}25\cos 5x\,\frac{\sin^2 5x}{(5x)^2}=\lim_{x\to 0}25\cos 5x\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2=25\cos 0\cdot 1^2=25.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 291.11

Воспользуемся формулой

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 4x\sin x}{x^2} = -8\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\,\frac{\sin x}{x} = -8.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 291.15

Имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Избавимся от иррациональности в числителе:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2\left(\sqrt{\cos x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\left(\sqrt{\cos x}+1\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}=-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1}+1}=-\frac{1}{4}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 291.19

Выполним замену переменной $y = x - \frac{\pi}{2}$. Новая переменная y, как того и требует первый замечательный предел, будет стремиться к нулю. Поэтому

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{2x-\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y}{2y} = -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = -\frac{1}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 291.25

Положить $t = \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 292.1

Имеем неопределённость 1^∞. Чтобы привести данный предел ко второму замечательному (3.8), выполним замену $y = k/x$. Ясно, что $y \to 0$ при $x \to \infty$. Тогда имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{k}{y}} = \left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^k = e^k.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 292.2

Обозначить $y = kx$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 292.3

Сводим данный предел ко второму замечательному:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x}=\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5}=\left(\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}}\right)^5.$$

Так как функция $\alpha(x)=5x$ бесконечно малая при $x\to 0$, то по формуле (3.8)

$$\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}}=e.$$

А это значит, что искомый предел равен e^5.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 292.6

Приведём данный предел к отношению двух вторых замечательных, разделив числитель и знаменатель на x, и воспользуемся задачей 292.1:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2}{x}\right)^x} = \frac{e^3}{e^{-2}} = e^5.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 292.12

Имеем неопределённость вида 1^{∞}. Выражение в скобках преобразуем к сумме единицы и бесконечно малой функции (БМФ), что позволит нам воспользоваться вторым замечательным пределом в форме (3.8):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-3}\right)^{2x+7} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+5}{x-3}-1\right)^{2x+7} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x-3}\right)^{2x+7} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{8}\,\frac{8}{x-3}\,(2x+7)} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{8}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16x+56}{x-3}}.$$

Так как функция $\alpha(x) = 8/(x-3)$ является бесконечно малой при $x \to \infty$, то по формуле (3.8) предел в основании степени равен e. Очевидно, что предел в показателе степени равен 16. Значит, искомый предел равен e^{16}.

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 292.22

Сделать замену $y = \sin x$.

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 292.23

Воспользоваться формулой $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 293.1

Так как функция $\alpha(x) = kx$ является бесконечно малой при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{kx}-1}{x} = \lim_{x\to 0} k\,\frac{e^{kx}-1}{kx} = k \lim_{x\to 0} \frac{e^{kx}-1}{kx} = k \cdot 1 = k.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 293.2

Воспользуемся следствиями первого и второго замечательных пределов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} = 6\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\,\frac{\dfrac{x}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} = 6\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} = 6\cdot 1\cdot 1 = 6.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 293.5

В знаменателе вынести за скобки e^x.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 293.10

Преобразуем данное выражение:

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x^2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2-1+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln\big((x^2-1)+1\big)}{x^2-1}\,\frac{x^2-1}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ln\big((x^2-1)+1\big)}{x^2-1} \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Так как функция $\alpha(x) = x^2 - 1$ является бесконечно малой при $x \to 1$, то искомый предел

$$L = 1 \cdot \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 293.17

Воспользуемся тем, что $\alpha(x) = x - 1$ — БМФ при $x \to 1$:

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{(x-1)+1} - 1}{x - 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{(x-1)+1} - 1}{x - 1} \lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 293.19

В числителе вынести за скобку $\sqrt[4]{1+x^2}$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 294.1

Так как $\operatorname{sign} x = 1$ при $x > 0$ и $\operatorname{sign} x = -1$ при $x < 0$, то имеем:

$$f(0-0) = \lim_{x \to -0} \Big(2 \operatorname{sign} x - 1\Big) = \lim_{x \to -0} \Big(2(-1) - 1\Big) = -3,$$

$$f(0+0) = \lim_{x \to +0} \Big(2 \operatorname{sign} x - 1\Big) = \lim_{x \to +0} \Big(2 \cdot 1 - 1\Big) = 1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 294.6

Для данной функции получаем:

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} (x-2) = 1-2 = -1,$$
$$f(1+0) = \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \ln x = \ln 1 = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 295.1

Находим предел отношения данных функций, используя первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1.$$

Так как предел равен единице, то $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$ при $x\to 0$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 296.1

Так как функции $4x$ и $3x$ являются бесконечно малыми при $x \to 0$, то $\sin 4x \sim 4x$ и $\sin 3x \sim 3x$ при $x \to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 296.12

Так как $1 = \ln e$, то

$$\ln x - 1 = \ln x - \ln e = \ln \frac{x}{e} = \ln\left(1 + \frac{x}{e} - 1\right).$$

Функция $\alpha(x) = \dfrac{x}{e} - 1$ бесконечно малая при $x \to e$, поэтому

$$\ln\left(1 + \frac{x}{e} - 1\right) \sim \frac{x}{e} - 1, \quad x \to e.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e} = \lim\limits_{x\to e} \dfrac{\frac{x}{e} - 1}{x - e} = \dfrac{1}{e}$.

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 296.17

Воспользоваться тем, что $\operatorname{arctg}(x-2) \sim x-2$ при $x \to 2$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 296.18

Воспользуемся таблицей эквивалентностей (см. п. 3.3.8) и задачей 295.1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{x^2}-1)}{2\sin x-\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,x^2}{2\sin x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x\,\dfrac{x^2}{2}}=1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 300.1

Будучи элементарной, данная функция непрерывна во всех точках своей области определения, т.е. в точке $x = 0$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 300.2

Область определения данной функции $D(f) = \mathbb{R}$. Поскольку функция $f(x)$ является элементарной, то она непрерывна для всех $x \in D(f) = \mathbb{R}$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 301.1

Найдём односторонние пределы в точке x_0 и сравним их со значением $f(x_0)$:

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} 0 = 0 \neq f(0), \qquad \lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} 1 = 1 = f(0).$$

Отсюда следует, что функция $f(x)$ непрерывна справа в точке x_0. В силу различия значений односторонних пределов она не является непрерывной в этой точке. [Вернуться к условию]

Решение задачи 302.1

Находим односторонние пределы в точке x_0:

$$f(x_0 - 0) = f(-0) = \frac{1}{0-1} = -1, \quad f(x_0 + 0) = f(+0) = (0+1)^2 = 1.$$

Оба предела существуют и конечны, но различны. Следовательно, x_0 является точкой конечного скачка, причём скачок

$$h = f(+0) - f(-0) = 2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 305.1

Если $|x| < \pi/2$, то $f(x)$ совпадает с элементарной функцией $y = \sin x$ и потому непрерывна. Для $|x| > \pi/2$ функция $f(x)$ также непрерывна, поскольку совпадает с элементарной функцией $y = 1/2$. Таким образом, исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ следует в точках $x = \pm\pi/2$.

В точке $x = \pi/2$

$$\lim_{x\to\pi/2-0} f(x) = \lim_{x\to\pi/2-0} \sin x = 1, \qquad \lim_{x\to\pi/2+0} f(x) = \lim_{x\to\pi/2+0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Итак, односторонние пределы в точке $x = \pi/2$ существуют, конечны и не равны между собой. Следовательно, функция $f(x)$ в этой точке терпит конечный разрыв со скачком

$$h = \left|f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)\right| = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

Аналогичным образом убеждаемся, что в точке $x = -\pi/2$ функция $f(x)$ также имеет конечный разрыв со скачком $h = 1/2$. Строим график (рис. Р.11).

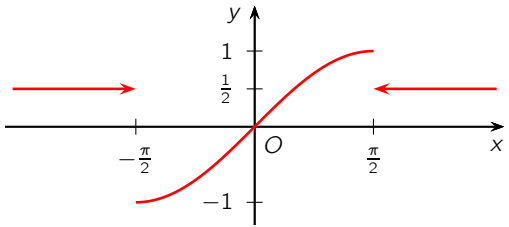

Рис. Р.11

[Вернуться к условию]

Решение задачи 305.12

Если $|x| < 1$, то

$$f(x) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x^n}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} x^n} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Если $|x| > 1$, то

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/x^n + 1} = \frac{1}{0+1} = 1.$$

При $x = 1$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1^n}{1+1^n} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

При $x = -1$ знаменатель задающей функцию $f(x)$ дроби для нечётных n обращается в нуль. Значит, в этой точке предел не существует и функция $f(x)$ не определена.

Итак, мы доказали, что

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| < 1, \\ 1/2 & \text{при } x = 1, \\ 1 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Поскольку

$$f(1-0) = 0, \quad f(1+0) = 1, \quad f(-1-0) = 1, \quad f(-1+0) = 0,$$

то эта функция в точках $x = \pm 1$ терпит конечный разрыв со скачком $h = 1$. В остальных точках функция $f(x)$ совпадает с постоянной функцией и потому непрерывна. Строим чертеж (рис. P.12).

[Вернуться к условию]

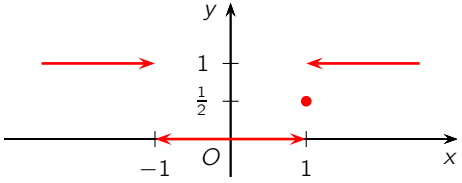

Рис. P.12

Решение задачи 306.1

При $x \neq 0$ функция $f(x)$ совпадает с элементарной функцией $2^{-1/x^2}$ и потому непрерывна. Исследуем функцию $f(x)$ на непрерывность в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2^{-1/x^2} = 2^{-\infty} = 0 \neq 2 = f(0).$$

Итак, предел функции $f(x)$ в точке $x = 0$ существует, но не равен значению функции в этой точке. Таким образом, в точке $x = 0$ данная функция имеет устранимый разрыв. [Вернуться к условию]

Решение задачи 309

Функция $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ является многочленом и потому непрерывна на отрезке $[1, 2]$. Найдем её значения на концах этого отрезка:

$$f(1) = 1 - 3 + 2 - 1 = -1 < 0, \quad f(2) = 16 - 12 + 4 - 1 = 7 > 0.$$

Полученные значения имеют разные знаки, поэтому по первой теореме Больцано — Коши существует точка $c \in (1, 2)$, в которой $f(c) = 0$. Число c и есть корень данного уравнения. [Вернуться к условию]

Глава 4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Решение задачи 317.1

Воспользовавшись правилами дифференцирования суммы и разности (4.4), производной степенной функции, получим:

$$y' = (x^3 + 3x^2 - 4)' = (x^3)' + (3x^2)' - 4' = 3x^2 + 3(x^2)' - 0 = \\ = 3x^2 + 3 \cdot 2x = 3x^2 + 6x.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 318.1

Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции (4.7) и таблицей производных (см. п. 4.1.5). Получим:

$$y' = (\operatorname{tg}^2 3x)' = 2\operatorname{tg} 3x \cdot (\operatorname{tg} 3x)' = 2\operatorname{tg} 3x \cdot \frac{1}{\cos^2 3x}\,(3x)' = \\ = 2\operatorname{tg} 3x \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3 = \frac{6\operatorname{tg} 3x}{\cos^2 3x}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 319.1

Применим формулу $y' = y \cdot (\ln y)'$. Найдем логарифмическую производную. При этом воспользуемся свойством логарифма:

$$\ln y = \ln(\sin x)^x = x \ln \sin x;$$

$$(\ln y)' = (x \ln \sin x)' = x' \ln \sin x + x(\ln \sin x)' = \ln \sin x + x\frac{\cos x}{\sin x}.$$

Подставим полученное выражение в исходную формулу:

$$y' = (\sin x)^x (\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 320.1

Пользуясь правилами дифференцирования и таблицей производных (см. п. 4.1.5), находим:

$$y' = \left((4-3x^5)^{\frac{1}{5}} + 4^x \frac{2}{\ln 4}\right)' = \frac{1}{5}(4-3x^5)^{-\frac{4}{5}} \cdot (-15x^4) + 4^x \ln 4 \cdot \frac{2}{\ln 4} =$$

$$= -\frac{3x^4}{\sqrt[5]{(4-3x^5)^4}} + 2 \cdot 4^x.$$

Теперь вместо x подставим 1:

$$y'(1) = -\frac{3 \cdot 1^4}{\sqrt[5]{(4-3 \cdot 1^5)^4}} + 2 \cdot 4^1 = -3 + 8 = 5.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 321.1

Найдем производную первого порядка:

$$y' = (3x^2 - x + 5)' = 6x - 1.$$

Производную второго порядка найдем по определению:

$$y'' = (y')' = (6x - 1)' = 6.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 322.1

Используя определение, находим последовательно производные:

$$y' = (5x^2 - 104x - 3)' = 10x - 104,$$
$$y'' = (y')' = (10x - 104)' = 10, \quad y''' = (y'')' = (10)' = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 323.1

Найдем первую и вторую производные указанной функции:

$$y' = (e^{-x})' = -e^{-x}, \qquad y'' = (-e^{-x})' = e^{-x}.$$

Несложно предположить, что

$$y^{(n)} = (-1)^n e^{-x}.$$

Проверим справедливость полученной формулы методом математической индукции. При $n = 1$ формула очевидно верна. Пусть это равенство выполняется при $n = k$, т.е.

$$y^{(k)} = (-1)^k e^{-x}.$$

Проверим его при $n = k + 1$, т.е. покажем, что

$$y^{(k+1)} = (-1)^{k+1} e^{-x}.$$

Действительно,

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = \left((-1)^k e^{-x}\right)' = (-1)^k(-1)e^{-x} = (-1)^{k+1} e^{-x}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 324.1

Прежде всего отметим, что

$$x' = 1, \quad (x)^{(k)} = 0, \ k = 2, 3, \ldots,$$
$$(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{\pi k}{2}\right).$$

Тогда, применив формулу Лейбница (4.12), получим:

$$\begin{aligned}(x\sin x)^{(100)} &= \sum_{k=0}^{n} C_{100}^{k}(x)^{(k)}(\sin x)^{(100-k)} = \\ &= C_{100}^{0}x(\sin x)^{(100)} + C_{100}^{1}x'(\sin x)^{(99)} = \\ &= x\sin(x+50\pi) + 100\sin\left(x + \frac{99\pi}{2}\right) = x\sin x - 100\cos x.\end{aligned}$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 325.1

Уравнение касательной имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

В данном случае

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1} = 1, \quad f(x_0) = f(1) = \ln 1 = 0.$$

Подставив полученные значения в уравнение касательной, получим:

$$y = 1 \cdot (x - 1) + 0,$$

т.е. $y = x - 1$.

Уравнение нормали (4.3) имеет вид

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

Значит, в данном случае уравнение нормали $y = -\frac{1}{1}(x - 1) + 0$, т.е. $y = -x + 1$.
Определим угол наклона касательной: $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = 1$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
Графики полученных функций изобразим на рис. Р.13.

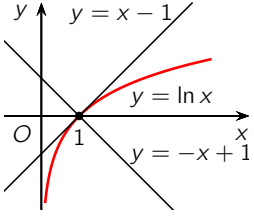

Рис. Р.13

[Вернуться к условию]

Решение задачи 346.1

Углом между кривыми в точке их пересечения называется угол между касательными к этим кривым в указанной точке.

Сначала определим точки пересечения данных кривых. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 2x, \\ x^2 + y^2 = 8, \end{cases}$$

откуда получим точки $(2, 2)$, $(2, -2)$.

Рассмотрим сначала точку $(2, 2)$. Для того чтобы найти угол между касательными, достаточно знать их угловые коэффициенты в этой точке. Для кривой $y^2 = 2x$ получим:

$$2yy' = 2, \quad y' = \frac{1}{y}, \quad k_1 = y'(2, 2) = \frac{1}{2}.$$

Для кривой $x^2 + y^2 = 8$ имеем:

$$2x + 2yy' = 0, \quad y' = -\frac{x}{y}, \quad k_2 = y'(2, 2) = -1.$$

Значит, для искомого угла

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{k_2 - k_1}{1 - k_1 k_2} = \frac{-1 - 1/2}{1 + 1/2} = -1,$$

т.е. острый угол между данными кривыми в точке $(2, 2)$ равен $\pi/4$.

Поступая аналогично для точки $(2, -2)$, будем иметь:

$$k_1 = -\frac{1}{2}, \quad k_2 = 1,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{1 + 1/2}{1 + 1/2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{4}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 347.1

Функция средних издержек выражается соотношением

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

В данном случае

$$AC(q) = \frac{50q - 0{,}05q^3}{q} = 50 - 0{,}05q^2.$$

При $q = 10$ средние издержки

$$AC(q) = 50 - 0{,}05 \cdot 10^2 = 45.$$

Функция предельных издержек выражается производной:

$$MC(q) = C'(q).$$

В данном случае

$$MC(q) = (50q - 0{,}05q^3)' = 50q - 0{,}15q^2.$$

При $q = 10$ предельные издержки

$$MC(q) = 50 - 0{,}15 \cdot 10^2 = 35.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 348.1

Эластичность определяется с помощью следующей формулы:

$$E_x(y) = \frac{x}{y}y'.$$

Значит, в данном случае

$$E_x(y) = \frac{x}{-0{,}5x + 80}(-0{,}5x + 80)' = \frac{-0{,}5x}{-0{,}5x + 80} = \frac{x}{x - 160}.$$

При $x = 60$ эластичность себестоимости

$$E_{60}(y) = \frac{60}{60 - 160} = -0{,}6.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 349.1

Производительность труда определяется производной от объема продукции:

$$z(t) = q'(t).$$

Скорость изменения производительности выражается производной от производительности труда:

$$v(t) = z'(t).$$

Темп изменения производительности равен логарифмической производной от производительности труда:

$$T_z(t) = (\ln z(t))' = \frac{z'(t)}{z(t)}.$$

В данном случае имеем:

$$z(t) = \left(-\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50\right)' = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100,$$

$$v(t) = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100\right)' = -5t + 15,$$

$$T_z(t) = \frac{-5t + 15}{-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100} = \frac{2t - 6}{t^2 - 6t - 40}.$$

Через час после начала работы, т.е. при $t = 1$, указанные параметры равны:

$$z(1) = -\frac{5}{2} + 15 + 100 = 112,5, \quad v(1) = -5 + 15 = 10,$$

$$T_z(1) = \frac{2 - 6}{1 - 6 - 40} = \frac{4}{45}.$$

За час до окончания работы, т.е. при $t = 8 - 1 = 7$, указанные параметры равны:

$$z(7) = -\frac{5}{2} \cdot 7^2 + 15 \cdot 7 + 100 = 82{,}5,$$
$$v(7) = -5 \cdot 7 + 15 = -20,$$
$$T_z(7) = \frac{2 \cdot 7 - 6}{7^2 - 6 \cdot 7 - 40} = -\frac{8}{33}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 350.1

Равновесная цена определяется из условия $q = s$. Поэтому, решив уравнение

$$\frac{p+8}{p+2} = p + 0,5,$$

получим $p = 2$, т.е. равновесная цена равна 2.

Эластичность спроса определяется формулой

$$E_p(q) = \frac{p}{q}q'(p) = \frac{p}{q}\left(\frac{p+8}{p+2}\right)' = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)},$$

а эластичность предложения — формулой

$$E_p(s) = \frac{p}{s}s'(p) = \frac{p}{s}(p+0,5)' = \frac{p}{p+0,5} = \frac{2p}{2p+1}.$$

Значит, эластичность спроса и предложения для равновесной цены $p = 2$ соответственно равны:

$$E_2(q) = -\frac{6\cdot 2}{(2+2)(2+8)} = -0,3, \quad E_2(s) = \frac{2\cdot 2}{2\cdot 2+1} = 0,8.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 351.1

Найдем производную:

$$y' = (\arcsin 2x)' = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot (2x)' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Значит, дифференциал функции

$$dy = y'dx = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 352.1

Воспользуемся формулой

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x.$$

В этом случае

$$f(x)=\sqrt{x},\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

При применении указанной формулы важно правильно выбрать точку x и Δx. Легко вычислить $\sqrt{25}=5$. Поэтому в качестве x положим 25, т.е.

$$x=25,\quad \Delta x=26-25=1.$$

Подставив полученные значения в исходную формулу, будем иметь

$$\sqrt{25+1}-\sqrt{25}\approx\frac{1}{2\sqrt{25}}\cdot 1.$$

Тогда

$$\sqrt{26}=\sqrt{25+1}\approx\frac{1}{10}+5=5{,}1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 354.1

Так как $\sin 2 \cdot 0 = 0$, $3 \cdot 0 = 0$, то применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin 2x)'}{(3x)'} \lim_{x \to 0} \frac{2\cos 2x}{3} = \frac{2\cos 0}{3} = \frac{2}{3}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 355.1

Область определения данной функции

$$D(y) = (-\infty, +\infty).$$

Найдем производную:

$$y' = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - 7\right)' = x^2 - 5x + 6.$$

Область ее определения $D(y') = (-\infty, +\infty)$.

Приравняв производную нулю:

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = 0,$$

найдем критические точки: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y	$\nearrow$	$-7/3$	$\searrow$	$-5/2$	$\nearrow$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Значит, $x_1 = 2$ — точка максимума, $y_{\max} = -7/3$; $x_2 = 3$ — точка минимума, $y_{\min} = -5/2$; функция возрастает при $x \in (-\infty, 2], [3, +\infty)$; функция убывает при $x \in [2, 3]$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 356.1

Область определения данной функции

$$D(y) = (-\infty, +\infty).$$

Найдем вторую производную:

$$y' = (x^4 - 4x^3 + x - 1)' = 4x^3 - 12x^2 + 1,$$
$$y'' = (4x^3 - 12x^2 + 1)' = 12x^2 - 24x.$$

Область ее определения $D(y'') = (-\infty, +\infty)$.

Приравняв y'' нулю:

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x^2 - 24x = 0,$$

найдем точки $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y	$\cup$	-1	$\cap$	-15	$\cup$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$

Значит, $(0, -1)$, $(2, -15)$ — точки перегиба; функция выпукла (выпукла вверх) при $x \in [0, 2]$; функция вогнута (выпукла вниз) при $x \in (-\infty, 0], [2, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 357.1

Функция $y = x^3 - 3x$ непрерывна на отрезке $[0, 2]$.

Найдем производную:

$$y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3.$$

Она также непрерывна на отрезке $[0, 2]$.

Приравняв производную нулю:

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 3 = 0,$$

найдем критические точки: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Точка $x_1 = -1 \notin [0, 2]$, а $x_2 = 1 \in [0, 2]$.

Вычислим значения функции в полученной точке и на концах отрезка:

$$y(1) = -2, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 2.$$

Значит, наибольшее значение функции

$$y_{\text{наиб}} = y(2) = 2;$$

наименьшее значение функции

$$y_{\text{наим}} = y(1) = -2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 358.1

Найдем вертикальные асимптоты.

Область определения функции $D(y) = (\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Поскольку

$$\lim_{x \to -1 \pm 0} \frac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty,$$

то $x = -1$ — вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты: $y = kx + b$. При $x \to +\infty$

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x(x+1)^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{(x+1)^2} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2 - 2x}{(x+1)^2} = -2.$$

Значит, $y = x - 2$ — наклонная асимптота.

Аналогичным образом получаем, что при $x \to -\infty$ прямая $y = x - 2$ также является наклонной асимптотой.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 359.1

Область определения $D(y) = (-\infty, +\infty)$. Найдем пределы при x, стремящемся к концам промежутков области определения:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2 - 9x + 1) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2 - 9x + 1) = -\infty.$$

Поскольку $D(y) = (-\infty, +\infty)$, то вертикальных асимптот нет.

Функция не является ни четной, ни нечетной, так как

$$y(-x) = \frac{1}{4}\big((-x)^3 + 3(-x)^2 - 9(-x) + 1\big) = \frac{1}{4}\big(-x^3 + 3x^2 + 9x + 1\big).$$

Функция не является периодической.

Для нахождения точек пересечения с осью Ox приравняем y нулю. Получим уравнение

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 1 = 0,$$

которое является достаточно сложным для решения, поэтому пропустим этот пункт.

Чтобы найти точки пересечения с осью Oy, положим в исходном уравнении $x = 0$. Тогда

$$y = \frac{1}{4}(0^3 + 3 \cdot 0^2 - 9 \cdot 0 + 1) = \frac{1}{4}.$$

Получили точку $(0, 1)$.

Исследуем функцию на монотонность и экстремум. Найдем производную:

$$y' = \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2 - 9x + 1)' = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}.$$

Область ее определения $D(y') = (-\infty, +\infty)$.

Приравняв производную нулю: $y' = 0$, т.е. $3x^2 + 6x - 9 = 0$, найдем критические точки: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y	$\nearrow$	7	$\searrow$	-1	$\nearrow$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Значит, $x_1 = -3$ — точка максимума, $y_{\max} = 7$; $x_2 = 1$ — точка минимума, $y_{\min} = -1$; функция возрастает при $x \in (-\infty, -3], [1, +\infty)$; функция убывает при $x \in [-3, 1]$.

Определим интервалы выпуклости и точки перегиба. Найдем вторую производную:

$$y'' = \frac{1}{4}(3x^2 + 6x - 9)' = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Область ее определения $D(y'') = (-\infty, +\infty)$.

Приравняв вторую производную нулю:

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0,$$

найдем точку $x = -1$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
y	$\cap$	3	$\cup$
y''	$-$	0	$+$

Значит, $(-1, 3)$ — точка перегиба; функция выпукла при $x \in (-\infty, -1]$; функция вогнута при $x \in [-1, +\infty)$.

Найдем наклонные асимптоты: $y = kx + b$. При $x \to +\infty$

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x + 1}{x} = \infty.$$

Значит, наклонных асимптот нет.

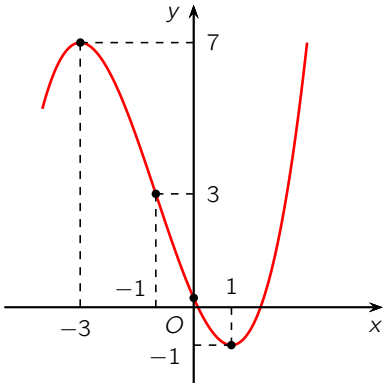

Рис. Р.14

Множество значений функции $E(y) = (-\infty, +\infty)$.
Построим график (рис. Р.14).

[Вернуться к условию]

Решение задачи 360.1

Доход, который можно получить, продав q единиц продукции по цене $p(q)$, равен $R(q) = qp(q)$. Поэтому функция прибыли будет иметь вид

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = qp(q) - C(q) = \\ = q\left(50 - \frac{q}{10}\right) - \frac{q}{50} - 15q - 800 = \frac{1749}{50}q - \frac{1}{10}q^2 - 800.$$

Исследуем функцию прибыли на максимальное значение при $q \geqslant 0$. Найдем производную:

$$\Pi'(q) = \left(\frac{1749}{50}q - \frac{1}{10}q^2 - 800\right)' = \frac{1749}{50} - \frac{1}{5}q.$$

Приравняем $\Pi'(q)$ нулю:

$$\Pi'(q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1749}{50} - \frac{1}{5}q = 0.$$

Отсюда $q = 174{,}9$.

Составим таблицу:

q	0	$(0, 174{,}9)$	174,9	$(174{,}9, +\infty)$
Π	-800	$\nearrow$	2259,001	$\searrow$
Π'		$+$	0	$-$

Значит, прибыль максимальна при продаже $q_{\max} = 174{,}9$ единиц продукции и составляет $\Pi_{\max} = 2259{,}001$.

Отметим, что если по смыслу задачи q — целое, то для нахождения решения дополнительно нужно вычислить значение функции $\Pi(q)$ в ближайших к полученному $q_{\max}$ целых числах. В нашем случае

$$\Pi(174) = 2258{,}92, \qquad \Pi(175) = 2259.$$

Поэтому при условии целочисленности q прибыль максимальна при продаже $q_{\max} = 175$ единиц продукции и составляет $\Pi_{\max} = 2259$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 361.1

Обозначим через C точку железной дороги, ближайшую к A, через D — точку между C и B, где подъездной путь будет пересекать железную дорогу (рис. Р.15).

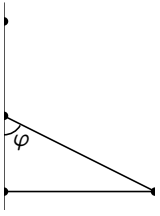

Рис. Р.15

Пусть $CD = x$, тогда по теореме Пифагора

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{64 + x^2}$$

длина подъездного пути к железной дороге. Кроме того, $BD = BC - x = 15 - x$ — длина пути по железной дороге. Учитывая стоимость провоза груза по подъездному пути и по железной дороге, найдем общую стоимость транспортировки:

$$s = s(x) = AD \cdot p + BD \cdot q = 4\sqrt{64 + x^2} + 2(15 - x).$$

По смыслу задачи $x \in [0, 15]$. Исследуем функцию $s(x)$ на наименьшее значение на этом отрезке. Найдем производную:

$$s'(x) = \left(4\sqrt{64 + x^2} + 2(15 - x)\right)' = \frac{4x}{\sqrt{64 + x^2}} - 2.$$

Приравняв производную нулю, найдем критические точки:

$$s'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4x}{\sqrt{64 + 4^2}} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8\sqrt{3}}{3} \in [0, 15].$$

Определим значения функции $s(x)$ в найденной точке и на концах отрезка $[0, 15]$:

$$s\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right) \approx 57{,}7, \quad s(0) = 62, \quad s(15) = 68.$$

Значит,

$$s_{\text{наим}} = s\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right) \approx 57{,}7.$$

Для нахождения угла φ поступим следующим образом:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AC}{CD} = \frac{8}{\frac{8\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3},$$

поэтому $\varphi = \pi/3$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 362.1

Пусть x млрд руб. инвестируется в производство, тогда $1-x$ млрд руб. размещается в банке. Через год размещенный в банке капитал

$$K_6(x) = (1-x)\left(1+\frac{p_1}{100}\right) = (1-x)\left(1+\frac{50}{100}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x,$$

а капитал, вложенный в производство,

$$K_{\text{пр}}(x) = x\left(1+\frac{p_2}{100}\right) = x\left(1+\frac{100}{100}\right) = 2x.$$

По условию задачи издержки составят $C(x) = ax^2 = 3x^2$, т.е. прибыль от вложения в производство $\Pi_1(x) = u(x) - K(x) = 2x - 3x^2$. Налоги составят

$$N(x) = \Pi_1(x)\frac{p_3}{100} = (2x-3x^2)\cdot 0{,}1.$$

Таким образом, чистая прибыль от вложения средств в производство

$$\Pi_{\text{пр}}(x) = \Pi_1(x) - N(x) = 2x - 3x^2 - (2x-3x^2)\cdot 0{,}1 = 0{,}9(2x-3x^2).$$

Значит, суммарная прибыль

$$\Pi(x) = K_6(x) + \Pi_{\text{пр}}(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x + 0{,}9(2x-3x^2) = 0{,}3x - 2{,}7x^2 + 1{,}5.$$

Исследуем функцию $\Pi(x)$ на наибольшее значение при $x \in [0,1]$. Найдем производную:

$$\Pi'(x) = (0{,}3x - 2{,}7x^2 + 1{,}5)' = 0{,}3 - 5{,}4x.$$

Приравняв ее нулю, отыщем критические точки:

$$\Pi'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0{,}3 - 5{,}4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{18}.$$

Найденная точка принадлежит отрезку исследования. Осталось вычислить значения данной функции в критических точках и на концах отрезка:

$$\Pi(0) = 1{,}5,$$
$$\Pi\left(\frac{1}{18}\right) = \frac{181}{120} \approx 1{,}508,$$
$$\Pi(1) = 0{,}3 - 2{,}7 + 1{,}5 = -0{,}9.$$

Значит, наибольшее значение функции $\Pi_{\text{наиб}} = \Pi\,(1/18) = 181/120$. Таким образом, для получения максимальной прибыли в производство следует вложить $x_1 = 1/18$ млрд руб., а в банк — $x_2 = 17/18$ млрд руб.

[Вернуться к условию]

Глава 5. Теория интегрирования

Решение задачи 384.1

Воспользуемся формулой возведения в квадрат, свойством линейности неопределенного интеграла и таблицей интегралов:

$$\int (2x+1)^2 dx = \int (4x^2+4x+1)dx = \int 4x^2 dx + \int 4x dx + \int dx =$$
$$= 4\int x^2 dx + 4\int x dx + \int dx = 4\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + x + C = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 385.1

Выполнив замену $3x = t$, сведем интеграл к табличному:

$$\int \cos 3x\,dx = \left| \begin{array}{l} 3x = t, \\ 3\,dx = dt, \\ dx = \dfrac{1}{3}\,dt \end{array} \right| = \int \cos t \frac{1}{3}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos t\,dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 385.2

Выполнив замену $\sin 5x = t$, сведем интеграл к табличному:

$$\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sin 5x = t, \\ 5\cos 5x\,dx = dt, \\ \cos 5x\,dx = \dfrac{1}{5}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{t^3}}\frac{1}{5}\,dt = \frac{1}{5}\int t^{-\frac{3}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{5}\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{5\sqrt{t}} + C = -\frac{2}{5\sqrt{\sin 5x}} + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 385.3

Выполнив замену $\operatorname{ctg} 4x = t$, сведем интеграл к табличному:

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}}{\sin^2 4x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{ctg} 4x = t, \\ -\dfrac{4}{\sin^2 4x}\,dx = dt, \\ \dfrac{dx}{\sin^2 4x} = -\dfrac{1}{4}\,dt \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\left(-\frac{1}{4}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{1}{4}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{6}\sqrt{t^3} + C = -\frac{1}{6}\sqrt{\operatorname{ctg}^3 4x} + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 385.4

Выполнив замену

$$\operatorname{arctg} x = t,$$

сведем интеграл к табличному:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = t, \\ \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= 2\sqrt{t} + C = 2\operatorname{arctg} x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 385.5

Выполнив замену

$$5 - 2x^2 = t,$$

сведем интеграл к табличному:

$$\int e^{5-2x^2} x\,dx = \left| \begin{array}{l} 5 - 2x^2 = t, \\ -4x\,dx = dt, \\ x\,dx = -\dfrac{1}{4}\,dt \end{array} \right| = \int e^t \left(-\frac{1}{4}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{4} e^t + C = -\frac{1}{4} e^{5-2x^2} + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 385.6

Разобьем интеграл на два:

$$\int \frac{2x-4}{x^2+16}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+16}\,dx - \int \frac{4}{x^2+16}\,dx.$$

Второй интеграл в правой части является табличным:

$$\int \frac{4}{x^2+16}\,dx = 4\cdot\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + C = \operatorname{arctg}\frac{x}{4} + C.$$

В первом интеграле выполним замену $x^2+16=t$:

$$\int \frac{2x}{x^2+16}\,dx = \left|\begin{array}{l} x^2+16=t, \\ 2x\,dx = dt \end{array}\right| = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln(x^2+16) + C.$$

Окончательно получим:

$$\int \frac{2x-4}{x^2+16}\,dx = \ln(x^2+16) - \operatorname{arctg}\frac{x}{4} + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 386.1

Воспользовавшись формулой интегрирования по частям (5.2)

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

получим:

$$\int \ln(x+8)\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(x+8), \\ dv = dx, \\ du = \dfrac{1}{x+8}\,dx, \\ v = x \end{array} \right| =$$

$$= x\ln(x+8) - \int \frac{x}{x+8}\,dx = x\ln(x+8) - \int \frac{x+8-8}{x+8}\,dx =$$

$$= x\ln(x+8) - \int \frac{x+8}{x+8}\,dx + \int \frac{8}{x+8}\,dx =$$

$$= x\ln(x+8) - x + 8\ln|x+8| + C = (x+8)\ln(x+8) - x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 386.2

Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int (x^2 - x + 1)\ln x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \\ dv = (x^2 - x + 1)\,dx, \\ du = \dfrac{1}{x}\,dx, \\ v = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x \end{array} \right| =$$

$$= \ln x\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right) - \int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + 1\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} - x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 386.3

Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int (3x-2)\ln^2 x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \\ dv = (3x-2)\,dx, \\ du = \dfrac{2\ln x}{x}\,dx, \\ v = \dfrac{3x^2}{2} - 2x \end{array} \right| =$$

$$= \ln^2 x\left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right) - \int \left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right)\frac{2\ln x}{x}\,dx =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right)\ln^2 x - 2\int \left(\frac{3x}{2} - 2\right)\ln x\,dx.$$

Последний интеграл также возьмем по частям:

$$\int \left(\frac{3x}{2} - 2\right) \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \\ dv = \left(\dfrac{3x}{2} - 2\right) dx, \\ du = \dfrac{1}{x}\, dx, \\ v = \dfrac{3x^2}{4} - 2x \end{array} \right| =$$

$$= \ln x \left(\frac{3x^2}{4} - 2x\right) - \int \left(\frac{3x^2}{4} - 2x\right) \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{4} - 2x\right) \ln x - \int \left(\frac{3x}{4} - 2\right) dx =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{4} - 2x\right) \ln x - \frac{3x^2}{8} + 2x + C.$$

Окончательно получим:

$$\int (3x - 2) \ln^2 x \, dx = \left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right) \ln^2 x - \left(\frac{3x^2}{2} - 4x\right) \ln x + \frac{3x^2}{4} + 4x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 386.4

Воспользуемся формулой интегрирования по частям. Положим

$$u = \arcsin 2x, \quad dv = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx.$$

Тогда будем иметь:

$$du = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx,$$

$$v = \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} 1-4x^2 = t, \\ -8x\,dx = dt, \\ x\,dx = -\dfrac{1}{8}\,dt, \end{array} \right| = -\frac{1}{8}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{t} + C = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C.$$

Поэтому

$$\int \frac{x \arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx =$$

$$= \arcsin 2x \left(-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\right) - \int \left(-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\right) \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x + \frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x + \frac{1}{2}x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 386.5

Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int (x+8)\sin 3x\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x+8, \\ dv = \sin 3x\,dx, \\ du = dx, \\ v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{3}(x+8)\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x\,dx = -\frac{1}{3}(x+8)\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 386.6

Воспользуемся формулой интегрирования по частям дважды:

$$\int (x^2-3)\cos x\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x^2-3, \\ dv = \cos x\,dx, \\ du = 2x\,dx, \\ v = \sin x \end{array}\right| =$$

$$= (x^2-3)\sin x - 2\int x\sin x\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x, \\ dv = \sin x\,dx, \\ du = dx, \\ v = -\cos x \end{array}\right| =$$

$$= (x^2-3)\sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x\,dx\right) =$$

$$= (x^2-3)\sin x - 2(-x\cos x + \sin x) + C =$$

$$= (x^2-5)\sin x + 2x\cos x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 386.7

Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int x\cos(x-4)\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x, \\ dv = \cos(x-4)\,dx, \\ du = dx, \\ v = \sin(x-4) \end{array}\right| =$$

$$= x\sin(x-4) - \int \sin(x-4)\,dx = x\sin(x-4) + \cos(x-4) + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 387.1

Выпишем знаменатель и выделим в нем полный квадрат:

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1.$$

Подставим полученное выражение в исходный интеграл и сделаем замену:

$$\int \frac{2x-3}{(x+1)^2+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} x+1 = t, \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{2(t-1)-3}{t^2+1}\,dt = \int \frac{2t-5}{t^2+1}\,dt.$$

Далее разобьем подынтегральную дробь на две и воспользуемся известными методами:

$$\int \frac{2t-5}{t^2+1}\,dt = \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt - 5\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \ln(t^2+1) - 5\operatorname{arctg} t + C =$$
$$= \ln(x^2+2x+2) - 5\operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 387.2

Подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь. Поэтому, разделив числитель на знаменатель, получим:

$$\frac{x^3+2x^2+2x+3}{x^3-x^2+3x-3}=1+\frac{3x^2-x+6}{x^3-x^2+3x-3}.$$

Значит,

$$\int\frac{x^3+2x^2+2x+3}{x^3-x^2+3x-3}\,dx=x+\int\frac{3x^2-x+6}{x^3-x^2+3x-3}\,dx.$$

Для вычисления интеграла в правой части сначала разложим на множители знаменатель:

$$x^3-x^2+3x-3=x^2(x-1)+3(x-1)=(x^2+3)(x-1).$$

Теперь разобьем подынтегральную дробь на простейшие дроби, воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов. Имеем:

$$\frac{3x^2-x+6}{(x^2+3)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{C}{x-1}=\frac{Ax^2-Ax+Bx-B+Cx^2+3C}{(x^2+3)(x-1)}.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в конечном и начальном числителе, получим систему

$$\begin{cases}A+C=3,\\-A+B=-1,\\-B+3C=6,\end{cases}$$

решив которую, найдем: $A=1$, $B=0$, $C=2$.

Возвращаясь к вычислению интеграла, будем иметь:

$$\int\frac{3x^2-x+6}{(x^2+3)(x-1)}\,dx=\int\frac{x}{x^2+3}\,dx+\int\frac{2}{x-1}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+2\ln|x-1|+C.$$

Окончательно получим:

$$\int \frac{x^3+2x^2+2x+3}{x^3-x^2+3x-3}\,dx = x+\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+2\ln|x-1|+C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 388.1

Сделаем замену:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[4]{2x-1} = t, \\ 2x-1 = t^4, \\ x = \frac{1}{2}(t^4-1), \\ dx = 2t^3\,dt \end{array} \right| = \int \frac{2t^3\,dt}{t^2-t} = 2\int \frac{t^2\,dt}{t-1}.$$

Мы получили интеграл от рациональной функции. Для вычисления отнимем и добавим в числителе единицу, разобьем интеграл на сумму интегралов и воспользуемся таблицей интегралов:

$$\begin{aligned} 2\int \frac{t^2\,dt}{t-1} &= 2\int \frac{t^2-1+1}{t-1}\,dt = 2\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = \\ &= 2\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C = \\ &= \sqrt{2x-1}+2\sqrt[4]{2x-1}+\ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2+C. \end{aligned}$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 388.2

Сделаем замену:

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+2}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x}+2=t, \\ x=(t-2)^2, \\ dx=2(t-2)dt \end{array} \right| = \int \frac{(t-2)^2-1}{t}\cdot 2(t-2)\,dt =$$

$$= 2\int \frac{t^3-6t^2+11t-6}{t}\,dt.$$

Полученный интеграл представим в виде суммы:

$$2\int \frac{t^3-6t^2+11t-6}{t}\,dt = 2\int \left(\frac{t^3}{t}-6\frac{t^2}{t}+11\frac{t}{t}-6\frac{1}{t}\right)dt =$$

$$= 2\int t^2\,dt - 12\int t\,dt + 22\int dt - 12\int \frac{1}{t}\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}t^3 - 6t^2 + 22t - 12\ln|t| + C =$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{x}+2)^3 - 6(\sqrt{x}+2)^2 + 22(\sqrt{x}+2) - 12\ln(\sqrt{x}+2) + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2x + 6\sqrt{x} - 12\ln(\sqrt{x}+2) + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 389.1

Для вычисления интеграла применим формулу

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)).$$

Тогда

$$\int \sin 2x\cos 3x dx = \frac{1}{2}\int(\sin 5x - \sin x)dx = \\ = \frac{1}{2}\int \sin 5x dx - \frac{1}{2}\int \sin x dx = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 389.2

Произведем замену:

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t, \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 389.24

С помощью универсальной тригонометрической подстановки сведем данную задачу к интегрированию рациональной функции. Будем иметь:

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t, \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{1}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{3+t^2}.$$

Вычислив последний интеграл с помощью таблицы интегралов:

$$\int \frac{dt}{3+t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C$$

и произведя обратную замену, окончательно получим:

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 394.1

Воспользуемся свойством линейности определенного интеграла и применим формулу Ньютона — Лейбница (5.26):

$$\int_0^2 (6x^2 - 5)\,dx = 6\int_0^2 x^2\,dx - 5\int_0^2 dx = 6\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - 5x\Big|_0^2 =$$

$$= 6\left(\frac{8}{3} - 0\right) - 5(2 - 0) = 16 - 10 = 6.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 395.1

Вычислим интеграл с помощью замены переменной. При этом дополнительно следует проконтролировать, как изменятся границы интегрирования. Именно:

$$\int\limits_0^1 xe^{x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l} x^2 = t, \\ 2x\,dx = dt, \\ x\,dx = \frac{1}{2}\,dt, \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \end{array}\right| = \int\limits_0^1 e^t \cdot \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}e^t\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 395.2

Выполнив замену $\ln x = t$, получим:

$$\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t, \\ \frac{1}{x}\,dx = dt, \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline e & 1 \\ 1 & 0 \\ \hline \end{array} \right| = \int\limits_0^1 \sin t\,dt = -\cos t\Big|_0^1 =$$

$$= -\cos 1 + \cos 0 = 1 - \cos 1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 395.3

Воспользуемся свойством четности подынтегральной функции. Тогда

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = 2\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Теперь выполним замену $x = \sin t$. Получим:

$$2\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = \sin t, \\ dx = \cos t\, dt, \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 1/2 & \pi/6 \\ 0 & 0 \end{array} \end{array} \right| = 2\int\limits_{0}^{\pi/6} \frac{\cos t\, dt}{(1-\sin^2 t)\sqrt{1-\sin^2 t}} =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{\pi/6} \frac{dt}{\cos^2 t} = 2\operatorname{tg} t\Big|_{0}^{\pi/6} = 2\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} 0\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 395.4

Выполним замену $4+\sqrt{\sin y}=t$. Получим:

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos y\,dy}{4+\sqrt{\sin y}}=\left|\begin{array}{l}4+\sqrt{\sin y}=t,\\ \sin y=(t-4)^2,\\ \cos y\,dy=2(t-4)\,dt,\\ \begin{array}{r|l}y & t\\ \hline \pi/2 & 5\\ 0 & 4\end{array}\end{array}\right|=\int\limits_4^5\frac{2(t-4)\,dt}{t}=$$

$$=2\left(\int\limits_4^5 dt-4\int\limits_4^5\frac{dt}{t}\right)=2\left(t\Big|_4^5-4\ln|t|\Big|_4^5\right)=2-8\ln\frac{5}{4}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 395.5

Преобразуем подынтегральную функцию следующим образом:

$$\int\limits_{-3/2}^{2} \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx = \int\limits_{-3/2}^{2} \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+4}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-3/2}^{2} \frac{(x^2+3x+4)-(5x+3)}{x^2+3x+4}\,dx = \int\limits_{-3/2}^{2} dx - \int\limits_{-3/2}^{2} \frac{5x+3}{x^2+3x+4}\,dx.$$

Первый из полученных интегралов вычисляется элементарно:

$$\int\limits_{-3/2}^{2} dx = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$

В знаменателе подынтегральной функции второго интеграла выделим полный квадрат:

$$x^2+3x+4 = x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 4 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-3/2}^{2} \frac{5x+3}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\,dx = \left|\begin{array}{l} x+\frac{3}{2}=t, \\ dx=dt, \\ \begin{array}{r|r} x & t \\ \hline 2 & 7/2 \\ -3/2 & 0 \end{array} \end{array}\right| = \int\limits_{0}^{7/2} \frac{5\left(t-\frac{3}{2}\right)+3}{t^2+\frac{7}{4}}\,dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{7/2} \frac{5t-\frac{9}{2}}{t^2+\frac{7}{4}}\,dt = 5\int\limits_{0}^{7/2} \frac{t\,dt}{t^2+\frac{7}{4}} - \frac{9}{2}\int\limits_{0}^{7/2} \frac{dt}{t^2+\frac{7}{4}}\,dt =$$

$$= \frac{5}{2}\int\limits_{0}^{7/2} \frac{d\left(t^2+\frac{7}{4}\right)}{t^2+\frac{7}{4}} - \frac{9}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{7}}\Bigg|_0^{7/2} =$$

$$= \frac{5}{2}\ln\left(t^2+\frac{7}{4}\right)\Bigg|_0^{7/2} - \frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{7}}\Bigg|_0^{7/2} =$$

$$= \frac{5}{2}\left(\ln 14 - \ln\frac{7}{4}\right) - \frac{9}{\sqrt{7}}(\operatorname{arctg}\sqrt{7} - \operatorname{arctg} 0) = \frac{5}{2}\ln 8 - \frac{9\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\sqrt{7}.$$

Окончательно получим:

$$\int\limits_{-3/2}^{2} \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx = \frac{7}{2} - \frac{15}{2}\ln 2 + \frac{9\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\sqrt{7}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 395.6

Воспользуемся методом интегрирования рациональных функций. Для этого разложим знаменатель на множители. Получим:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

Разобьем подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \\ = \frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2+Cx-Bx-C}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Приравнивая коэффициенты в числителях последней и первой дроби, составим и решим систему:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A-B+C=1, \\ A-C=0; \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A, \\ C=A, \\ A+A+A=1; \end{cases} \quad \begin{cases} A=1/3, \\ B=-1/3, \\ C=1/3. \end{cases}$$

Таким образом, исходный интеграл

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{x\,dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{0} \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Вычислим каждый из интегралов в правой части последнего равенства. Будем иметь:

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big|_{-1}^{0} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2,$$

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = \int\limits_{-1}^{0} \frac{x-1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \left|\begin{array}{l} x+\frac{1}{2}=t, \\ dx=dt, \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 1/2 \\ -1 & -1/2 \end{array} \end{array}\right| =$$

$$= \int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{t-\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt - \frac{3}{2}\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt =$$

$$= 0 - 3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}\Big|_{0}^{1/2} =$$

$$= -2\sqrt{3}\operatorname{arctg}1\sqrt{3} = -2\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Отметим, что при вычислении использовалось свойство четности подынтегральной функции. Окончательно

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{x\,dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\left(-\ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{3}\ln 2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 395.7

Воспользуемся формулой понижения степени для тригонометрических функций. Будем иметь:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int\limits_0^{\pi/2} dx - 3\int\limits_0^{\pi/2} \cos 2x\,dx + 3\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 2x\,dx - \int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 2x\,dx\right).$$

Вычислим каждый из полученных интегралов:

$$\int\limits_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int\limits_0^{\pi/2} \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0) = 0,$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\pi\right) - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{4}\sin 0\right) = \frac{\pi}{4},$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 2x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 2x\cdot\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (1-\sin^2 2x)\,d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} = 0.$$

Окончательно получим:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + 3\cdot\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{5\pi}{32}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 395.10

Воспользуемся формулой интегрирования по частям для определенного интеграла (5.30). Получим:

$$\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x, \\ dv = \sin x dx, \\ du = dx, \\ v = -\cos x \end{array}\right| = -x\cos x\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi}(-\cos x)\,dx =$$

$$= -(\pi(-1) - 0) + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi + 0 = \pi.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 395.11

Воспользуемся методом интегрирования по частям. Получим:

$$\int\limits_{-3}^{0}(x-2)e^{-x/3}\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x-2, \\ dv = e^{-x/3}\,dx, \\ du = dx, \\ v = -3e^{-x/3} \end{array}\right| = -3(x-2)e^{-x/3}\Big|_{-3}^{0} + 3\int\limits_{-3}^{0} e^{-x/3}\,dx =$$

$$= 6 - 15e - 9e^{-x/3}\Big|_{0}^{\pi} = 6 - 15e - 9 + 9e = -6e - 3.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 395.12

Разделив числитель и знаменатель подынтегральной дроби на $\sqrt{3x+2}$, получим:

$$\int\limits_0^2 \frac{\left(4\sqrt{2-x}-\sqrt{3x+2}\right)dx}{\left(\sqrt{3x+2}+4\sqrt{2-x}\right)(3x+2)^2} = \int\limits_0^2 \frac{4\sqrt{\dfrac{2-x}{3x+2}}-1}{1+4\sqrt{\dfrac{2-x}{3x+2}}}\,\frac{dx}{(3x+2)^2}.$$

Выполним замену:

$$\int\limits_0^2 \frac{4\sqrt{\dfrac{2-x}{3x+2}}-1}{1+4\sqrt{\dfrac{2-x}{3x+2}}}\,\frac{dx}{(3x+2)^2} = \left|\begin{array}{c} \sqrt{\dfrac{2-x}{3x+2}} = t, \quad 2-x = 3xt^2+2t^2, \\ x = \dfrac{2-2t^2}{3t^2+1}, \quad dx = \dfrac{-16t}{(3t^2+1)^2}\,dt, \\ 3x+2 = \dfrac{8}{3t^2+1}, \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \end{array}\right| =$$

$$= \int\limits_1^0 \frac{4t-1}{1+4t}\,\frac{(3t^2+1)^2}{64}\,\frac{-16t}{(3t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{4t^2-t}{4t+1}\,dt.$$

Разделив числитель на знаменатель, будем иметь:

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{4t^2-t}{4t+1}\,dt = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \left(t-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{4t+1}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}+\frac{1}{8}\ln|4t+1|\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\ln 5\right) = \frac{\ln 5}{32}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 396.1

Сделаем чертеж (рис. P.16).

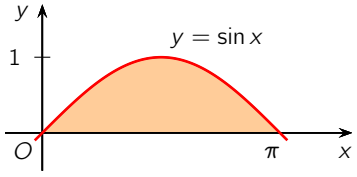

Рис. P.16

Воспользуемся формулой для вычисления площади криволинейной трапеции:

$$S = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 397.1

Сделаем чертеж (рис. P.17).

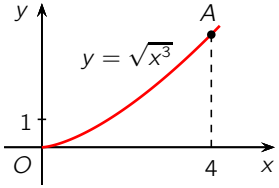

Рис. P.17

Для нахождения длины дуги кривой OA воспользуемся формулой (5.33). При этом

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Тогда

$$L = \int\limits_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \left| \begin{array}{c} 1 + \frac{9}{4}x = t,\ \frac{9}{4}\,dx = dt,\ dx = \frac{4}{9}\,dt, \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 4 & 10 \\ 0 & 1 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_1^{10} \sqrt{t}\,\frac{4}{9}\,dt = \frac{4}{9}\int\limits_1^{10} t^{1/2}\,dt = \frac{4}{9}\frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_1^{10} = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 398.1

Сделаем чертеж (рис. Р.18).

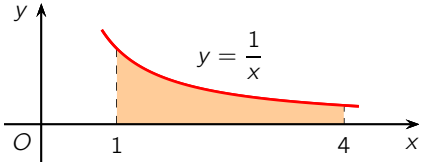

Рис. Р.18

Для вычисления объема тела, полученного вращением этой криволинейной трапеции вокруг оси Ox, применим формулу (5.34):

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = -\pi \left.\frac{1}{x}\right|_1^4 = -\pi \left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 399.1

Среднее значение издержек можно вычислить по формуле

$$K_{\text{ср}} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int\limits_{x_1}^{x_2} K(x)\,dx.$$

Подставив исходные значения в указанную формулу, получим:

$$K_{\text{ср}} = \frac{1}{3-0} \int\limits_0^3 (3x^2 + 4x + 2)\,dx = (x^3 + 2x^2 + 2x)\Big|_0^3 = \frac{1}{3}(27 + 12 + 6 - 0) = 15.$$

Для того чтобы найти объем продукции, при котором издержки принимают значение, равное 15, следует решить уравнение

$$K(x) = 15 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 4x + 2 = 15.$$

Корнями этого уравнения являются числа $x_1 = 5/3$ и $x_2 = -3$. По смыслу задачи искомый объем равен $5/3$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 400.1

Объем V продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от t_1 до t_2, выражается формулой

$$V = \int_{t_1}^{t_2} z(t)\,dt.$$

В данном случае

$$V = \int_1^2 \left(\frac{2}{3t+4} + 3\right) dt = \left(\frac{2}{3}\ln|3t+3| + 3t\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3}\ln 10 - \frac{2}{3}\ln 7 + 6 - 3 = \frac{2}{3}\ln\frac{10}{7} + 3.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 401.1

Несложно вычислить, что капиталовложения задаются функцией $f(t) = m + nt = 10 + t$. В силу того что дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле

$$K = \int_0^T f(t)e^{-\frac{p}{100}t}\,dt,$$

в данном случае получим:

$$K = \int_0^3 (10+t)e^{-0{,}08t}\,dt = \left|\begin{array}{l} u = 10+t, \\ dv = e^{-0{,}08t}\,dt, \\ du = dt, \\ v = -12{,}5e^{-0{,}08t} \end{array}\right| =$$

$$= -12{,}5(10+t)e^{-0{,}08t}\Big|_0^3 + 12{,}5\int_0^3 e^{-0{,}08t}\,dt =$$

$$= -162{,}5e^{-0{,}24} + 125 - 156{,}25e^{-0{,}08t}\Big|_0^3 =$$

$$= -162{,}5e^{-0{,}24} + 125 - 156{,}25e^{-0{,}24} + 156{,}25 \approx 30{,}5.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 402.1

Запас товаров на складе, образуемый за k дней, можно вычислить по формуле

$$V = \int_0^k f(t)\,dt.$$

В данном случае

$$V = \int_0^2 (3t^2 + 3t + 4)\,dt = \left(t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 4t\right)\Big|_0^2 = 22.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 403.1

По определению несобственного интеграла с бесконечным пределом интегрирования имеем:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^A x^{-3}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_1^A \right) = \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{-2A^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 403.3

По определению несобственного интеграла с бесконечным пределом интегрирования имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos 3x\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^{A} \cos 3x\,dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{3} \sin 3x \Big|_1^A \right) = \frac{1}{3} \lim_{A\to+\infty} (\sin 3A - \sin 3).$$

Так как

$$\lim_{A\to+\infty} \sin 3A$$

не существует, то данный несобственный интеграл расходится.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 403.4

По определению несобственного интеграла с бесконечным пределом интегрирования имеем:

$$\int\limits_{1/3}^{+\infty} \frac{\pi\,dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{1/3}^{A} \frac{\pi\,dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x}.$$

Выполним замену $\operatorname{arctg} 3x = t$. Тогда

$$\int\limits_{1/3}^{A} \frac{\pi\,dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x} = \left| \begin{array}{c} \operatorname{arctg} 3x = t, \\ \dfrac{3\,dx}{1+9x^2} = dt, \\ \begin{array}{r|r} x & t \\ \hline A & \operatorname{arctg} 3A \\ 1/3 & \pi/4 \end{array} \end{array} \right| = \frac{\pi}{3} \int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3A} \frac{dt}{t^2} =$$

$$= -\frac{\pi}{3}\frac{1}{t}\Big|_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3A} = -\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{\operatorname{arctg} 3A} - \frac{4}{\pi}\right).$$

Значит, исходный интеграл

$$\int\limits_{1/3}^{+\infty} \frac{\pi\,dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x} = -\frac{\pi}{3}\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\operatorname{arctg} 3A} - \frac{4}{\pi}\right) = -\frac{\pi}{3}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\right) = \frac{2}{3}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 404.1

Подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

является неограниченной в любой окрестности точки $x = 0$. По определению несобственного интеграла от неограниченной функции имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(2\sqrt{x} \Big|_\varepsilon^1 \right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(2 - 2\sqrt{\varepsilon} \right) = 2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 404.2

Найдем область определения подынтегральной функции. Для этого приравняем знаменатель нулю:

$$9x^2 - 9x + 2, \quad D = 81 - 72 - 9, \quad x_1 = \frac{9-3}{18} = \frac{1}{3}, \; x_2 = \frac{9+3}{18} = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, заключаем, что подынтегральная функция является неограниченной в любой окрестности точки $x = 1/3$. Тогда по определению несобственного интеграла от неограниченной функции имеем:

$$\int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2} = \frac{1}{9} \lim_{\varepsilon \to 1/3^-} \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)}.$$

Разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{1}{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)} = \frac{A}{x - \frac{1}{3}} + \frac{B}{x - \frac{2}{3}} = \frac{Ax - \frac{2}{3}A + Bx - \frac{1}{3}B}{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)}.$$

Сравнив коэффициенты в числителях последней и исходной дроби, составим и решим систему:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -\frac{2}{3}A - \frac{1}{3}B = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} B = -A, \\ -\frac{2}{3}A + \frac{1}{3}A = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} A = -3, \\ B = 3. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)} &= 3\left(-\int\limits_0^{\varepsilon} \frac{dx}{x - \frac{1}{3}} + \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{dx}{x - \frac{2}{3}}\right) = \\ &= 3\left(-\ln\left|x - \frac{1}{3}\right|\Big|_0^{\varepsilon} + \ln\left|x - \frac{2}{3}\right|\Big|_0^{\varepsilon}\right) = \\ &= 3\left(-\ln\left|\varepsilon - \frac{1}{3}\right| + \ln\frac{1}{3} + \ln\left|\varepsilon - \frac{2}{3}\right| - \ln\frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Окончательно для исходного интеграла будем иметь:

$$\int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{9x^2-9x+2} = \frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \to 1/3^-} \left(-\ln\left|\varepsilon - \frac{1}{3}\right| + \ln\frac{1}{3} + \ln\left|\varepsilon - \frac{2}{3}\right| - \ln\frac{2}{3} \right) = \infty,$$

т.е. исходный интеграл расходится.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 404.5

Подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$$

является неограниченной в любой окрестности точки $x = 3$. По определению несобственного интеграла от неограниченной функции имеем:

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2} = \lim_{\varepsilon \to 3-0} \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{dx}{(x-3)^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 3-0} \left(-\frac{1}{x-3} \Big|_0^{\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \to 3-0} \left(-\frac{1}{\varepsilon - 3} - \frac{1}{3} \right) = \infty.$$

Значит, данный интеграл расходится. [Вернуться к условию]

Глава 6. Дифференцирование функций двух переменных

Решение задачи 405.1

Подставляем в функцию z абсциссу точки M вместо x и ординату вместо y:

$$z\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = 2^2 \cos\frac{\pi}{3} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 406.1

Область определения функции z состоит из всех точек плоскости, для которых

$$1 - x^2 - y^2 \geqslant 0, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1,$$

и потому представляет собой круг с центром в начале координат и единичным радиусом, включающий свою границу — окружность.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 406.2

Координаты точек области определения удовлетворяют условию

$$-1 \leqslant x+y \leqslant 1, \quad \begin{cases} x+y \geqslant 1, \\ x+y \leqslant 1. \end{cases}$$

Эта область представляет собой полосу, ограниченную параллельными прямыми $x+y+1=0$ и $x+y-1=0$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 407.1

Являясь элементарной, данная функция непрерывна на всей своей области определения. Единственная точка разрыва — это нуль знаменателя, расположенный в начале координат $O(0,0)$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 408.1

Дифференцируем функцию ρ по каждой из её переменных, считая другую переменную постоянной:

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = 4u^3 \cos^2 \varphi, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = u^4 \cdot 2 \cos \varphi (-\sin \varphi) = -u^4 \sin 2\varphi.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 408.2

Дифференцируем функцию z по переменной x, считая y постоянной, а затем по переменной y, считая x постоянной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 12xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6x^2 + 3y^2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 408.19

При нахождении частных производных по каждой из трех переменных считаем остальные две переменные постоянными:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z^{xy^2} \ln z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^{xy^2} \ln z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy^2 z^{xy^2-1}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 413.1

Сначала находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 8xy^3 + 7y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 12x^2y^2 + 7x.$$

Затем находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 8y^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 24xy^2 + 7, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24x^2y.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 414.1

Находим частные производные функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}.$$

Подставляем найденные выражения в левую часть уравнения:

$$\frac{1}{x}\frac{2xy}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y}\left(\ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}\right) =$$
$$= \frac{2y}{x^2 - y^2} + \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y} - \frac{2y}{x^2 - y^2} = \frac{y\ln(x^2 - y^2)}{y^2} = \frac{z}{y^2}.$$

Получили, что левая часть уравнения тождественно равна правой. А это и означает, что функция z удовлетворяет данному уравнению.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 417.1

Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Выписываем полный дифференциал в виде (6.4):

$$dz = \frac{x\,dx - y\,dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 417.18

Находим частные производные:

$$u'_x = \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}, \quad u'_y = \frac{-xy}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}, \quad u'_z = \frac{-xz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}.$$

Выписываем полный дифференциал (6.4):

$$du = \frac{dx}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{xy\,dy + xz\,dz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 419.1

Число $1{,}07^{3{,}97}$ представляет собой значение функции $f(x, y) = x^y$ при $x = 1{,}07$ и $y = 3{,}97$. Легко вычислить, что при $x_0 = 1$ и $y_0 = 4$

$$f(x_0, y_0) = 1^4 = 1.$$

Находим приращения переменных:

$$\Delta x = x - x_0 = 1{,}07 - 1 = 0{,}07, \quad \Delta y = y - y_0 = 3{,}97 - 4 = -0{,}03.$$

Вычисляем частные производные в точке (x_0, y_0):

$$f'_x = yx^{y-1}, \qquad f'_x(x_0, y_0) = 4 \cdot 1^{4-1} = 4,$$
$$f'_y = x^y \ln x, \qquad f'_y(x_0, y_0) = 1^4 \ln 1 = 0.$$

Находим приближённое значение $f(x, y)$, заменяя приращение функции полным дифференциалом:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \Delta f \approx f(x_0, y_0) + df = \\ &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y = \\ &= 1 + 4 \cdot 0{,}07 + 0 \cdot (-0{,}03) = 1 + 0{,}28 = 1{,}28. \end{aligned}$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 419.6

Принять $\pi = 3{,}14$.

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 419.7

Выразить приращения аргументов в радианах, считая, что $\pi = 3{,}14$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 420.1

Не прибегая к формуле (6.5) производной сложной функции, просто подставим x и y в z:

$$z(t) = e^{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = e^{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = e^{a^2}.$$

Так как производная постоянной равна нулю, то $dz/dt = 0$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 420.4

Здесь непосредственная подстановка приводит к усложнению выкладок и результата. Применяем формулу (6.5) для производной сложной функции:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (5x^4 + 2y)(-2\sin 2t) + (2x - 3y^2)\frac{1}{1+t^2} = \\ = -2(5x^4 + 2y)\sin 2t + \frac{2x - 3y^2}{1+t^2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 420.8

По формуле (6.5) производной сложной функции

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} = (y + yu)\cos t + (x + xu)\frac{1}{t} + (xy)e^t =$$
$$= (1 + u)\left(y\cos t + \frac{x}{t}\right) + xye^t.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 421.1

Выписываем направляющие косинусы заданного направления:

$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Находим частные производные функции z в точке M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 2.$$

Тогда по формуле (6.9)

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3}+1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 426.1

Находим частные производные функции z и их значения в точке M:

$$z'_x = 2x, \quad z'_x(2,-1) = 4, \qquad z'_y = 4y, \quad z'_y(2,-1) = -4.$$

Тогда

$$\operatorname{grad} z = \big(z'_x(M), z'_y(M)\big) = (4,-4).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 427.1

По определению

$$\operatorname{grad} u = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right) = \left(2xyz, x^2z^3, 3x^2yz^2\right).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 428.1

По определению градиента

$$\operatorname{grad} u = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right) = (2x - 1, -2y + z, y)\,.$$

Подставляем координаты точки M:

$$\operatorname{grad} u(M) = (2 \cdot 1 - 1, -2 \cdot 0 + (-1), 0) = (1, -1, 0)\,.$$

Находим модуль градиента, определяющий значение максимального роста функции u:

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 430

Производная $z'_x = 2x/y$ показывает, что при одном и том же расстоянии между городами увеличение потока пассажиров пропорционально удвоенному числу жителей.

Производная $z'_y = -x^2/y^2$ показывает, что при одной и той же численности жителей увеличение потока пассажиров обратно пропорционально квадрату расстояния между городами. [Вернуться к условию]

Решение задачи 431.2

Выполняем дифференцирование:

$$u'_x = \frac{a_1}{1-b_1}(1-b_1)(x-c_1)^{-b_1} = a_1 x^{-b_1},$$
$$u'_y = \frac{a_2}{1-b_2}(1-b_2)(x-c_2)^{-b_2} = a_2 x^{-b_2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 434.1

В данном случае

$$\sigma_{xy} = -\frac{d\ln\dfrac{x}{y}}{d\ln\dfrac{a\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}}{a\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}}} = -\frac{d\ln\dfrac{x}{y}}{d\ln\dfrac{\alpha y}{\beta x}} = -\frac{d\ln\dfrac{x}{y}}{d\left(\ln\dfrac{\alpha}{\beta}-\ln\dfrac{x}{y}\right)} = \frac{d\ln\dfrac{x}{y}}{d\ln\dfrac{x}{y}} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 435.1

Определяем частные производные:

$$z'_x = 2x + y - 2, \quad z'_y = x + 2y - 3.$$

Находим подозрительные на экстремум, т.е. стационарные, точки:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ -3x + 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$x = \frac{1}{3}, \quad y = 2 - 2x = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Таким образом, единственной стационарной точкой функции z является точка $M_0(1/3, 4/3)$.
Находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = 2, \quad z''_{xy} = 1, \quad z''_{yy} = 2.$$

Отсюда имеем, что в точке M_0

$$A = z''_{xx}(M_0) = 2, \quad B = z''_{xy}(M_0) = 1, \quad C = z''_{yy}(M_0) = 2,$$
$$\Delta = AC - B^2 = 3.$$

Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то, согласно теореме 6.8, в точке M_0 данная функция имеет минимум, причём

$$z_{\min} = z\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} - \frac{2}{3} - 4 = \frac{5}{3} - 4 = -\frac{7}{3}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 436.1

Находим частные производные функции z:

$$z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2, \quad z'_x = 4xy - 3x^2y - 2xy^2, \quad z'_y = 2x^2 - x^3 - 2x^2y.$$

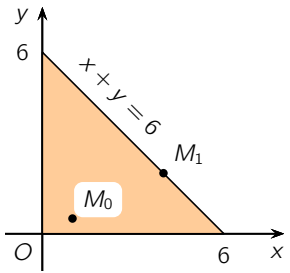

Рис. Р.19

Ищем стационарные точки внутри треугольника D (рис. Р.19):

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4xy - 3x^2y - 2xy^2 = 0, \\ 2x^2 - x^3 - 2x^2y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} xy(4 - 3x - 2y) = 0, \\ x^2(2 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Внутри треугольника D имеют место неравенства $x > 0$ и $y > 0$. Это позволяет сократить левую и правую части первого из уравнений полученной системы на xy и второго — на x^2:

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0, \\ 2 - x - 2y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 - 2y, \\ 4 - 3(2 - 2y) - 2y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 - 2y, \\ 4y = 2. \end{cases}$$

Отсюда имеем стационарную точку $M_0(1, 1/2)$. Очевидно, что она лежит внутри треугольника D. Для этой точки

$$z(M_0) = 1^2 \cdot \frac{1}{2}\left(2 - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Исследуем функцию z на границе области. На сторонах $x = 0$ и $y = 0$ треугольника D функция z принимает нулевые значения. Для стороны $x + y = 6$ воспользуемся тем, что $y = 6 - x$, и представим функцию z как функцию $z_1(x)$ одной переменной x, заданную на отрезке $[0, 6]$:

$$z_1(x) = x^2(6 - x)\big(2 - x - (6 - x)\big) = (6x^2 - x^3)(-4) = 4x^3 - 24x^2.$$

Ищем стационарные точки функции $z_1(x)$:

$$z_1'(x) = 0, \quad 12x^2 - 48x = 0, \quad x(x - 4) = 0.$$

Имеем два корня: $x = 0$ и $x = 4$. Из них только $x = 4$ лежит внутри интервала $(0, 6)$. Ему соответствуют точка $M_1(4, 2)$, в которой

$$z(M_1) = z_1(4) = 4 \cdot 4^3 - 24 \cdot 4^2 = 16(16 - 24) = -128.$$

Очевидно, что на концах отрезка $[0, 6]$, соответствующих вершинам $(6, 0)$ и $(0, 6)$ треугольника D, функция $z_1(x)$ обращается в нуль.

Мы доказали, что наименьшее и наибольшее значения функции z в треугольнике D может достигаться либо на сторонах $x = 0$ и $y = 0$, где она обращается в нуль, либо в точках M_0 и M_1. Следовательно,

$$z_{\text{наим}} = z(M_1) = -128, \quad z_{\text{наиб}} = z(M_0) = \frac{1}{4}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 437.1

Найдём стационарные точки функции z:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ 2y + 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

Имеем единственную стационарную точку $M_0(2, -1)$, которая принадлежит области D. Вычисляем значение функции в этой точке:

$$z(M_0) = 4 + 1 - 8 - 2 = -5.$$

Для поиска максимума и минимума на границе применим метод множителей Лагранжа. Строим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 4x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 45).$$

Находим стационарные точки функции Лагранжа:

$$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_\lambda = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 4 + 2\lambda x = 0, \\ 2y + 2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 45 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{2}{1+\lambda}, \\ y = -\dfrac{1}{1+\lambda}, \\ x^2 + y^2 - 45 = 0, \end{cases}$$

Подставляем значения x и y из двух первых уравнений в третье:

$$\frac{4}{(1+\lambda)^2} + \frac{1}{(1+\lambda)^2} = 45, \quad \frac{5}{(1+\lambda)^2} = 45, \quad (1+\lambda)^2 = \frac{1}{9}.$$

Отсюда имеем:

$$1 + \lambda_1 = \frac{1}{3}, \quad 1 + \lambda_2 = -\frac{1}{3},$$

$$x_1 = \frac{2}{1/3} = 6, \; y_1 = -\frac{1}{1/3} = -3, \quad x_2 = \frac{2}{-1/3} = -6, \; y_1 = -\frac{1}{-1/3} = 3.$$

Итак, на границе обнаружены две стационарные точки функции Лагранжа: $M_1(6,-3)$ и $M_2(-6,3)$. В этих точках

$$z(M_1) = 36 + 9 - 24 - 6 = 15, \quad z(M_2) = 36 + 9 + 24 + 6 = 75.$$

Сравнивая значения функции z в точках M_0, M_1 и M_2, приходим к выводу, что

$$z_{\text{наим}} = z(2,-1) = -5, \quad z_{\text{наиб}} = z(-6,3) = 75.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 439.1

Приравнивая ординаты данных двух линий, приходим к квадратному уравнению

$$x^2 = x - 5, \quad x^2 - x + 5 = 0,$$

не имеющему решений. Это означает, что данные парабола и прямая не имеют общих точек, что видно также из рис. Р.20.

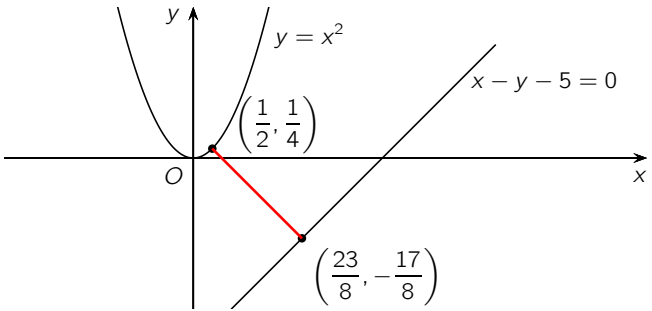

Рис. Р.20

Возьмём произвольную точку $M(x, x^2)$ параболы и точку $N(y, y-5)$ прямой. Тогда квадрат расстояния между этими точками, который обозначим $f(x, y)$, может быть вычислен по формуле

$$f(x, y) = (x - y)^2 + (x^2 - y + 5)^2.$$

Для решения поставленной задачи достаточно найти минимум функции $f(x, y)$.
Находим стационарные точки функции f:

$$\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2(x - y) + 4x(x^2 - y + 5) = 0, \\ -2(x - y) - 2(x^2 - y + 5) = 0. \end{cases}$$

Сложим оба уравнения:

$$(4x-2)(x^2-y+5)=0.$$

Если бы выполнялось равенство $x^2-y+5=0$, то из второго уравнения системы следовало бы, что и $x-y=0$. А это означало бы, что парабола и прямая имеют общую точку, что, как мы знаем, неверно. Таким образом,

$$4x-2=0, \quad x=1/2.$$

Подставим полученное значение x во второе уравнение системы:

$$-2\left(\frac{1}{2}-y\right)-2\left(\frac{1}{4}-y+5\right)=0, \quad 4y=\frac{23}{2}, \quad y=\frac{23}{8}.$$

Делаем вывод, что единственной стационарной точкой функции $f(x,y)$ является точка

$$M_0\left(\frac{1}{2},\frac{23}{8}\right).$$

Из геометрических соображений (рис. P.20) ясно, что минимум функции $f(x,y)$ достигается в некоторой точке, являющейся, согласно необходимому условию локального экстремума, стационарной точкой функции $f(x,y)$. Этой точкой будет M_0, поскольку других стационарных точек функция $f(x,y)$ не имеет.

Итак, расстояние между данными параболой и прямой совпадает с расстоянием между их точками $(1/2,1/4)$ и $(23/8,-17/8)$ и равно

$$\sqrt{f(M_0)}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{23}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{23}{8}+5\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\left(\frac{19}{8}\right)^2+\left(\frac{19}{8}\right)^2}=\frac{19\sqrt{2}}{8}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 441

Прибыль равна разности выручки и издержек:

$$P(x, y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2.$$

Ищем стационарные точки функции прибыли:

$$\begin{cases} 8 - 2x - y = 0, \\ 10 - x - 2y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 8 - 2x - y = 0, \\ -6 + 3x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 8 - 2 \cdot 2 = 4. \end{cases}$$

Имеем стационарную точку $M_0(2, 4)$. Вычисляем вторые производные функции $P(x, y)$:

$$A = P''_{xx} = -2, \quad B = P''_{xy} = -1, \quad C = P''_{yy} = -2.$$

Так как $\Delta = AC - B^2 = 3 > 0$ и $A < 0$, то по теореме 6.8 точка M_0 является точкой локального максимума прибыли, причем

$$P_{\max} = P(M_0) = 8 \cdot 2 + 10 \cdot 4 - 2^2 - 2 \cdot 4 - 4^2 = 28.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 443

Обозначим через x м, y м и h м длину, ширину и глубину бассейна. По условию

$$h = \frac{V}{xy} = \frac{32}{xy} \text{ м}.$$

Определим, при каких значениях x и y площадь бассейна

$$S = xy + 2xh + 2yh = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

будет минимальной.

Находим частные производные площади $S = S(x, y)$:

$$S'_x = y - \frac{64}{x^2}, \quad S'_y = x - \frac{64}{y^2}.$$

Находим стационарные точки функции $S(x, y)$ при $x > 0$ и $y > 0$:

$$\begin{cases} S'_x = 0, \\ S'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y - \dfrac{64}{x^2} = 0, \\ x - \dfrac{64}{y^2} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 y = 64, \\ xy^2 = 64, \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy(x - y) = 0, \\ xy^2 = 64, \end{cases} \quad \begin{cases} x = y, \\ x^3 = 64, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 4. \end{cases}$$

Имеем единственную стационарную точку $M_0(4, 4)$.

Из практических соображений ясно, что функция $S(x, y)$ достигает своего минимума в некоторой конечной точке, лежащей внутри I координатной четверти (попытайтесь строго доказать данное утверждение). Эта точка является стационарной и, следовательно, совпадает с M_0.

Таким образом, бассейн должен иметь длину и ширину, равные 4 м. Его глубина

$$h = \frac{32}{xy} = \frac{32}{4 \cdot 4} = 2\,\text{м}.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 451

См. задачу 439.1.

[Вернуться к условию]

Глава 7. Дифференциальные уравнения

Решение задачи 452.1

Продифференцируем данное равенство по x:

$$y' = C.$$

Подставим найденное выражение для C в исходное равенство:

$$y = y'x \quad \text{или} \quad y'x - y = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 452.5

Продифференцируем данное равенство по x:

$$2yy' = 2C \quad \text{или} \quad C = yy'.$$

Подставим найденное выражение для C в исходное равенство:

$$y^2 = 2yy'x \quad \text{или} \quad y = 2y'x.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 453.1

Это уравнение вида

$$y''' = f(x).$$

Интегрируя, получаем:

$$y'' = \int \frac{6}{x^3}\,dx = -3x^{-2} + C_1,$$

$$y' = \int (-3x^{-2} + C_1)\,dx = \frac{3}{x} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{3}{x} + C_1 x + C_2\right)\,dx = 3\ln|x| + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3,$$

или

$$y = 3\ln|x| + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 453.4

Это уравнение вида $y'' = f(x)$. Интегрируем его:

$$y' = \int 3\sin^2 x \cos x\, dx = 3\int \sin^2 x\, d(\sin x) = \sin^3 x + C_1,$$

$$y = \int (\sin^3 x + C_1)\, dx = C_1 x - \int (1 - \cos^2 x) d(\cos x) =$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C_1 x + C_2.$$

Для нахождения частного решения воспользуемся начальными условиями

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3} = -1 + \dfrac{1}{3} + C_2, \\ 0 = 0 + C_1. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Окончательно получаем:

$$y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + 1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 454.1

Это уравнение с разделяющимися переменными. Поэтому

$$xy\,dx + (x+1)\,dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)\,dy = -xy\,dx.$$

Разделив переменные, получим:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x\,dx}{x+1}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x\,dx}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln|C|.$$

Преобразуем полученное равенство, воспользовавшись свойствами логарифмов:

$$y = C(x+1)e^{-x}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 454.6

Это уравнение с разделяющимися переменными. Поэтому

$$\frac{dy}{dx} = y(2x+1).$$

Разделив переменные, получим:

$$\frac{dy}{y} = (2x+1)\,dx.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dy}{y} = \int (2x+1)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln|y| = x^2 + x + \ln|C|.$$

Преобразуем полученное равенство, воспользовавшись свойствами логарифмов:

$$y = Ce^{x^2+x}.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее данному начальному условию:

$$1 = Ce^0,$$

откуда $C = 1$. Осталось подставить найденное значение в общее решение:

$$y = e^{x^2+x}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 455.1

Это однородное уравнение. Выполним замену:

$$y = ux, \quad dy = u\,dx + x\,du.$$

Подставим указанные выражения в исходное уравнение:

$$x(u\,dx + x\,du) - x(1+u)\,dx = 0,$$
$$u\,dx + x\,du - (1+u)\,dx = 0.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Перенесем слагаемые, содержащие dx, вправо:

$$x\,du = (1+u)\,dx - u\,dx, \quad x\,du = dx.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$du = \frac{dx}{x}, \quad \int du = \int \frac{dx}{x},$$

откуда

$$u = \ln|x| + C.$$

Учитывая замену, получаем общее решение уравнения:

$$y = x(\ln|x| + C).$$

Для нахождения частного решения используем начальное условие:

$$2 = 1 \cdot (\ln 1 + C).$$

Значит, $C = 2$. Тогда частное решение имеет вид

$$y = x(\ln|x| + 2).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 455.2

Это однородное уравнение. Произведем замену:

$$y = ux, \quad y' = u'x + u.$$

Подставим указанные выражения в исходное уравнение:

$$u'x + u = \frac{ux}{x} \ln \frac{ux}{x}, \quad u'x + u = u \ln u.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Произведем необходимые преобразования:

$$x\frac{du}{dx} = u \ln u - u, \quad x\frac{du}{dx} = u(\ln u - 1).$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x},$$

откуда

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln|C|, \quad \ln u = Cx + 1, \quad u = e^{Cx+1}.$$

Учитывая замену, получаем общее решение уравнения:

$$y = xe^{Cx+1}.$$

Для нахождения частного решения используем начальное условие:

$$1 = 1 \cdot e^{C+1}.$$

Значит, $C = -1$. Тогда частное решение имеет вид

$$y = xe^{1-x}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 455.12

Представим уравнение в виде

$$y' = \frac{x + 2y + 1}{2x - 3}.$$

Это уравнение можно привести к однородному. Для этого решим систему

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0, \\ 2x - 3 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы:

$$x_0 = \frac{3}{2}, \quad y_0 = -\frac{5}{4}.$$

Выполним замену:

$$x = X + x_0, \quad y = Y + y_0,$$

т.е.

$$x = X + \frac{3}{2}, \quad y = Y - \frac{5}{4}.$$

Будем иметь:

$$Y' = \frac{X + \frac{3}{2} + 2\left(Y - \frac{5}{4}\right) + 1}{2\left(X + \frac{3}{2}\right) - 3}, \quad Y' = \frac{X + 2Y}{2X}.$$

Получили однородное уравнение. Решим его стандартным образом. Пусть

$$Y = uX, \quad Y' = u'X + u.$$

Тогда

$$u'X + u = \frac{X + 2uX}{2X}, \quad u'X + u = \frac{1 + 2u}{2}, \quad X\frac{du}{dX} = \frac{1}{2}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$du = \frac{dX}{2x}, \quad \int du = \int \frac{dX}{2x},$$

откуда

$$u = \frac{1}{2}\ln|X| + C.$$

Произведем обратную замену:

$$Y = X\left(\frac{1}{2}\ln|X| + C\right).$$

Окончательно будем иметь:

$$y + \frac{5}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\ln\left|x - \frac{3}{2}\right| + C\right), \quad 4y + 5 = (2x - 3)\left(\ln\left|x - \frac{3}{2}\right| + C\right).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 456.1

Это линейное уравнение. Решим его двумя способами.

Первый способ (метод Лагранжа). Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y' - y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = y.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{dy}{y} = dx, \quad \int \frac{dy}{y} = \int dx,$$

откуда $\ln|y| = x + \ln|C|$, или $y = Ce^x$. Общее решение заданного уравнения ищем в виде

$$y = C(x)e^x,$$

где $C(x)$ — некоторая функция. Найдем:

$$y' = C'(x)e^x + C(x)e^x.$$

Подставим полученное выражение в исходное уравнение:

$$C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = e^x.$$

Отсюда $C'(x) = 1$, или $C(x) = x + C$. Следовательно, общее решение данного уравнения

$$y = (x + C)e^x.$$

Второй способ (метод Бернулли). Полагаем $y = uv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — некоторые функции от x, тогда $y' = u'v + v'u$. С учетом указанной замены исходное уравнение примет вид

$$u'v + v'u - uv = e^x,$$
$$u'v + u(v' - v) = e^x. \qquad \text{(Р.2)}$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю, т.е. решим уравнение с разделяющимися переменными:

$$v' - v = 0, \quad \frac{dv}{dx} = v, \quad \frac{dv}{v} = dx,$$

откуда $\ln|v| = x + \ln|C|$, или $v = Ce^x$. Поскольку нам достаточно какого-либо одного ненулевого решения уравнения, то возьмем $v = e^x$ (положили $C = 1$). Подставим найденное v в уравнение (P.2):

$$u'e^x = e^x, \quad u' = 1.$$

Значит, $u = x + C$. Произведя обратную замену, получим общее решение исходного уравнения:

$$y = (x + C)e^x.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 456.5

Запишем уравнение в виде

$$x^2y' - xy = y^2.$$

Это уравнение Бернулли. Путем замены $y = 1/u$ его можно свести к линейному, однако удобнее сразу применить метод Бернулли.

Полагаем $y = uv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — некоторые функции от x. При этом $y' = u'v + v'u$. Тогда данное уравнение примет вид

$$\begin{aligned} x^2(u'v + v'u) - xuv &= u^2v^2, \\ x^2u'v + xu(xv' - v) &= u^2v^2. \end{aligned} \tag{P.3}$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю, т.е. решим уравнение с разделяющимися переменными:

$$xv' - v = 0, \quad x\frac{dv}{dx} = v, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},$$

откуда $\ln|v| = \ln|x| + \ln|C|$, или $v = Cx$. Поскольку нам достаточно какого-либо одного ненулевого решения уравнения, то возьмем $v = x$ (положили $C = 1$). Подставим найденное v в уравнение (P.3):

$$x^3u' = u^2x^2, \quad \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Значит,

$$-\frac{1}{u} = \ln|x| - C, \quad u = \frac{1}{C - \ln|x|}.$$

Произведя обратную замену, получим общее решение исходного уравнения:

$$y = \frac{x}{C - \ln x}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 456.13

Данное уравнение не является линейным относительно y и y', но является таковым относительно x и x'. Поэтому преобразуем его следующим образом:

$$x + y^2 + x' = 0, \quad x' + x = -y^2.$$

Решим полученное уравнение методом Бернулли. Полагаем $x = uv$, где $u = u(y)$, $v = v(y)$ — некоторые функции от y. При этом $x' = u'v + v'u$. Тогда данное уравнение примет вид

$$\begin{aligned} u'v + v'u + uv &= -y^2, \\ u'v + u(v' + v) &= -y^2. \end{aligned} \tag{P.4}$$

Подберем функцию $v = v(y)$ так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю, т.е. решим уравнение с разделяющимися переменными:

$$v' + v = 0, \quad \frac{dv}{dy} = -v, \quad \frac{dv}{v} = -dy,$$

откуда $\ln|v| = -y + \ln|C|$, или $v = Ce^{-y}$. Поскольку нам достаточно какого-либо одного ненулевого решения уравнения, то возьмем $v = e^{-y}$ (положили $C = 1$). Подставим найденное v в уравнение (P.4):

$$u'e^{-y} = -y^2, \quad du = -y^2 e^y\, dy.$$

Значит,

$$u = -y^2 e^y + 2ye^y - 2e^y + C.$$

Произведя обратную замену, получим общее решение исходного уравнения:

$$x = (-y^2 e^y + 2ye^y - 2e^y + C)e^{-y} = Ce^{-y} - y^2 + 2y - 2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 457

Модель роста в условиях конкурентного рынка в данном случае задается уравнением

$$y' = (2 - y)y.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{dy}{y(y-2)} = dt, \quad \ln\left|\frac{y-2}{y}\right| = -2t + \ln|C|,$$

откуда

$$\frac{y-2}{y} = Ce^{-2t},$$

или

$$y = \frac{2}{1 - Ce^{-2t}}.$$

Принимая во внимание начальное условие, найдем константу C:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{1 - Ce^0}, \quad C = -3.$$

Таким образом, объем реализованной продукции описывается равенством

$$y = \frac{2}{1 + 3e^{-2t}}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 458

Пусть $Y = Y(t)$ — функция, описывающая изменение национального дохода. Тогда производная $Y'(t)$ показывает скорость изменения национального дохода. Учитывая условие задачи, получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dY}{dt} = kY,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Поэтому

$$\frac{dY}{Y} = dt, \quad Y = C_1 e^{kt}.$$

Учитывая начальное условие, определим постоянную C_1:

$$C_1 = 100.$$

Таким образом, изменение национального дохода описывается функцией $Y = 100\, e^{kt}$.

Пусть теперь $D = D(t)$ — функция, описывающая изменение национального долга. Так как дефицит в расходах приводит к возрастанию долга, то

$$\frac{dD}{dt} = qY,$$

где q — коэффициент пропорциональности.

Подставив найденное значение Y, решим это уравнение:

$$dD = 100q\, e^{kt}\, dt, \quad D = \frac{100q}{k} e^{kt} + C_2.$$

Найдем константу C_2:

$$50 = \frac{100q}{k} + C_2, \quad C_2 = 50 - \frac{100q}{k}.$$

Окончательно заключаем, что функция, описывающая изменение национального долга, имеет вид

$$D = 50 + \frac{100q}{k}\left(e^{kt} - 1\right).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 459

Если $x(t)$ — количество людей, знающих о продукции, то

$$N - x(t)$$

количество людей, которые о ней не знают. Учитывая предположение, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x),$$

где k — коэффициент пропорциональности. Решим это уравнение:

$$\frac{dx}{x(N-x)} = k\,dt, \quad \frac{1}{N}\ln\frac{x}{N-x} = kt + C.$$

Учитывая начальное условие, определим постоянную C:

$$C = \frac{1}{N}\ln\frac{x_0}{N-x_0}.$$

Тогда

$$\frac{1}{N}\ln\frac{x}{N-x} = kt + \frac{1}{N}\ln\frac{x_0}{N-x_0}, \quad \ln\frac{x}{N-x} = Nkt + \ln\frac{x_0}{N-x_0}.$$

Потенциируя, получаем $\dfrac{x}{N-x} = \dfrac{x_0}{N-x_0}\,e^{Nkt}$, откуда

$$x = \frac{N\dfrac{x_0}{N-x_0}\,e^{Nkt}}{1 + \dfrac{x_0}{N-x_0}\,e^{Nkt}}.$$

Теперь разделим числитель и знаменатель на $\dfrac{e^{Nkt}x_0}{N-x_0}$:

$$x = \frac{N}{1 + \dfrac{N-x_0}{x_0}\,e^{-Nkt}}.$$

Обозначим через $\alpha = N/x_0$ отношение количества всех людей к количеству людей, знающих о продукции в начальный момент времени. Окончательно получим:

$$x = \frac{N}{1 + (\alpha - 1)\, e^{-Nkt}}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 460

В данном случае функция дохода удовлетворяет уравнению

$$Y(t) = \frac{1}{2}Y'(t) + 2t,$$

или

$$Y'(t) - 2Y(t) = -4t.$$

Полученное уравнение является линейным неоднородным уравнением первого порядка. Положим

$$Y = uv, \quad Y' = u'v + uv'.$$

Тогда

$$u'v + uv' - 2uv = -4t, \quad u'v + u(v' - 2v) = -4t.$$

Определим функцию v:

$$\frac{dv}{dt} = 2v, \quad \frac{dv}{v} = 2\,dt, \quad \ln|v| = 2t,$$

откуда $v = e^{2t}$. Осталось определить функцию u:

$$u'e^{2t} = -4t, \quad u' = -4te^{-2t}.$$

Интегрируя, получаем:

$$u = 2te^{-2t} + e^{-2t} + C.$$

Значит,

$$Y = uv = (2te^{-2t} + e^{-2t} + C)e^{2t} = 2t + 1 + Ce^{2t}.$$

Используя начальное условие $Y(0) = 2$, найдем постоянную C:

$$2 = 1 + C,$$

откуда $C = 1$. Окончательно функция дохода имеет вид

$$Y = 2t + 1 + e^{2t}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 463

Решим уравнение

$$P' = \frac{1}{10}P.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{dP}{P} = \frac{1}{10}\,dt, \quad \ln|P| = \frac{1}{10}t + \ln|C|,$$

откуда $P = Ce^{t/10}$. Так как первоначальная сумма равна A, то

$$A = Ce^0, \quad C = A,$$

т.е. $P = Ae^{t/10}$. Теперь определим момент времени, когда сумма вклада удвоится, т.е. станет равной $2A$:

$$2A = Ae^{t/10}, \quad e^{t/10} = 2.$$

Значит,

$$t = 10\ln 2 \approx 6{,}93.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 465.1

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0,$$
$$D = 25 - 16 = 9,$$
$$\lambda_1 = \frac{5-3}{2} = 1,\ \lambda_2 = \frac{5+3}{2} = 4.$$

Значит, общее решение запишется в виде (см. формулу (7.20))

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 465.2

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,$$
$$D = 36 - 36 = 0,$$
$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{6}{2} = 3.$$

Значит, общее решение запишется в виде (см. формулу (7.21))

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 465.3

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения $D = -36 < 0$. Поэтому определим числа

$$\alpha = -\frac{8}{2} = -4, \quad \beta = \frac{\sqrt{36}}{2} = 3.$$

Значит, общее решение запишется в виде (см. формулу (7.22))

$$y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 466.1

Выполним подстановку $x = e^t$. Тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Значит, исходное уравнение примет следующий вид:

$$e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 2e^te^{-t}\frac{dy}{dt} - 6y = 0,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0.$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$
$$D = 1 + 24 = 25,$$
$$\lambda_1 = \frac{-1-5}{2} = -3, \ \lambda_2 = \frac{-1+5}{2} = 2.$$

Значит, общее решение запишется в виде

$$y = C_1e^{-3t} + C_2e^{4t}.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем:

$$y = \frac{C_1}{x^3} + C_2x^2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 466.5

Выполним подстановку

$$2x+1=e^t,\quad x=\frac{1}{2}(e^t-1).$$

Тогда

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=2e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)2e^{-t}}{\frac{1}{2}e^t}=4e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right).$$

Значит, исходное уравнение примет вид

$$e^{2t}4e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)-4e^te^{-t}\frac{dy}{dt}+4y=0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0.$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2-2\lambda+1=0,$$

$$D=4-4=0,$$

$$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\frac{-2}{2}=1.$$

Значит, общее решение запишется в виде

$$y=C_1e^t+C_2te^t.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем:

$$y = C_1(2x+1) + C_2(2x+1)\ln(2x+1).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 467.1

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4 = 0, \quad \lambda^2 = -4, \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Значит, общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,$$

а фундаментальными решениями будут

$$y_1 = \cos 2x, \quad y_2 = \sin 2x.$$

Вычислим определитель Вронского:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2$$

и дополнительные определители ($f(x)$ — правая часть исходного уравнения):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \dfrac{1}{\cos 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 0 - \operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} 2x,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \dfrac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

Определим функции:

$$C_1(x) = \int \frac{\Delta_1}{W}\,dx = \int \frac{-\operatorname{tg} 2x}{2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\,dx = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\Delta_2}{W}\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + C_2.$$

Значит, общее решение неоднородного уравнения примет вид

$$\begin{aligned} y &= C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x = \\ &= \left(\frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + C_1\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{2}x + C_2\right)\sin 2x = \\ &= C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|. \end{aligned}$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 468.1

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$
$$D = 4 - 4 = 0,$$
$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Значит, общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид

$$P_0(x) e^{\alpha x},$$

где $P_0 = 1$ — многочлен нулевой степени, а $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$\varphi(x) = Ae^x.$$

Найдем производные:

$$\varphi'(x) = Ae^x, \quad \varphi''(x) = Ae^x.$$

Подставим φ в исходное уравнение вместо y и найдем A:

$$Ae^x + 2Ae^x + Ae^x = e^x, \quad 4A = 1, \quad A = \frac{1}{4}.$$

Значит,

$$\varphi(x) = \frac{1}{4} e^x,$$

а общее решение неоднородного уравнения запишется в виде

$$y = y_0 + \varphi = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{4} e^x.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 468.6

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0,$$
$$D = 9 + 16 = 25,$$
$$\lambda_1 = \frac{-3-5}{2} = -4, \quad \lambda_2 = \frac{-3+5}{2} = 1.$$

Значит, общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 x e^{-4x}.$$

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид $P_1(x)e^{\alpha x}$, где $P_1 = x+1$ — многочлен первой степени, а $\alpha = 1$ является корнем характеристического уравнения кратности 1. Поэтому частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$\varphi(x) = (Ax + B)e^x x^1 = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Найдем производные:

$$\varphi'(x) = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x = e^x(Ax^2 + Bx + 2Ax + B),$$
$$\varphi''(x) = e^x(Ax^2 + Bx + 2Ax + B) + e^x(2Ax + B + 2A) =$$
$$= e^x(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B).$$

Подставим φ в исходное уравнение вместо y:

$$e^x(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B) + 3e^x(Ax^2 + Bx + 2Ax + B) -$$
$$- 4(Ax^2 + Bx)e^x = (x + 1)e^x.$$

Сократим это уравнение на e^x и приведем подобные слагаемые:

$$10Ax + 2A + 5B = x + 1.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$\begin{cases} 10A = 1, \\ 2A + 5B = 1, \end{cases}$$

откуда $A = 1/10$, $B = 4/25$.

Значит,

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{25}x\right)e^x,$$

а общее решение неоднородного уравнения запишется в виде

$$y = y_0 + \varphi = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} + \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{25}x\right)e^x.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 468.10

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$
$$D = 25 - 24 = 1,$$
$$\lambda_1 = \frac{5-1}{2} = 2, \quad \lambda_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Значит, общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{3x}.$$

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид

$$P_0(x) \sin \alpha x,$$

где $P_0 = 13$ — многочлен нулевой степени. Поэтому частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$\varphi(x) = A \cos 3x + B \sin 3x.$$

Найдем производные:

$$\varphi'(x) = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x,$$
$$\varphi''(x) = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x.$$

Подставим φ в исходное уравнение вместо y:

$$-9A \cos 3x - 9B \sin 3x - 5(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x) + \\ + 6(A \cos 3x + B \sin 3x) = 13 \sin 3x.$$

Приравняв коэффициенты при $\cos 3x$ и $\sin 3x$, получим:

$$\begin{cases} -9A - 15B + 6A = 0, \\ -9B + 15A + 6B = 13, \end{cases} \qquad \begin{cases} A + 5B = 0, \\ 15A - 3B = 13, \end{cases}$$

откуда $A = 5/6$, $B = -1/6$.

Значит,

$$\varphi(x) = \frac{5}{6}\cos 3x - \frac{1}{6}\sin 3x,$$

а общее решение неоднородного уравнения запишется в виде

$$y = y_0 + \varphi = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 469.1

Найдем общее решение уравнения. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0, \quad D = 16 - 12 = 4,$$
$$\lambda_1 = \frac{4-2}{2} = 1, \ \lambda_2 = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Значит, общее решение запишется в виде

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Чтобы найти частное решение, воспользуемся начальными условиями. Из условия $y(0) = 6$ следует уравнение

$$6 = C_1 + C_2.$$

Чтобы воспользоваться условием $y'(0) = 10$, найдем производную:

$$y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x},$$

т.е. $10 = C_1 + 3C_2$.

Получим систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 6, \\ C_1 + 3C_2 = 10, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 4$, $C_2 = 2$. Значит, частным решением исходного уравнения будет

$$y = 4e^x + 2e^{3x}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 471

Решим указанное уравнение. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + \omega^2 = 0,$$

где

$$\omega^2 = \lambda(b - a).$$

По условию задачи $\omega > 0$. Поэтому общее решение однородного уравнения

$$P_0 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Несложно убедиться, что это решение можно записать в виде

$$P_0 = C \cos(\omega t - \varepsilon),$$

где C, ε — некоторые постоянные.

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Учитывая правую часть, его следует искать в виде $\varphi = A$. Подставив φ в исходное уравнение, будем иметь:

$$\lambda(b - a)A = \lambda(\alpha - \beta),$$

откуда

$$A = \frac{\alpha - \beta}{b - a}.$$

Окончательно закон изменения цены описывается функцией

$$P = P_0 + \varphi = C \cos(\omega t - \varepsilon) + \frac{\alpha - \beta}{b - a}.$$

[Вернуться к условию]

Глава 8. Ряды

Решение задачи 472.1

Каждый член данного ряда начиная со второго представляет собой дробь, числитель которой равен единице, а знаменатель — третья степень числа n. Первый член $1 = 1/1^3$. Таким образом,

$$a_n = \frac{1}{n^3}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 473.1

Члены этого ряда 1, 1/2, 1/4, ... представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = 1/2$. Воспользуемся формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 473.3

Общий член этого ряда

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)}$$

можно представить в виде

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Тогда частичная сумма ряда

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 474.1

Так как общий член ряда $a_n = \dfrac{1}{2n-1}$, то получим:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

Значит, необходимое условие сходимости ряда выполняется, о сходимости ряда ничего сказать нельзя.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 474.2

Так как общий член ряда $a_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$, то получим:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Значит, необходимое условие сходимости не выполняется, ряд расходится. [Вернуться к условию]

Решение задачи 475.1

Общий член ряда

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}.$$

Данный ряд является обобщенным гармоническим рядом. В силу того что $\alpha = 1/2 < 1$, ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 475.2

Общий член ряда

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

Сравним этот ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Так как

$$\frac{1}{n \cdot 2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

сходится как бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 1/2 < 1$, то и исходный ряд сходится по признаку сравнения.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 475.6

Общий член ряда

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{3n^3 + 4n^2 - 1}.$$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; при этом $b_n = \frac{1}{n}$. Вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{3n^3 + 4n^2 - 1} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - n}{3n^3 + 4n^2 - 1} = \frac{1}{3}.$$

Значит, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{3n^3 + 4n^2 - 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

сходятся или расходятся одновременно. В силу того что последний ряд расходится, исходный ряд также расходится по признаку сравнения в предельной форме.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 476.1

Общий член ряда $a_n = \dfrac{n+1}{n!}$. Найдем:

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)!}.$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} = 0 < 1,$$

то исходный ряд сходится по признаку Д'Аламбера.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 477.1

Общий член ряда $a_n = \left(\dfrac{2n}{3n+5}\right)^n$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+5} = \frac{2}{3} < 1,$$

то исходный ряд сходится по признаку Коши.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 478.1

Так как $a_n = \dfrac{1}{n \ln n}$, то

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}.$$

Очевидно, что функция $f(x)$ положительна, непрерывна и монотонно убывает на промежутке $(2, +\infty)$. Вычислим несобственный интеграл:

$$\int\limits_2^{+\infty} f(x) = \int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_2^A \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{A \to +\infty} \left(\ln |\ln x| \Big|_2^A \right) =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} (\ln \ln A - \ln \ln 2) = \infty.$$

Значит, исходный ряд расходится по интегральному признаку. [Вернуться к условию]

Решение задачи 479.1

Данный ряд является знакопеременным. Исследуем его на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^2}.$$

Сравним его с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Так как $|\cos n| \leqslant 1$, то и

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Заметим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

сходится как обобщенный гармонический ряд при $\alpha = 2$. Значит, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^2}$$

сходится по признаку сравнения, а исходный ряд сходится абсолютно.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 479.2

Данный ряд является знакочередующимся. Исследуем его на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Сравним его с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} : \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1,$$

а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

расходится как обобщенный гармонический ряд при $\alpha = 1/2$, то и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

расходится по признаку сравнения, а исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

Применим признак Лейбница. При этом

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

В силу того что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \ldots > \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \ldots,$$

данный ряд сходится по признаку Лейбница, причем условно.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 480.1

Зафиксируем x и рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^x}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}.$$

При каждом фиксированном x данный ряд является обобщенным гармоническим рядом, который сходится при всех $x > 1$ и расходится при $x \leqslant 1$. Таким образом, область сходимости данного ряда $(1, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 480.2

Зафиксируем x и рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n^2+3}{x^{2n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{|x|^{2n+1}}.$$

Применим признак Д'Аламбера:

$$a_n = \frac{n^2+3}{|x|^{2n+1}}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2+3}{|x|^{2(n+1)+1}} = \frac{n^2+2n+4}{|x|^{2n+3}}.$$

Вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+4}{|x|^{2n+3}}\cdot\frac{|x|^{2n+1}}{n^2+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+4}{(n^2+3)|x|^{2n}} =$$

$$= \frac{1}{|x|^{2n}}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+4}{n^2+3} = \frac{1}{|x|^{2n}}.$$

Для того чтобы этот ряд сходился, достаточно выполнения условия

$$\frac{1}{|x|^{2n}} < 1,$$

которое выполняется при

$$x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty).$$

Заметим, что при $x \in (-1,1)$ вычисленный выше предел будет больше единицы, т.е. при $x \in (-1,1)$ исходный ряд расходится.

Осталось выяснить поведение ряда при $x = \pm 1$. Подставим эти значения в данный ряд. Если $x = 1$, то получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{1^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(n^2+3),$$

который расходится по следствию из необходимого условия сходимости числового ряда. Аналогично, если $x = -1$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{(-1)^{2n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+3),$$

также расходится. Значит, областью сходимости исходного ряда является

$$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 481.1

Данный ряд является степенным, причем

$$c_n = \frac{1}{n}, \quad x_0 = 0.$$

Сначала найдем радиус сходимости по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

Имеем: $c_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. Тогда

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \frac{n+1}{1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Значит, интервал сходимости

$$(x_0 - R, x_0 + R) = (-1, 1).$$

Осталось исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости.
Если $x = 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Этот ряд расходится (он является гармоническим рядом).
Если $x = -1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Этот ряд сходится по признаку Лейбница (причем условно).
Значит, область сходимости исходного ряда $[-1, 1)$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 481.6

Данный ряд является степенным, причем

$$c_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \quad x_0 = 0.$$

Сначала найдем радиус сходимости по формуле

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Получим:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Значит, $R = 1$ и интервал сходимости

$$(x_0 - R, x_0 + R) = (-1, 1).$$

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.
Если $x = 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Этот ряд расходится по следствию из необходимого условия сходимости, так как

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \neq 0.$$

Если $x = -1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Этот ряд также расходится (аналогично).
Значит, область сходимости исходного ряда $(-1, 1)$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 482.1

Воспользуемся разложением

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Преобразуем исходную функцию. Поскольку $2 = e^{\ln 2}$, то

$$f(x) = \left(e^{\ln 2}\right)^x = e^{\ln 2 \cdot x}.$$

Теперь подставим в разложение функции e^x вместо x выражение $\ln 2 \cdot x$. Тогда получим:

$$2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2 \cdot x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 2}{n!} x^n.$$

Очевидно, что это разложение справедливо при $x \in (-\infty, \infty)$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 482.6

Воспользуемся разложением

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Теперь подставим в разложение функции $\cos x$ вместо x выражение $3x$. Тогда получим:

$$\cos 3x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (3x)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

Осталось умножить последнее равенство на x^2:

$$x^2 \cos 3x = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n}}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n}}{(2n)!} x^{2n+2}.$$

Очевидно, что это разложение справедливо при $x \in (-\infty, \infty)$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 483.1

Вычислим значение функции и ее производных при $x = 1$:

$$f(1) = \ln 1 = 0,$$

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad f'(1) = \frac{1}{1} = 1,$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1,$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(1) = \frac{2}{1^3} = 2,$$

$$f^{(4)}(x) = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{6}{x^4}, \quad f^{(4)}(1) = -\frac{6}{1^4} = -6,$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}, \quad f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!,$$

. . . . . .

Ряд Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Поэтому в данном случае

$$\ln x = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \ldots + \\ + (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{n!}(x-1)^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n.$$

Несложно выяснить, что этот ряд сходится при $x \in (0, 2]$.

Для решения данной задачи можно поступить и иначе. Воспользуемся разложением

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1].$$

Преобразуем исходную функцию:

$$\ln x = \ln(1 + (x-1)).$$

Теперь подставим в разложение функции $\ln(1+x)$ вместо x разность $x-1$. Получим:

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Этот ряд сходится при $-1 < x - 1 \leqslant 1$, т.е. при $0 < x \leqslant 2$.

[Вернуться к условию]

Ответы

Глава 1. Линейная алгебра

Ответ к задаче 1.1

$$\begin{pmatrix} -28 & 12 \\ -8 & 12 \\ -38 & -6 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.2

$$\begin{pmatrix} -4 & -18 & 16 \\ -26 & -8 & 8 \\ -2 & 6 & -18 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.3

$$\begin{pmatrix} 12 & -6 & 12 \\ -6 & -12 & 2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.4

$$\begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 24 & 10 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.5

$$\begin{pmatrix} 23 & 6 & -2 \\ -47 & -24 & 12 \\ 1 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.6

$$\begin{pmatrix} -8 & -6 & 14 \\ -22 & -12 & 8 \\ 2 & 2 & 24 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.7

$$\begin{pmatrix} -14 & -6 & -34 \\ -37 & 5 & 15 \\ 14 & -21 & -22 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.8

$$\begin{pmatrix} -27 & 18 & 0 \\ 18 & -21 & -15 \\ 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.9

$$\begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 2 & -2 \\ -22 & 4 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.10

$$\begin{pmatrix} -43 & 6 & 43 \\ -14 & 6 & 5 \\ 16 & -10 & -8 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.11

$$\begin{pmatrix} 8 & 33 \\ 10 & 9 \\ -20 & 16 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.12

$$\begin{pmatrix} 28 & 12 & -13 \\ 11 & 18 & 0 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.13

$$\begin{pmatrix} -1 & -30 & -32 \\ -14 & -10 & -20 \\ -41 & 2 & -29 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.14

$$\begin{pmatrix} 43 & -24 & -22 \\ -1 & -13 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.15

$$\begin{pmatrix} 45 & -30 & -24 \\ 33 & -22 & 21 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.16

$$\begin{pmatrix} 41 & -30 & 31 \\ 34 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.17

$$\begin{pmatrix} 22 & -24 & 17 \\ -13 & -10 & 0 \\ 5 & -8 & -25 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.18

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 25 \\ 22 & 14 & 11 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.19

$$\begin{pmatrix} 15 & 45 & 0 \\ -30 & -5 & -20 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.20

$$\begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -6 & -14 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.21

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.1

$$\begin{pmatrix} 8 & 19 \\ -1 & -7 \\ 14 & 25 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -11 & -10 \\ -22 & -54 & -8 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.3

$$\begin{pmatrix} 9 & 30 & 0 \\ -22 & -5 & -20 \\ -5 & -5 & -35 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.4

$$\begin{pmatrix} 14 & -3 & 0 & -14 \\ 6 & -44 & -26 & -9 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.5

$$\begin{pmatrix} 8 & -14 & -14 & 2 \\ -8 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.6

$$\begin{pmatrix} -5 & -13 & 4 & 15 \\ -20 & 16 & 12 & -17 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.7

$$\begin{pmatrix} -4 & -10 & -22 & 26 \\ 3 & 0 & -12 & -14 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.8

$$\begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 14 & -10 \\ -2 & 20 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.9

$$\begin{pmatrix} 11 & 24 \\ 15 & 23 \\ -1 & 19 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.10

$$\begin{pmatrix} -38 & 6 & -20 \\ 2 & 21 & 2 \\ 45 & 0 & 24 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.11

$$\begin{pmatrix} -17 & 16 \\ -7 & -30 \\ 9 & -19 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.12

$$\begin{pmatrix} -19 & -10 \\ 8 & -18 \\ 11 & 15 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.13

$$\begin{pmatrix} 13 & -5 & 23 & 11 \\ -5 & -11 & -7 & -19 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.14

$$\begin{pmatrix} 3 & -34 & 13 \\ -8 & 28 & -18 \\ 17 & 28 & 15 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.15

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 24 \\ 15 & 28 & -6 \\ -7 & 17 & 27 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.16

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & -15 \\ 5 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.17

$$\begin{pmatrix} -3 & 24 & -4 \\ 5 & 4 & 8 \\ -6 & -9 & -11 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.18

$$\begin{pmatrix} -1 & -29 & 17 \\ -12 & 46 & -26 \\ 12 & -41 & 23 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.19

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -4 & 19 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.20

$$\begin{pmatrix} -4 & 12 & -24 \\ -2 & 6 & -12 \\ -2 & 1 & -19 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.1

$\begin{pmatrix} -11 \end{pmatrix}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.2

$\begin{pmatrix} -4 & -20 & -20 \end{pmatrix}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.3

$\begin{pmatrix} 12 & -10 & -4 \end{pmatrix}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.4

$\begin{pmatrix} 17 & -15 & -6 \end{pmatrix}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.5

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.6

$\begin{pmatrix} -20 \end{pmatrix}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.7

$\binom{11}{}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.8

$\begin{pmatrix} 23 \\ -15 \end{pmatrix}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.9

$\big(-18\big)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.10

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -17 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.11

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 & -10 & -4 \\ 16 & 20 & -20 & -8 \\ 4 & 5 & -5 & -2 \\ -8 & -10 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.12

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & 10 & -20 & 10 \\ 12 & -6 & 12 & -6 \\ -8 & 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.1

$$AB = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ -3 & -20 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ -4 & -20 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.2

$$AB = BA = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.3

$$AB = \begin{pmatrix} -27 & 33 \\ 17 & -29 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} -17 & 21 \\ 21 & -39 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.4

$$AB = \begin{pmatrix} -84 & 12 \\ 32 & -24 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} -72 & -32 \\ -30 & -36 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.5

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.6

$AB = \begin{pmatrix} -8 & -12 \\ 5 & -17 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 12 & -17 \end{pmatrix}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.7

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & -50 \\ 3 & -16 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 16 & -14 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.8

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -43 \\ -22 & -52 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ -3 & -66 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.9

$$AB = \begin{pmatrix} 54 & -9 \\ -6 & 28 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 55 & 3 \\ 9 & 27 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.10

$$AB = \begin{pmatrix} -9 & -24 \\ -3 & 16 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} -14 & -3 \\ 26 & 21 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.11

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -8 & -2 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.12

$$AB = \begin{pmatrix} 18 & -10 \\ -2 & -14 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 18 & -1 \\ -20 & -14 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.13

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 10 \\ -5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -21 & -13 & 7 \\ 8 & 11 & -3 \\ -18 & -14 & 6 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.14

$$AB = \begin{pmatrix} -21 & 6 & -3 \\ 9 & 6 & 7 \\ 31 & -10 & 5 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 12 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.15

$$AB = BA = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.16

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & -20 & 5 \\ -3 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -3 & -15 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ -3 & -13 & 0 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.17

$$AB = \begin{pmatrix} -12 & -6 & -15 \\ -12 & -12 & -5 \\ 16 & 0 & 25 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -12 & -8 & 12 \\ -9 & -12 & 3 \\ -20 & 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.1

$$\begin{pmatrix} 9 & 27 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.2

$$\begin{pmatrix} 24 & 5 \\ -16 & -15 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.3

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.4

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 18 & -71 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.5

$$\begin{pmatrix} -16 & 16 \\ -88 & -12 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.6

$$\begin{pmatrix} 60 & -25 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.7

$$\begin{pmatrix} 18 & -23 \\ 18 & 43 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.8

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 14 & 10 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.9

$$\begin{pmatrix} -48 & -62 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.10

$$\begin{pmatrix} -30 & 74 \\ -50 & 70 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.11

$$\begin{pmatrix} 46 & 67 & 60 \\ 23 & 44 & 30 \\ -30 & -50 & -48 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.12

$$\begin{pmatrix} 48 & -12 & -3 \\ -2 & 29 & -4 \\ 48 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.13

$$\begin{pmatrix} 6 & 38 & 5 \\ 12 & -34 & -15 \\ -15 & 48 & 20 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.14

$$\begin{pmatrix} 48 & -12 & 41 \\ 24 & 17 & 18 \\ 48 & 29 & 43 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.15

$$\begin{pmatrix} 40 & 38 & 45 \\ 68 & 76 & 90 \\ -4 & -74 & 5 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.16

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 12 \\ 42 & 74 & -10 \\ -30 & -41 & 18 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.17

$$\begin{pmatrix} 12 & -23 & 24 \\ 0 & -13 & 6 \\ 24 & 30 & 2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.18

$$\begin{pmatrix} -78 & 72 & -7 \\ -51 & 33 & -6 \\ 12 & -96 & -34 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.19

$$\begin{pmatrix} 87 & -96 & 81 \\ 0 & 9 & 18 \\ -69 & 62 & -87 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.1

$$\begin{pmatrix} 4 & -15 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.2

$$\begin{pmatrix} 69 & -80 \\ -40 & 49 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.3

$$\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.4

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.5

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.6

$$\begin{pmatrix} 173 & 35 \\ -35 & -142 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.7

$$\begin{pmatrix} 113 & 84 \\ 42 & -13 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.8

$$\begin{pmatrix} 13 & 0 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.9

$$\begin{pmatrix} 104 & 0 \\ 50 & 4 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.10

$$\begin{pmatrix} 38 & 19 \\ -19 & 0 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.11

$$\begin{pmatrix} 4 & -20 & -10 \\ -16 & 38 & 18 \\ -6 & 29 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.12

$$\begin{pmatrix} -58 & -32 & 112 \\ -48 & -26 & 8 \\ 0 & 0 & -106 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.13

$$\begin{pmatrix} -8 & -73 & 3 \\ 0 & 61 & 0 \\ 9 & -17 & -11 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.14

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ -58 & -63 & 40 \\ 56 & 20 & 97 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.15

$$\begin{pmatrix} 90 & 42 & -8 \\ 51 & -28 & -13 \\ 87 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.16

$$\begin{pmatrix} -70 & 0 & -9 \\ 0 & -4 & 0 \\ 9 & 0 & -76 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.17

$$\begin{pmatrix} 154 & 0 & 0 \\ 82 & 3 & -1 \\ 104 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.18

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 & 7 \\ 12 & 33 & 18 \\ -3 & 12 & 12 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.19

$$\begin{pmatrix} 13 & 4 & 0 \\ 6 & 17 & 0 \\ 96 & 74 & 133 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6.20

$$\begin{pmatrix} 48 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.1

$$AA^T = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 3 \\ 12 & 20 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^T A = \begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.2

$$AA^T = \begin{pmatrix} 39 \end{pmatrix}, \quad A^T A = \begin{pmatrix} 16 & -8 & -4 & -12 & 12 \\ -8 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ -4 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ -12 & 6 & 3 & 9 & -9 \\ 12 & -6 & -3 & -9 & 9 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.3

$$AA^T = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 47 \end{pmatrix}, \quad A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 6 & 8 \\ 15 & 25 & 15 & 10 \\ 6 & 15 & 18 & 0 \\ 8 & 10 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.4

$$AA^T = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}, \quad A^TA = \begin{pmatrix} 17 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & -4 \\ -2 & 4 & 5 & -5 \\ 2 & -4 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.5

$$AA^T = \begin{pmatrix} 19 & -10 \\ -10 & 31 \end{pmatrix}, \quad A^TA = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & -5 \\ -5 & 25 & -5 & 10 \\ 4 & -5 & 10 & -11 \\ -5 & 10 & -11 & 13 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.8

$$AA^T = \begin{pmatrix} 41 & 37 & 22 \\ 37 & 34 & 19 \\ 22 & 19 & 13 \end{pmatrix}, \quad A^TA = \begin{pmatrix} 34 & 41 \\ 41 & 54 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.9

$$AA^T = \begin{pmatrix} 20 & -26 & -8 \\ -26 & 41 & 14 \\ -8 & 14 & 5 \end{pmatrix},\ A^TA = \begin{pmatrix} 33 & -30 \\ -30 & 33 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.10

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -4 & 20 & 10 \\ -3 & 10 & 10 \end{pmatrix}, \quad A^T A = \begin{pmatrix} 26 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.11

$$AA^T = \begin{pmatrix} 44 & -4 \\ -4 & 18 \end{pmatrix}, \quad A^T A = \begin{pmatrix} 10 & -13 & 11 & 0 \\ -13 & 29 & -11 & 11 \\ 11 & -11 & 13 & 3 \\ 0 & 11 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.12

$$AA^T = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -3 \\ 2 & 41 & -27 \\ -3 & -27 & 18 \end{pmatrix}, \quad A^T A = \begin{pmatrix} 34 & -23 \\ -23 & 38 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.1

-80.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.2

5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.3

13.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.4

-16.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.5

-30.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.6

-57.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.7

10.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.8

-24.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.9

-10.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.10

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.11

-44.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.12

-42.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.13

-33.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.14

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.15

16. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.16

-61.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.17

-26.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.18

-55.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.19

-6.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.20

-6.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.21

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.22

$ad - bc$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.23

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8.24

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 9.1

13.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 9.2

1; 2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 9.3

1; 5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 9.4

$(2, -3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 9.5

$\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 9.6

$\frac{9}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 9.7

5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 9.8

$1; -\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 9.9

$(2, -1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 9.10

$(-1, 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 9.11

$\frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.1

47.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.2

-98.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.3

-27.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.4

-5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.5

-26.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.6

-18.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.7

-45.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.8

-27.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.9

-27.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.10

-55.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.11

-1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.12

97.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.13

62. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.14

102.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.15

-21.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.16

-30.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.17

40.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.18

-100.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.19

88.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.20

-14.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.21

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.22

$\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.23

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.24

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.25

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.26

$-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.27

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.28

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10.29

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.1

5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.2

$x \geqslant -\dfrac{41}{21}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.3

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.4

$-3,\ -\frac{5}{2}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.5

$-4,\ 1,\ 2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.6

$x \leqslant -\frac{36}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.7

$-\frac{5}{3}$, 2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.8

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11.9

$\left(-\sqrt{23}, \sqrt{23}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.1

-8.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.2

106.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.3

-30.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.4

-55.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.5

-30.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.6

156.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.7

-54.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.8

9.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.9

-52.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.10

72.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.11

-35.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.12

100.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.13

-44.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.14

-57.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.15

32.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.16

60.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.17

-16.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.18

46.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.19

-18.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.20

-92.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.21

$3x^3 + 9x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.22

$9a + 12b - 9c + 3d$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.23

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.24

$4x + 4y + 4z - 20t$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12.25

$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 13.1

-57.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 13.2

-4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 13.3

168.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 13.4

42.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 13.5

$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 13.6

-99.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 13.7

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.1

$n!$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.2

$$\prod_{j<k}(x_k - x_j).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.3

$2^{n-2}(n+1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.4

$(-1)^{n-1}3^n$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.5

$a^n - b^n$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14.6

$(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)x^n$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.1

$$\begin{pmatrix} 5/9 & 2/3 \\ -1/9 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.2

$$\begin{pmatrix} 13/6 & 5/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.3

$$\begin{pmatrix} -38/3 & 5/3 \\ 7/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.4

$$\begin{pmatrix} -23/12 & 5/6 \\ 5/4 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.5

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.6

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -4/3 & -1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.7

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/10 \\ -1 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.8

$$\begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 7/12 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.9

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.10

$$\begin{pmatrix} 11/3 & -2/3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.11

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ 4/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.12

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.13

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.14

$$\begin{pmatrix} -7/5 & 3/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.15

$$\begin{pmatrix} -11/2 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.16

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -2/3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.17

$$\begin{pmatrix} -5/12 & 1/6 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.18

$$\begin{pmatrix} 13/24 & 3/8 \\ -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.19

$$\begin{pmatrix} -7/6 & 5/12 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15.20

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/6 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.1

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 \\ -4 & 2 & 9 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.2

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -24 & 6 & -12 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.3

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -10 \\ -1 & -2 & 15 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.4

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -6 \\ 1 & -2 & -5 \\ -2 & 8 & 11 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.5

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -21 & 3 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.6

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -20 & -8 & 8 \\ -5 & -3 & 2 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.7

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & -15 & 15 \\ 15 & -5 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.8

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 20 & 5 & 5 \\ -20 & -5 & -10 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.9

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -7 & -1 & -2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.10

$$\begin{pmatrix} -15 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.11

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 6 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.12

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.13

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -8 & -3 \\ -1 & -12 & -3 \\ -4 & -32 & -11 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.14

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ -2 & 12 & -5 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.15

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 6 & -9 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.16

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & -3 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.17

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -21 & -12 & 6 \\ -9 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.18

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & 10 & 6 \\ 4 & -25 & -12 \\ -8 & 30 & 22 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.19

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -18 & -11 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16.20

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -3 & -1 & 0 \\ -9 & 1 & 18 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 17.1

$$\frac{1}{66}\begin{pmatrix} 21 & -6 & -9 & -39 \\ -1 & -28 & 35 & 27 \\ 23 & -16 & -13 & -27 \\ -13 & 32 & -7 & 21 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 17.2

$$\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 2-n \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 17.3

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.1

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.2

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.3

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.4

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.5

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.6

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.7

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.8

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.9

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.10

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.11

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.12

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.13

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.14

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.15

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.16

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.17

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.18

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.19

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.20

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.21

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.22

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 18.23

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.1

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.2

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.3

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.4

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.5

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.6

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.7

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.8

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.9

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.10

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.11

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.12

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.13

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.14

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.15

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.16

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.17

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.18

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.19

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.20

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.21

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.22

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.23

4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.24

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.25

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.26

4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.27

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.28

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.29

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.30

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.31

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.32

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.33

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.34

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.35

4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.36

4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19.37

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.1

$x = 5,\ y = -5.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.2

$x = 1,\ y = -2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.3

$x = -3,\ y = -2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.4

$x = 3,\ y = -5.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.5

$x = 5,\ y = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.6

$x = 5,\ y = -5.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.7

$x = -1,\ y = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.8

$x = -2,\ y = -2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.9

$x = 1,\ y = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.10

$x = 4,\ y = -2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.11

$x = 1,\ y = -2,\ z = -1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.12

$x = 0,\ y = 1,\ z = -1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.13

$x = -1,\ y = 1,\ z = -1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.14

$x = 1,\ y = -2,\ z = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.15

$x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -5,\ x_4 = 2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.16

$x_1 = 2,\ x_2 = 5,\ x_3 = -1,\ x_4 = -2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.17

$x = 1,\ y = 1,\ z = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.18

$x = -1,\ y = -2,\ z = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.19

$x = 0,\ y = 1,\ z = -1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.20

$x = -1,\ y = 1,\ z = -1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.21

$x = 1,\ y = 1,\ z = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.22

$x = -1,\ y = -2,\ z = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.23

$x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2,\ x_4 = 3.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.24

$x_1 = -1,\ x_2 = 5,\ x_3 = 1,\ x_4 = -2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.25

$x_1 = 1,\ x_2 = 5,\ x_3 = 2,\ x_4 = -1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.26

$x_1 = 2,\ x_2 = 5,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.27

$x_1 = 3,\ x_2 = -1,\ x_3 = -3,\ x_4 = 3.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.28

$x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2,\ x_4 = 3.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.29

$x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ x_3 = -3,\ x_4 = 3.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.30

$x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ x_3 = -2,\ x_4 = -2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20.31

$$x_i = \prod_{j=1}^{i-1} \frac{b - a_i}{a_i - a_j} \prod_{\gamma=i+1}^{n} \frac{a_\gamma - b}{a_\gamma - a_i},\ i = \overline{1, n}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.1

$x = 2,\ y = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.2

$x = 1,\ y = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.3

$x = 1,\ y = -5.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.4

$x = 4,\ y = -5.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.5

$x = 4,\ y = -3.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.6

$x = 4,\ y = -1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.7

$x = 5,\ y = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.8

$x = 3,\ y = -5.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.9

$x = 5,\ y = -2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.10

$x = 1,\ y = 2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.11

$x = \alpha$, $y = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.12

Система несовместна.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.13

$x = -1,\ y = 4,\ z = 3.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.14

$x = -2,\ y = 2,\ z = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.15

$x = 3,\ y = 4,\ z = -1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.16

$x = 4,\ y = -2,\ z = 2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.17

$x = -1,\ y = 3,\ z = 3.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.18

Система несовместна.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.19

$x = -1,\ y = 3,\ z = 4.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.20

$x = 4,\ y = 4,\ z = -1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.21

$x = 3\alpha - 1,\ y = 2\alpha + 1,\ z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.22

$x = -1,\ y = 1,\ z = -1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.23

$x = -2\alpha - 1,\ y = 2\alpha + 1,\ z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.24

Система несовместна.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.25

$x = -1,\ y = -2,\ z = -1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.26

$x = 0,\ y = 1,\ z = -1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.27

Система несовместна.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.28

$x = -1,\ y = -2,\ z = -1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.29

Система несовместна.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.30

$x = 3\alpha - 3,\ y = -\alpha + 1,\ z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.31

$x = -1,\ y = -2,\ z = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.32

$x = 3\alpha - 3,\ y = 2\alpha + 1,\ z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.33

Система несовместна.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.34

$x = -2\alpha - 3,\ y = 2\alpha + 1,\ z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.35

$x = 1,\ y = -2,\ z = -3.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.36

$x = 0,\ y = 1,\ z = -1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.37

$x = 0,\ y = -3,\ z = -1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.38

$x = 0,\ y = -2,\ z = -1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.39

$x = 3,\ y = -3,\ z = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.40

$x_1 = -3,\ x_2 = 5,\ x_3 = -3,\ x_4 = 4.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.41

$x_1 = 3,\ x_2 = 5,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.42

$x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 2,\ x_4 = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.43

$x_1 = 3,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 4.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.44

$x_1 = 1,\ x_2 = 5,\ x_3 = -3,\ x_4 = 2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.45

$x_1 = -3,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2,\ x_4 = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.46

$x_1 = -3,\ x_2 = -1,\ x_3 = -5,\ x_4 = 4.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.47

$x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = -3,\ x_4 = 2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.48

$x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3 - 2\alpha$, $x_4 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.49

$x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 4.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.50

$x_1 = -8$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 2\alpha$, $x_4 = -3 + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.51

$x_1 = \alpha - \frac{53}{18}\beta + \frac{20}{9}$, $x_2 = -\frac{5}{2}\alpha + \frac{5}{6}\beta - \frac{5}{3}$, $x_3 = \frac{2}{9}\beta - \frac{1}{9}$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.52

$x_1=\alpha,\ x_2=\beta,\ x_3=\gamma,\ x_4=\alpha+2\beta-\gamma,\ x_5=-\alpha+\beta+\gamma,\ x_6=-\alpha+3\beta+2\gamma,\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21.53

$x_k = \dfrac{n}{2} - k + 1,\ k = \overline{1, n}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.1

Общее решение: $x_1 = 2 - \alpha + 2\beta$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.2

Общее решение: $x_1 = 4 + 3\alpha$, $x_2 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = 4$, $x_2 = 0$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.3

Система несовместна.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.4

Общее решение: $x_1 = 3 + \alpha + 2\beta$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.5

Общее решение: $x_1 = 5 + 3\alpha$, $x_2 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.6

Общее решение: $x_1 = \beta$, $x_2 = \gamma$, $x_3 = -3 - 2\alpha + 3\beta + 3\gamma$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = 5 + \alpha + \beta + 3\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = -3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 5$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.7

Система имеет единственное решение: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.8

Система несовместна.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.9

Система несовместна.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.10

Общее решение: $x_1 = \alpha$, $x_2 = 1 + \alpha$, $x_3 = -3 + 2\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.11

Общее решение: $x_1 = 5 + \alpha - 2\beta - 2\gamma$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \gamma$, $x_5 = 3 - \alpha + 3\beta + 3\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 3$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.12

Система несовместна.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.13

Общее решение: $x_1 = -1 + 2\alpha$, $x_2 = -2 + 3\alpha$, $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.14

Система имеет единственное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.15

Общее решение: $x_1 = -3 - \alpha + \beta$, $x_2 = \beta$, $x_3 = 2 + 3\alpha + 3\beta$, $x_4 = \alpha$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.16

Система несовместна.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.17

Общее решение: $x_1 = 1 - 2\alpha - \beta$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 4 + \alpha + 3\beta$, $x_4 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.18

Общее решение: $x_1 = \alpha$, $x_2 = -2 + 3\alpha$, $x_3 = -2 - \alpha$, $x_4 = 2 - 2\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.19

Система имеет единственное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.20

Общее решение: $x_1 = 3 - \alpha$, $x_2 = -3 - 2\alpha$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = 5 + 3\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 5$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.21

Система имеет единственное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.22

Общее решение: $x_1 = -1 + \alpha - 2\beta$, $x_2 = -1 + \alpha - \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_5 = 3 - 2\alpha - \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 3$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.23

Общее решение: $x_1 = 3 + \alpha - 2\beta$, $x_2 = -1 + 2\alpha + 2\beta$, $x_3 = 5 - \alpha + 3\beta$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.24

Система несовместна.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.25

Система несовместна.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.26

Система несовместна.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.27

Система несовместна.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.28

Система имеет единственное решение: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -1$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.29

Общее решение: $x_1 = -2 - \alpha$, $x_2 = -2 - \alpha$, $x_3 = -2 - \alpha$, $x_4 = 1 + 2\alpha$, $x_5 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = -2$, $x_2 = -2$, $x_3 = -2$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.30

Общее решение: $x_1 = 1 + \alpha$, $x_2 = 2 + \alpha$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = -1 - \alpha$, $x_5 = -2 - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; частное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = -1$, $x_5 = -2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.31

Система имеет единственное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, $x_4 = -2$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.32

Система несовместна.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 23.1

Система совместна при любом значении λ; при $\lambda = 8$ общее решение имеет вид $(-2\alpha+2\beta+4, -2\alpha+3, \alpha, \beta)$, а при $\lambda \neq 8$ — вид $(-2\alpha+4, -2\alpha+3, \alpha, 0)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 23.2

При $\lambda \neq 3$ система несовместна; при $\lambda = 3$ она совместна, и общее решение имеет вид

$$\left(\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{4}, \alpha\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 23.3

При $\lambda = 1$ система несовместна; при $\lambda \neq 1$ она совместна, и общее решение имеет вид

$$\left(\alpha, -\frac{9}{8}\alpha + \frac{43 - 8\lambda}{8 - 8\lambda}, \frac{5}{\lambda - 1}, \frac{1}{4}\alpha + \frac{5}{4 - 4\lambda}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 23.4

При $\lambda \neq -3$ система несовместна; при $\lambda = -3$ она совместна, и общее решение имеет вид $(9, -\alpha - 13, \alpha)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 23.5

При $\lambda \neq 0$ система несовместна; при $\lambda = 0$ она совместна, и общее решение имеет вид

$$\left(\frac{5}{8}\alpha + 1, \alpha, -\frac{7}{4}\alpha\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 23.6

При $\lambda = 0$ система несовместна; при $\lambda \neq 0$ она имеет единственное решение:

$$\left(-3 + \frac{3}{\lambda}, 2 - \frac{6}{\lambda}, \frac{3}{\lambda}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.1

350, 200, 350.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.2

200, 450, 500.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.3

200, 300, 250.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.4

350, 400, 250.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.5

450, 250, 200.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.6

300, 300, 450.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.7

300, 250, 200.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.8

450, 250, 450.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.9

350, 250, 200.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.10

250, 400, 500.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.11

350, 500, 250.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.12

300, 250, 500.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.13

400, 300, 450.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.14

200, 500, 500.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.15

250, 500, 300.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.16

350, 300, 400.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.17

500, 300, 350.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.18

500, 250, 450.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.19

300, 400, 400.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.20

300, 350, 300.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.21

450, 350, 500.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.22

500, 250, 250.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.23

200, 350, 400.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.24

500, 200, 350.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.25

500, 350, 450.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.26

250, 250, 450.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.27

400, 400, 400.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.28

450, 300, 300.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.29

500, 400, 450.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24.30

450, 200, 300.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.1

$X = (400, 700)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.2

$X = (700, 700)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.3

$X = (800, 600)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.4

$X = (500, 800)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.5

$X = (400, 600)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.6

$X = (900, 700)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.7

$X = (700, 500)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.8

$X = (800, 800)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.9

$X = (400, 800)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.10

$X = (500, 500)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.11

$X = (400, 500)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.12

$X = (400, 500)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.13

$X = (800, 800)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.14

$X = (500, 600)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.15

$X = (600, 600)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.16

$X = (700, 600)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.17

$X = (500, 500)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.18

$X = (800, 800)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.19

$X = (800, 600)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25.20

$X = (600, 600)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26.1

$X = (500, 700, 700)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26.2

$X = (700, 700, 500)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26.3

$X = (800, 600, 700)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26.4

$X = (600, 700, 600)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26.5

$X = (800, 600, 800)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26.6

$X = (400, 600, 700)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26.7

$X = (900, 500, 600)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26.8

$X = (700, 500, 700)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26.9

$X = (700, 600, 800)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26.10

$X = (900, 500, 700)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26.11

$X = (600, 800, 500)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26.12

$X = (400, 500, 800)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26.13

$X = (400, 800, 500)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26.14

$X = (700, 600, 500)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26.15

$X = (500, 700, 800)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26.16

$X = (400, 600, 500)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26.17

$X = (800, 800, 800)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26.18

$X = (400, 700, 600)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 27.1

$X = (600, 600, 800, 600)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 27.2

$X = (400, 500, 600, 600)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 27.3

$X = (900, 600, 800, 700)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 27.4

$X = (800, 600, 800, 800)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 27.5

$X = (500, 800, 800, 500)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 27.6

$X = (800, 600, 500, 500)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 27.7

$X = (700, 500, 800, 600)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 27.8

$X = (900, 600, 800, 700)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 27.9

$X = (800, 500, 800, 600)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 27.10

$X = (700, 500, 600, 800)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 27.11

$X = (800, 700, 500, 800)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 27.12

$X = (700, 600, 700, 600)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 27.13

$X = (600, 600, 700, 500)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 27.14

$X = (500, 600, 500, 600)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 27.15

$X = (900, 800, 800, 600)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 28

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 29.1

$\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 29.2

$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 29.3

$\mathbf{a} \nleftrightarrow \mathbf{b}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 29.4

Угол между векторами **a** и **b** острый.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 29.5

$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 29.6

$\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$, $|\mathbf{a}| \geqslant |\mathbf{b}|$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 30

$$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 31

$(-3, 0, -3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 32

$\overrightarrow{AB} = (-3, 0, 5)$, $\overrightarrow{BA} = (3, 0, -5)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 33

5, 5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 35

Точка пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 37

$\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 38

$(6, -1, 2)$, $(6, 3, 9)$, $(0, 4, 7)$, $\left(1, -\frac{3}{2}, -2\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39

6, $\sqrt{8}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 40

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41

$0,\ \frac{5}{7}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42

$\alpha = -\frac{4}{5}, \beta = -\frac{5}{2}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43

$\frac{5}{3}(\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.1

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.2

$-5\sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.3

40.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.4

-12.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44.5

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 45.1

5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 45.2

4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 45.3

19.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 45.4

196.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 45.5

-28.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47

$-\frac{3}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48

$\frac{\pi}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49

-5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 50

$\sqrt{5-\sqrt{8}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51

-61.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 52

40.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 53

15, $\sqrt{593}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 54.1

$\frac{3}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 54.2

$\frac{2}{\sqrt{6}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 54.3

$\frac{\sqrt{6}}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 55

$$\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = -\frac{7\sqrt{7}}{4\sqrt{13}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57

107. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58

-200.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.1

-10.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.2

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.3

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.4

$\sqrt{3} - 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.1

$\frac{\pi}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.2

$\frac{\pi}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.3

$\frac{\pi}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.4

2°.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.5

$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \dfrac{3}{2\sqrt{5}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 61

-3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.1

91.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62.2

$(26, 26)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 63.1

84.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 63.2

$(66, 46, 88)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 63.3

32.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 63.4

64.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 63.5

50.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 63.6

56.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 63.7

$\sqrt{14}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 64

$\frac{\pi}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6б

30°, 60°, 90°.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 68

$(-4, -6, 12)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 69

$(2, 3, 7)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 70

$(0, 1, 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 71

$\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 72

$(0, 0, 0, 0)$; система $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно зависима.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 73

$(0, 4, 3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.1

Нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.2

Нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.3

Нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.4

Нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.5

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.6

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.7

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.8

Нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.9

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.10

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.11

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.12

Нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.13

Нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.14

Нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.15

Нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.16

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.17

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.18

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.19

Нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.20

Нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.21

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.22

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.23

Нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.24

Нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.25

Нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.26

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.27

Нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.28

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.29

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74.30

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 75.1

2, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 75.2

3, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 75.3

2, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 75.4

3, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 75.5

3, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 75.6

3, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 75.7

2, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 75.8

3, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 75.9

2, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 75.10

3, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.1

$\mathbf{a}_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{a}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.2

$\mathbf{a}_4 = (0, 0, 1, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.3

$\mathbf{a}_4 = (0, 0, 1, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.4

$\mathbf{a}_4 = (1, 0, 0, 0, 0),\ \mathbf{a}_5 = (0, 0, 1, 0, 0).$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.5

$\mathbf{a}_4 = (1, 0, 0, 0, 0),\ \mathbf{a}_5 = (0, 0, 1, 0, 0).$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.6

$\mathbf{a}_4 = (1, 0, 0, 0, 0),\ \mathbf{a}_5 = (0, 0, 1, 0, 0).$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.7

$\mathbf{a}_4 = (1, 0, 0, 0, 0),\ \mathbf{a}_5 = (0, 0, 1, 0, 0).$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.8

$\mathbf{a}_4 = (1, 0, 0, 0, 0),\ \mathbf{a}_5 = (0, 0, 1, 0, 0).$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.9

$\mathbf{a}_4 = (0, 0, 1, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.10

$\mathbf{a}_4 = (0, 0, 1, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.11

$\mathbf{a}_4 = (0, 0, 1, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.12

$\mathbf{a}_4 = (0, 0, 1, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.13

$\mathbf{a}_4 = (0, 0, 1, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.14

$\mathbf{a}_4 = (1, 0, 0, 0, 0),\ \mathbf{a}_5 = (0, 0, 1, 0, 0).$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.15

$\mathbf{a}_4 = (1, 0, 0, 0, 0),\ \mathbf{a}_5 = (0, 0, 1, 0, 0).$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.16

$\mathbf{a}_4 = (0, 0, 1, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.17

$\mathbf{a}_4 = (0, 0, 1, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.18

$\mathbf{a}_4 = (0, 0, 1, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.19

$\mathbf{a}_4 = (1, 0, 0, 0, 0),\ \mathbf{a}_5 = (0, 0, 1, 0, 0).$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.20

$\mathbf{a}_4 = (0, 0, 1, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.1

$(3, 5)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.2

$(3, 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.3

$(3, -2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.4

$(1, 5)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.5

$(-2, -2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.6

$(5, -2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.7

$(3, 3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.8

$(2, 4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.9

$(3, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.10

$(5, 3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.11

$(1, 1, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.12

$(3, 4, -2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.13

$(3, -2, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.14

$(2, 4, -3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.15

$(-1, 2, -3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.16

$(-1, 1, -1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.17

$(4, 3, 3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.18

$(5, -3, -2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.19

$(4, 5, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.20

$(3, -2, 3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.21

$(1, 3, 3, -3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.22

$(-1, 3, 1, 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.23

$(2, 4, -2, -3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.24

$(-2, 3, -2, -3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.25

$(5, 2, 3, -2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.26

$(5, -1, 3, -2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.27

$(2, 1, -3, 3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.28

$(3, 2, -3, -4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.29

$(3, -3, 1, -1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.30

$(4, 3, -3, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.1

Общее решение: $x_1 = -2\alpha - 2\beta$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \alpha + 2\beta$, $x_4 = \alpha$; базис подпространства решений: $(-2, 0, 1, 1)$, $(-2, 1, 2, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.2

Общее решение: $x_1 = \beta$, $x_2 = \gamma$, $x_3 = -\alpha - 2\beta - 2\gamma$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \alpha + 2\beta + 2\gamma$; базис подпространства решений: $(0, 0, -1, 1, 1)$, $(1, 0, -2, 0, 2)$, $(0, 1, -2, 0, 2)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.3

Общее решение: $x_1 = -2\alpha + 3\beta$, $x_2 = \beta$, $x_3 = -2\alpha + 2\beta$, $x_4 = \alpha$; базис подпространства решений: $(-2, 0, -2, 1)$, $(3, 1, 2, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.4

Общее решение: $x_1 = -\alpha + \beta$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = -\alpha - 2\beta$, $x_4 = \beta$; базис подпространства решений: $(-1, 1, -1, 0)$, $(1, 0, -2, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.5

Общее решение: $x_1 = 3\alpha + \beta + \gamma$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \gamma$, $x_5 = -\alpha + \beta + \gamma$; базис подпространства решений: $(3, 0, 1, 0, -1)$, $(1, 1, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 0, 1, 1)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.6

Общее решение: $x_1 = -\alpha + 3\beta$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = -2\alpha + \beta$, $x_4 = \beta$; базис подпространства решений: $(-1, 1, -2, 0)$, $(3, 0, 1, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.7

Общее решение: $x_1 = -2\alpha+2\beta$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = -\alpha+3\beta$, $x_4 = \beta$; базис подпространства решений: $(-2, 1, -1, 0)$, $(2, 0, 3, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.8

Общее решение: $x_1 = 2\alpha - 2\beta + 3\gamma$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \gamma$, $x_5 = 2\alpha + \beta - \gamma$; базис подпространства решений: $(2, 0, 1, 0, 2)$, $(-2, 1, 0, 0, 1)$, $(3, 0, 0, 1, -1)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.9

Общее решение: $x_1 = \alpha + 2\beta - 2\gamma$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \gamma$, $x_5 = -\alpha - 2\beta + 3\gamma$; базис подпространства решений: $(1, 0, 1, 0, -1)$, $(2, 1, 0, 0, -2)$, $(-2, 0, 0, 1, 3)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.10

Общее решение: $x_1 = \alpha - 2\beta + 2\gamma$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \gamma$, $x_5 = 3\alpha + \beta + 3\gamma$; базис подпространства решений: $(1, 0, 1, 0, 3)$, $(-2, 1, 0, 0, 1)$, $(2, 0, 0, 1, 3)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.11

Общее решение: $x_1 = \alpha - \beta - \gamma$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \gamma$, $x_5 = -\alpha - 2\beta + 3\gamma$; базис подпространства решений: $(1, 0, 1, 0, -1)$, $(-1, 1, 0, 0, -2)$, $(-1, 0, 0, 1, 3)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.12

Общее решение: $x_1 = -\alpha + \beta$, $x_2 = -\alpha - 2\beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_5 = 2\alpha + 3\beta$; базис подпространства решений: $(-1, -1, 1, 0, 2)$, $(1, -2, 0, 1, 3)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.13

Общее решение: $x_1 = 2\alpha + \beta$, $x_2 = \alpha + 2\beta$, $x_3 = 2\alpha + 2\beta$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$; базис подпространства решений: $(2, 1, 2, 1, 0)$, $(1, 2, 2, 0, 1)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.14

Общее решение: $x_1 = 3\alpha + 2\beta$, $x_2 = 3\alpha - 2\beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_5 = -2\alpha + 2\beta$; базис подпространства решений: $(3, 3, 1, 0, -2)$, $(2, -2, 0, 1, 2)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.15

Общее решение: $x_1 = -\alpha + 3\beta$, $x_2 = 3\alpha + 3\beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_5 = 2\alpha + 2\beta$; базис подпространства решений: $(-1, 3, 1, 0, 2)$, $(3, 3, 0, 1, 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.16

Общее решение: $x_1 = -\alpha+2\beta$, $x_2 = \beta$, $x_3 = -2\alpha+2\beta$, $x_4 = \alpha$; базис подпространства решений: $(-1, 0, -2, 1)$, $(2, 1, 2, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.17

Общее решение: $x_1 = 3\alpha + 3\beta$, $x_2 = 2\alpha + 3\beta$, $x_3 = 3\alpha + 3\beta$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$; базис подпространства решений: $(3, 2, 3, 1, 0)$, $(3, 3, 3, 0, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.18

Общее решение: $x_1 = 2\alpha - 2\beta$, $x_2 = \alpha + 2\beta$, $x_3 = 3\alpha - 2\beta$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$; базис подпространства решений: $(2, 1, 3, 1, 0)$, $(-2, 2, -2, 0, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.19

Общее решение: $x_1 = 2\alpha - \beta$, $x_2 = -\alpha + 2\beta$, $x_3 = \alpha + 2\beta$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$; базис подпространства решений: $(2, -1, 1, 1, 0)$, $(-1, 2, 2, 0, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.20

Общее решение: $x_1 = 2\alpha + \beta$, $x_2 = -\alpha + \beta$, $x_3 = \alpha + 2\beta$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$; базис подпространства решений: $(2, -1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 2, 0, 1)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.21

Общее решение: $x_1 = -\alpha$, $x_2 = -2\alpha$, $x_3 = -2\alpha$, $x_4 = 2\alpha$, $x_5 = \alpha$; базис подпространства решений состоит из одного вектора: $(-1, -2, -2, 2, 1)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.22

Общее решение: $x_1 = 2\alpha - \beta$, $x_2 = -\alpha - 2\beta$, $x_3 = 3\alpha + 2\beta$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$; базис подпространства решений: $(2, -1, 3, 1, 0)$ $(-1, -2, 2, 0, 1)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.23

Общее решение: $x_1 = \alpha$, $x_2 = -\alpha$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = 2\alpha$, $x_5 = 2\alpha$; базис подпространства решений состоит из одного вектора: $(1, -1, 1, 2, 2)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.24

Общее решение: $x_1 = -\alpha$, $x_2 = 2\alpha$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = -\alpha$, $x_5 = 2\alpha$; базис подпространства решений состоит из одного вектора: $(-1, 2, 1, -1, 2)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.25

Общее решение: $x_1 = \alpha$, $x_2 = -\alpha$, $x_3 = -2\alpha$, $x_4 = -2\alpha$, $x_5 = \alpha$; базис подпространства решений состоит из одного вектора: $(1, -1, -2, -2, 1)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.26

Общее решение: $x_1 = \alpha$, $x_2 = 2\alpha$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = -\alpha$, $x_5 = 2\alpha$; базис подпространства решений состоит из одного вектора: $(1, 2, 1, -1, 2)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.27

Общее решение: $x_1 = -2\alpha$, $x_2 = -2\alpha$, $x_3 = -\alpha$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \alpha$; базис подпространства решений состоит из одного вектора: $(-2, -2, -1, 1, 1)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.1

$\frac{2\pi}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.2

$\arccos \frac{3}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 83.1

$\mathbf{b}_3 = (4, 1, 3, 0)$, $\mathbf{b}_4 = (3, -9, -1, 13)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 83.2

$\mathbf{b}_3 = (-1, 6, 8, 1)$, $\mathbf{b}_4 = (-37, -16, 7, 3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 83.3

$\mathbf{b}_3 = (1, -2, 1, 0)$, $\mathbf{b}_4 = (-59, 64, -17, 6)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 84.1

$\mathbf{b}_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 84.2

$$\mathbf{b}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 85

$(-2, 11, -1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 86.1

X_1, $\lambda_1 = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 86.2

X_1, $\lambda_1 = 1$; X_2, $\lambda_2 = -1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 86.3

X_1, $\lambda_1 = 1$; X_2, $\lambda_2 = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 86.4

X_1, $\lambda_1 = 0$; X_2, $\lambda_2 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 87.1

$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda - 6$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 87.2

$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 5\lambda - 12$; $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 87.3

$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$; $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 87.4

$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 35\lambda + 24$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 8$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 87.5

$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$; $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 87.6

$\lambda^4 - \lambda^3$; $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 87.7

$\lambda^4 - 4\lambda^3 - 6\lambda^2 + 4\lambda + 5$; $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 5$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.1

$\lambda_1 = 1$, $\mathbf{b}_1^1 = (-2, 1)$; $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{b}_1^2 = (-3, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.2

$\lambda_1 = -3$, $\mathbf{b}_1^1 = (1, -1)$; $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{b}_1^2 = (2, -1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.3

$\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-3, -1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.4

$\lambda_1 = -3$, $\mathbf{b}_1^1 = (-2, -1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.5

$\lambda_1 = 0$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, -1)$; $\lambda_2 = 5$, $\mathbf{b}_1^2 = (2, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.6

$\lambda_1 = 5$, $\mathbf{b}_1^1 = (-4, -1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.7

$\lambda_1 = 2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-4, -1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.8

$\lambda_1 = 2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-3, 2)$; $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{b}_1^2 = (-2, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.9

$\lambda_1 = 2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-5, 2)$; $\lambda_2 = 5$, $\mathbf{b}_1^2 = (2, -1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.10

$\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^1 = (5, 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.11

$\lambda_1 = -5$, $\mathbf{b}_1^1 = (1, -1)$; $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{b}_1^2 = (-2, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.12

$\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^1 = (3, -1)$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{b}_1^2 = (-2, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.13

$\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-2, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.14

$\lambda_1 = -3$, $\mathbf{b}_1^1 = (5, -2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.15

$\lambda_1 = 2$, $\mathbf{b}_1^1 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{b}_2^1 = (1, 0, -1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.16

$\lambda_1 = 1$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, -1, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.17

$\lambda_1 = -3$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, 1, 1)$; $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{b}_1^2 = (1, -2, -2)$; $\lambda_3 = 1$, $\mathbf{b}_1^3 = (1, 0, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.18

$\lambda_1 = 2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, -1, 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.19

$\lambda_1 = -1$, $\mathbf{b}_1^1 = (1, -1, -1)$; $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{b}_1^2 = (-1, 2, 2)$; $\lambda_3 = 2$, $\mathbf{b}_1^3 = (2, -3, -4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.20

$\lambda_1 = 3$, $\mathbf{b}_1^1 = (1, -1, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.21

$\lambda_1 = -1$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, -1, -2)$, $\mathbf{b}_2^1 = (-1, 0, -1)$; $\lambda_2 = -3$, $\mathbf{b}_1^2 = (-4, -2, -5)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.22

$\lambda_1 = 2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, 1, 1)$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{b}_1^2 = (1, -2, -1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.23

$\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^1 = (1, -1, 0)$; $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{b}_1^2 = (-1, 2, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.24

$\lambda_1 = -1$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, -1, 0)$, $\mathbf{b}_2^1 = (3, 5, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.25

$\lambda_1 = 1$, $\mathbf{b}_1^1 = (1, -1, -1)$; $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{b}_1^2 = (-1, -1, 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.26

$\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, -1, 0)$, $\mathbf{b}_2^1 = (-1, -3, -3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.27

$\lambda_1 = 2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, -1, -1)$, $\mathbf{b}_2^1 = (-1, -2, -2)$; $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{b}_1^2 = (-2, -3, -4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.28

$\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^1 = (1, -1, -1)$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{b}_1^2 = (-1, 2, 2)$; $\lambda_3 = 1$, $\mathbf{b}_1^3 = (0, -1, -2)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.29

$\lambda_1 = -1$, $\mathbf{b}_1^1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{b}_2^1 = (-1, -2, -1)$; $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{b}_2^1 = (1, 0, 4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.30

$\lambda_1 = 1$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, -1, -1, -1)$, $\mathbf{b}_2^1 = (1, 2, 0, 2)$, $\mathbf{b}_3^1 = (-2, -3, 0, -4)$; $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{b}_1^2 = (4, 6, 1, 8)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.31

$\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^2 = (1, 1, 1, -1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.32

$\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, -1, -1, -1)$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{b}_1^2 = (-1, -2, -2, -2)$; $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{b}_1^3 = (-2, -3, -2, -4)$; $\lambda_4 = 1$, $\mathbf{b}_1^4 = (2, 2, 1, 4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.33

$\lambda_1 = 0$, $\mathbf{b}_1^1 = (1, 1, -1, 1)$; $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{b}_1^2 = (-2, -2, 1, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.34

$\lambda_1 = -1$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, -1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2^1 = (-1, 0, 0, 2)$; $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{b}_1^2 = (0, -1, 2, 0)$, $\mathbf{b}_2^2 = (2, 0, 1, -4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.35

$\lambda_1 = -1$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2^1 = (0, 0, -1, 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.36

$\lambda_1 = 0$, $\mathbf{b}_1^1 = (1, -1, 1, 1)$; $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{b}_1^2 = (2, -2, 1, 4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.37

$\lambda_1 = 0$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, -1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2^1 = (0, -2, 1, 4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.38

$\lambda_1 = 1$, $\mathbf{b}_1^1 = (1, -1, 1, 1)$; $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{b}_1^2 = (0, 1, 0, -2)$, $\mathbf{b}_2^2 = (2, -2, 1, 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.39

$\lambda_1 = 1$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, 1, -1, -1)$, $\mathbf{b}_2^1 = (1, -2, 2, 0)$; $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{b}_1^2 = (-2, 3, -2, 0)$; $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{b}_1^3 = (2, -4, 3, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.40

$\lambda_1 = -1$, $\mathbf{b}_1^1 = (1, 1, 1, -1)$; $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{b}_1^2 = (1, 2, 0, 0)$; $\lambda_3 = 1$, $\mathbf{b}_1^3 = (2, 3, 2, -2)$; $\lambda_4 = 2$, $\mathbf{b}_1^4 = (0, 0, 1, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.41

$\lambda_1 = 0$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, -1, -1, 1)$, $\mathbf{b}_2^1 = (1, 0, 0, 0)$; $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{b}_1^2 = (2, 1, 0, -2)$, $\mathbf{b}_2^2 = (-4, -2, -1, 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.42

$\lambda_1 = -2$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{b}_2^1 = (2, -3, 4, 0)$, $\mathbf{b}_3^1 = (0, 0, 1, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.43

$\lambda_1 = 1$, $\mathbf{b}_1^1 = (-1, -1, 1, 1)$; $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{b}_1^2 = (-2, -3, 4, 2)$; $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{b}_1^3 = (-2, -4, 5, 4)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88.44

$\lambda_1 = -1$, $\mathbf{b}_1^1 = (1, 1, -1, 1)$; $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{b}_1^2 = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{b}_2^2 = (0, 0, 1, 2)$.

[Вернуться к условию]

Глава 2. Аналитическая геометрия

Ответ к задаче 89

$5\sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 90

$(0, -4)$, $(0, -12)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91

$(4, 0)$, $(-2, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93

Да, $\angle A$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 94

34.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 95

$(3, -2)$, 10.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 96

$(3, 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 97

$\left(2, -\frac{7}{3}\right)$, $\left(3, \frac{1}{3}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 98

$(-1, 3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 99

$(6, -2)$, $(2, -4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 100

$(-4, 3)$, $(2, 7)$, $(6, -1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 101

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 102

$8\sqrt{2}/3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 103

$\sqrt{82}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 104

$OC = 5$, $OD = \dfrac{24\sqrt{2}}{7}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 105

6.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 107

20.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 108

26.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 109

$(3, 0)$, $(-7, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 110.1

$y = \sqrt{3}x - 6.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 110.2

$y = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 110.3

$y = x - 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 110.4

$y = -x + 3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 111.1

$\alpha = 0$, $\alpha = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 111.2

$\alpha = \frac{1}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 112

$15x - 5y + 32 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 113

$y = 0$, $y = 3$, $x + y - 5 = 0$, $x - y + 5 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 114

$x + y - 1 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 115

$y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + 4.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 116.1

$4x - y - 24 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 116.2

$-x - 5y - 3 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 116.3

$-4x - 3y + 32 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 116.4

$-4x + 5y + 40 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 116.5

$-4x + y - 10 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 116.6

$-4x + 3y + 32 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 116.7

$-4x - 3y + 16 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 116.8

$-4x - 5y + 8 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 116.9

$4x - y + 16 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 116.10

$4x - y - 30 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 116.11

$x + y - 1 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 116.12

$-2x - 3y - 18 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 116.13

$-4x + 5y + 8 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 116.14

$-2x - 5y - 26 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 116.15

$-2x - 3y + 26 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 117.1

$x = 3$, $y = 2$, $2x + y - 14 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 117.2

$2x + 3y - 8 = 0$, $2x - y = 0$, $2x - 3y + 16 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 118

$k = -2/3$, $b = 5/3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 119

$(0, 5/3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 120

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 121

$4x + y - 6 = 0$ или $3x + 2y - 7 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 122

arctg 2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 123

$y = \frac{12}{5}x - 13.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 124.1

$k = -2/5$, $b = 1/5$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 124.2

$k = -7/2$, $b = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 124.3

$k = 0$, $b = 5/2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 125

6, −9.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 126б

$(2, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 127

$4x + 3y - 12 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 129.1

$$\frac{x}{3/2}+\frac{y}{-3}=1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 129.2

$\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 129.3

$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 129.4

$$\frac{x}{1/3}+\frac{y}{-1/2}=1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 130

$x + 2y - 8 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 131

$x + y - 7 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 132

$\alpha = 3$, $\beta = -4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 133

$2x - y - 4 = 0$ или $x - 2y + 4 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 134

$x + 2y - 8 = 0$, $x - 2y + 4 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 135

$x + y + 4 = 0$ и $x - y - 8 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 136

$(2, 0)$, $(0, -3)$ или $(-4, 0)$, $(0, 3/2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 137

5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 138

$C = \pm 90$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.1

$\frac{\pi}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.2

$\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.3

$\frac{\pi}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.4

arctg 5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.5

$\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.6

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.7

$\operatorname{arctg} \frac{1}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.8

$\frac{\pi}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.9

$\frac{\pi}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.10

$\operatorname{arctg} \frac{23}{15}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.11

$\operatorname{arctg} \frac{17}{7}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.12

$\operatorname{arctg} \frac{1}{7}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.13

$\operatorname{arctg} \frac{7}{9}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.14

$\operatorname{arctg} \frac{1}{8}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.15

$\operatorname{arctg} \frac{3}{7}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.16

$\operatorname{arctg} \frac{1}{8}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 140

$\angle A = \dfrac{\pi}{4}$, $\angle B = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$, $\angle C = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 141

$x + 3y - 6 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 142

$x = 2 + y\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 145.1

4 и -9.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 145.2

8 и -2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 145.3

3/4 и -12.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 145.4

$-3/2$ и $2/3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 146.1

$x + y - 4 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 146.2

$x + 3y + 10 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 146.3

$2x - y - 9 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 146.4

$4x - 3y + 7 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 146.5

$2x + 5y - 9 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 146.6

$4x - 5y - 11 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 146.7

$2x - 3y - 7 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 147.1

$2x - y + 4 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 147.2

$3x - y + 5 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 148.1

$x + y = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 148.2

$3x - y - 9 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 148.3

$x + 4y - 7 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 148.4

$3x + 2y + 1 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 148.5

$x + 2y - 7 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 148.6

$5x - y + 2 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 148.7

$5x + 2y - 4 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 149

$2x + 11y + 29 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 150

3 и 4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 151

$7y - 5x - 4 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 152

$3x - 4y - 25 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 153

$(2, 4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 154

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 155.1

$2\sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 155.2

$3\sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 155.3

$4\sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 155.4

$\frac{33}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 155.5

$\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 155.6

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 155.7

$\dfrac{54\sqrt{17}}{17}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 155.8

$\frac{21\sqrt{2}}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 155.9

$8\sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 155.10

$\frac{9}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 155.11

$\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 155.12

$\frac{27\sqrt{5}}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 155.13

$\frac{26\sqrt{5}}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 155.14

$12\sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 155.15

$\frac{21\sqrt{10}}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15б

5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 157

9/2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 158

49.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 159

4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 160

$\pm 4/3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161

$x - y + 2 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 162

$(5, 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 163

$(6, 6)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 164

$14x - 8y - 3 = 0$ и $64x + 112y - 23 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 165

$5x + y - 3 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 166.1

Перпендикулярны.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 166.2

Пересекаются.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 166.3

Совпадают.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 166.4

Параллельны.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 166.5

Совпадают.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 166.6

Перпендикулярны.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 166.7

Пересекаются.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 166.8

Параллельны.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 166.9

Пересекаются.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 166.10

Перпендикулярны.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 167.1

$(-5, 4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 167.2

$(-1, 6)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 167.3

$(-1, 4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 167.4

$(3, 6)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 167.5

$(3, 6)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 167.6

$(3, -2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 167.7

$(-5, 4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 167.8

$(-1, 6)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 167.9

$(-1, -2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 167.10

$(-1, 4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 168.1

$a \neq \pm 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 168.2

$a = -2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 168.3

$a = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 169

$5x + 13 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170

$2x + y - 6 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 171

$7x + 7y - 6 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172

$x - y - 8 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 173

$(-3, -1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 174

$4x - 3y - 7 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 175

$5x - 3y - 2 = 0$, $7x + 6y + 4 = 0$, $\varphi = \operatorname{arctg} 3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 176

$\pm\sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 177

13.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 178

$x + 2y - 7 = 0$, $x - 4y - 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 179

$(0, 2)$, $(4, 0)$, $(2, 4)$, $(-2, 6)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 180

$(-3, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 181

$2x + 7y + 22 = 0$, $7x + 2y - 13 = 0$, $x - y + 2 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 182

$3x + y - 14 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 183

$y = 2x$, $x - 3y = 15$, $3x + y = 25$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 184

$x - 3y - 23 = 0$, $7x + 9y + 19 = 0$, $4x + 3y + 13 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 185

$y - 2 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 186

$x + 2y + 2 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 187

$5y + 2x - 28 = 0$, $11x - 10y - 4 = 0$, $y = x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 188

$C(17, 12)$, $D(9, 3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 189

$y = x + 3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 190.1

12 тыс. ден. ед.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 190.2

9 тыс. ден. ед.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 191

800 ден. ед.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 192

400 ден. ед.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 193

$p(t) = 12\,000 - 1\,500t$, 1125 ден. ед.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 194

Если $x < 4$, то выгоднее осуществлять перевозки автотранспортом, если $x > 4$ — водным.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 195

600 км.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 197

$P(q) = 20q - 10\,000$, $q = 500$ — точка безубыточности.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 198

70.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 199

$R(q) = 500q$, $C(q) = 12\,000 + 300q$, 60.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 200.1

$(3, 6)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 200.2

$(2, 8)$, увеличение цены на 2 ден. ед., уменьшение объема на 1 единицу. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 200.3

3 ден. ед.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 200.4

$(21/8, 27/4)$, доход государства $R = 189/64$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 201

$(30, 260)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202

$(10, 180)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.1

$(50, 150)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.2

$(140/3, 470/3)$, $1400/3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.3

2600/3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.4

$(155/3, 440/3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204

2 000 и 1 000 ден. ед.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205

4 000 и 6 000 ден. ед.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 206

$x + 2y - 23 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 6 = 0$, $2x - y + 14 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 207.1

$(1, -3)$, $R = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 207.2

$(2, -4)$, $R = 6$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 207.3

$(-7/3, 3)$, $R = 5$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 207.4

$(2, -3)$, $R = 4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 207.5

$(-1, 2/3)$, $R = \sqrt{19}/3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.1

$x^2 + y^2 = 16$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.2

$(x-3)^2+(y+2)^2=25$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.3

$x^2 + (y - 3)^2 = 25.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.4

$(x-2)^2+(y-5)^2=8.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.5

$(x-1)^2+y^2=25$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.6

$(x-2)^2+(y+1)^2=9$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.7

$(x+1)^2+(y-7)^2=20$, $(x-3)^2+(y+1)^2=20$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.8

$(x-5)^2+(y-5)^2=25.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 209

$4y - x - 17 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 210

$3y + 4x - 23 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 211

$$\frac{b^2}{1+k^2} = R^2.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 212

$2x + y = 8$, $2y - x = 11$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 213

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 214.1

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 214.2

$$\frac{x^2}{6{,}5^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 214.3

$$\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{8^2} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 214.4

$$\frac{x^2}{(5/2)^2} + \frac{y^2}{(3/2)^2} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 215.1

4, 3, $\left(-\sqrt{7}, 0\right)$, $\left(\sqrt{7}, 0\right)$, $\varepsilon = \sqrt{7}/4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 215.2

2, 4, $\left(0, -2\sqrt{3}\right)$, $\left(0, 2\sqrt{3}\right)$, $\varepsilon = \sqrt{3}/2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 215.3

6, 3, $\left(-3\sqrt{3}, 0\right)$, $\left(3\sqrt{3}, 0\right)$, $\varepsilon = \sqrt{3}/2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 215.4

7, $2\sqrt{6}$, $(-5, 0)$, $(5, 0)$, $\varepsilon = 5/7$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 215.5

5, 4, $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $\varepsilon = 0{,}6$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 216

$\left(5/2, \pm 3\sqrt{3}/2\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217

Точки A, C, D лежат внутри эллипса, а точка B — вне его.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 218

16.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 219

$\sqrt{2}/2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 220.1

$(-1, -2)$, $\sqrt{22}$, $\sqrt{5{,}5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 220.2

$(5, 2)$, $4\sqrt{2}$, $4\sqrt{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 221

$$\frac{(x-2)^2}{100}+\frac{y^2}{91}=1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 222.1

Половина эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$, расположенная в верхней полуплоскости. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 222.2

Половина эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$, расположенная в нижней полуплоскости.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 222.3

Половина эллипса $\dfrac{x^2}{203/9} + \dfrac{y^2}{7} = 1$, расположенная в левой полуплоскости. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 222.4

Половина эллипса $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2/27} = 1$, расположенная в верхней полуплоскости. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 223.1

$(2, 2)$, $(3/2, 3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 223.2

Прямая проходит вне эллипса.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 224.1

$|m| < 5$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 224.2

$|m| > 5$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 224.3

$m = \pm 5$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 225.1

$3x + 2y - 10\sqrt{10} = 0$, $3x + 2y + 10\sqrt{10} = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 225.2

$2x - 3y + 25 = 0$, $2x - 3y - 25 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 226б

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 227.1

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 227.2

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 227.3

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 227.4

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 227.5

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{576} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 228.1

3, 4, $(-5, 0)$, $(5, 0)$, $\frac{5}{3}$, $y = \pm\frac{4}{3}x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 228.2

1, 4, $\left(-\sqrt{17}, 0\right)$, $\left(\sqrt{17}, 0\right)$, $\sqrt{17}$, $y = \pm 4x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 228.3

$\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\left(-\frac{\sqrt{73}}{\sqrt{24}}, 0\right)$, $\left(\frac{\sqrt{73}}{\sqrt{24}}, 0\right)$, $\frac{\sqrt{73}}{3}$, $y = \pm\frac{8}{3}x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 228.4

$\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\left(-\frac{\sqrt{41}}{20}, 0\right)$, $\left(\frac{\sqrt{41}}{20}, 0\right)$, $\frac{\sqrt{41}}{4}$, $y = \pm\frac{5}{4}x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 228.5

1, 1, $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$, $\left(\sqrt{2}, 0\right)$, $\sqrt{2}$, $y = \pm x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 228.6

2, 4, $\left(-2\sqrt{5}, 0\right)$, $\left(2\sqrt{5}, 0\right)$, $\sqrt{5}$, $y = \pm 2x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.1

Часть гиперболы $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{81/4} = 1$, расположенная в верхней полуплоскости. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.2

Ветвь гиперболы $x^2 - \dfrac{y^2}{16} = -1$, расположенная в нижней полуплоскости. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.3

Ветвь гиперболы $\dfrac{x^2}{81/4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, расположенная в левой полуплоскости. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.4

Ветвь гиперболы $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{4} = -1$, расположенная в верхней полуплоскости. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.5

Ветвь гиперболы $-\dfrac{(x+2)^2}{5}+\dfrac{(y-1)^2}{4/45}=1$ над прямой $y-1=0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.6

Ветвь гиперболы $\dfrac{(x-10)^2}{36} - \dfrac{(y+2)^2}{12} = 1$ слева от прямой $x - 10 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.1

$(2, -3)$, 3, 4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.2

$(2, -2)$, 2, 3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.3

$(5, 3)$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231

$$\frac{(x-3)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232

$3x - 2y + 19 = 0$, $3x + 2y + 11 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 233

$\Big(6, \pm 6\sqrt{2}\Big)$, $r_1 = 2 + \sqrt{2}$, $r_2 = -2 + \sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 234

$\left(6, 12\sqrt{7}\right)$, $\left(6, -12\sqrt{7}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 235

$(2, 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 23б

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 237.1

$y^2 = 4x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 237.2

$y^2 = 8x$, $y^2 = -8x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 237.3

$y^2 = -8x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 237.4

$y^2 = 12x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 238

$x^2 = y$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 239.1

$(3, 0)$, $x = -3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 239.2

$(-2, 0)$, $x = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 239.3

$(0, -2)$, $y = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 240.1

Часть параболы $y^2 = 9x$, расположенная в первом квадранте.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 240.2

Парабола $(y-3)^2 = -5(x-1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 240.3

Часть параболы $y^2 = -2x$, расположенная во втором квадранте. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 240.4

Парабола $3(y-1)^2 = -4(x-3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 240.5

Парабола $(x-1)^2 = -\frac{1}{3}(y+1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 240.6

Часть параболы $x^2 = 25y$, расположенная в первом квадранте.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 240.7

Часть параболы $x^2 = -25y$, расположенная в третьем квадранте. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 241

$(x-4)^2 = 12(y+1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 242

$M_0(9, -24)$, $d = \dfrac{8}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 243.1

$x + 2y + 2 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 243.2

$x - 2y - 2 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 243.3

$2x - y - 16 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 244

$(1, 1)$, $(-7, 9)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 245

4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 246

$y^2 - 6y - 4x + 17 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 247.1

Гиперболу $\dfrac{(x+1)^2}{9} - \dfrac{(y-2)^2}{1} = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 247.2

Окружность $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 247.3

Эллипс $\dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 247.4

Гиперболу $\dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 247.5

Точку $(2, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 247.6

Мнимый эллипс $\dfrac{x^2}{-1} + \dfrac{(y+1)^2}{-1/4} = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 247.7

Гиперболу $y^2 - (x-3)^2 = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 247.8

Параболу $(x-1)^2 = -(y-5/2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 247.9

Прямые $x = 2$ и $x = 4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 247.10

Мнимые прямые.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 248.1

$(x-2)^2+(y-8)^2=145.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 248.2

$(x-1)^2+(y-8)^2=113.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 248.3

$(x+7)^2+y^2=116$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 248.4

$x^2 + (y + 6)^2 = 45.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 248.5

$(x+5)^2+(y+2)^2=116.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 248.6

$x^2 + (y+1)^2 = 9.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 248.7

$(x+2)^2+(y-5)^2=146.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 248.8

$(x-2)^2+(y+7)^2=50$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 248.9

$x^2 + (y+1)^2 = 20.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 248.10

$(x+1)^2+(y+2)^2=13$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 248.11

$(x-1)^2+(y-3)^2=18.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 248.12

$x^2 + (y - 5)^2 = 26.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 248.13

$x^2 + (y + 6)^2 = 45.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 248.14

$(x+1)^2+(y+3)^2=10.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 248.15

$(x-4)^2+y^2=25$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 249.1

Окружность $(x-1)^2+(y-1/2)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 249.2

Эллипс $\dfrac{(x-17/15)^2}{(8/15)^2}+\dfrac{(y-5)^2}{(2/\sqrt{15})^2}=1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 249.3

Окружность $\left(x-\frac{44}{15}\right)^2+\left(y+\frac{81}{15}\right)^2=\left(\frac{23}{15}\right)^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 249.4

Гипербола $\dfrac{(x+33/4)^2}{(15/4)^2} - \dfrac{(y-1)^2}{(15/\sqrt{2})^2} = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 249.5

Эллипс $\dfrac{(x-49/12)^2}{(5/12)^2}+\dfrac{(y+3)^2}{(1/\sqrt{6})^2}=1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 249.6

Гипербола $\dfrac{(x-6)^2}{\left(\sqrt{13}\right)^2} - \dfrac{(y+4)^2}{\left(2\sqrt{26}\right)^2} = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 249.7

Окружность $\left(x+\frac{37}{15}\right)^2+\left(y-\frac{9}{15}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{1198}}{15}\right)^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 249.8

Окружность $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 249.9

Окружность $\left(x-\frac{39}{16}\right)^2+\left(y+\frac{13}{12}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{21489}}{16}\right)^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 249.10

Гипербола $\dfrac{(x-18)^2}{8^2} - \dfrac{(y-3)^2}{\left(8\sqrt{3}\right)^2} = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 249.11

Гипербола $\dfrac{(y-4)^2}{\left(2\sqrt{10}\right)^2} - \dfrac{(x+8)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 249.12

Эллипс $\dfrac{(x+1)^2}{2^2} + \dfrac{(y+5)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 249.13

Окружность $(x-5)^2+\left(y+\frac{14}{3}\right)^2=\left(2\sqrt{19}\right)^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 249.14

Окружность $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 249.15

Окружность $\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y+\frac{56}{5}\right)^2=\left(\frac{6\sqrt{82}}{5}\right)^2$.

[Вернуться к условию]

Глава 3. Предел последовательности и функции

Ответ к задаче 250.1

$x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 250.2

$x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = -\dfrac{1}{3}$, $x_4 = \dfrac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 250.3

$x_1 = 4$, $x_2 = 8$, $x_3 = 16$, $x_4 = 32$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 250.4

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 250.5

$x_1 = 6$, $x_2 = 11$, $x_3 = 18$, $x_4 = 27$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 250.6

$x_1 = 2,\ x_2 = \dfrac{3}{4},\ x_3 = \dfrac{4}{9},\ x_4 = \dfrac{5}{16}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 250.7

$x_1 = 4,\ x_2 = 4,\ x_3 = \dfrac{64}{9},\ x_4 = 16.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 250.8

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$, $x_4 = 24$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 250.9

$x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 250.10

$x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 250.11

$x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = 7$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 250.12

$x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -6$, $x_4 = 24$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 250.13

$x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 251.1

$x_n = \dfrac{1}{2n-1}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 251.2

$x_n = \dfrac{1}{n^2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 251.3

$x_n = \dfrac{n+1}{n}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 251.4

$x_n = (-1)^n n.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 251.5

$x_n = n^2 + 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 252.1

Ограниченная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 252.2

Ограниченная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 252.3

Ограниченная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 252.4

Ограниченная снизу, неограниченная сверху.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 252.5

Ограниченная снизу, неограниченная сверху.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 252.6

Ограниченная снизу, неограниченная сверху.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 252.7

Ограниченная сверху, неограниченная снизу.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 252.8

Ограниченная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 252.9

Неограниченная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 253.1

Строго возрастающая.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 253.2

Не монотонная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 253.3

Строго убывающая.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 253.4

Строго убывающая.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 253.5

Возрастающая.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 253.6

Убывающая.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 253.7

Строго возрастающая.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 253.8

Строго убывающая.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 253.9

Не монотонная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 253.10

Монотонная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 254

$x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 5$, $x_6 = 8$, $x_7 = 13$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 258.1

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 258.2

6.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 258.3

34.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.1

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.2

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.3

$-\frac{2}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.4

$\frac{3}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.5

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.6

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.7

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.8

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.9

$\frac{4}{21}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.10

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.11

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.12

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.13

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.14

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.15

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.16

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.17

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.18

$\frac{7}{9}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.19

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.20

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.21

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.22

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.23

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.24

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.25

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.26

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.27

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.28

$\frac{1}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.29

$-\frac{3}{7}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.30

6.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.31

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.32

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.33

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.34

1/3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.35

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.36

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.37

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.38

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.39

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.40

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.41

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.42

-1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.43

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.44

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.45

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.46

$\frac{5}{8}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.47

$\frac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.48

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.49

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.50

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.51

$-\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.52

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.53

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.54

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.55

$\frac{1}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.56

$\frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.57

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.58

$\frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.59

$\frac{1}{6}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26б

Нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 268

$$\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 269

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 270

$\frac{a+2b}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 272.1

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 272.2

$\frac{5}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 272.3

$\sqrt{1+x^2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 272.4

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 272.5

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 273.1

-3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 273.2

$\frac{1}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 273.3

$\sqrt{2}+3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 273.4

$$\frac{3-x}{x^2-1}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 273.5

$$\frac{3x^2 + x}{1 - x^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 273.6

$$\frac{a+4}{a^2+2a}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 273.7

$$\frac{a^2+a+2}{a^2-1}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 273.8

$$\frac{2x+3}{4x^2-1}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 274.1

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 274.2

$-\frac{27}{8}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 274.3

$\dfrac{-5}{2^{\sqrt[3]{5}}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 274.4

$\frac{-x^3}{2^x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 274.5

$27x^3 8^x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 274.6

$\dfrac{2^{1/x}}{x^3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 274.7

$$\frac{1}{x^3\,2^x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 274.8

$(b-2)^3\,2^{b-2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 275.1

$D = [-1, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 275.2

$D = (-2, 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 275.3

$D = (-2, 0]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 275.4

$D = [-1/3, 1]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 275.5

$D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 275.6

$D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 275.7

$D = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 275.8

$D = (-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 275.9

$x \neq \pi/2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 275.10

$D = (0, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 276.1

$E = [-3, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 276.2

$E = [1, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 276.3

$E = [-2, 8]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 276.4

$E = [4, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 276.5

$E = (0, 1]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 276.6

$E = [-9, -5]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 276.7

$E = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 276.8

$E = (-1/2, 1/2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 276.9

$E = [2, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 276.10

$E = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 276.11

$E = \{-\pi/2, \pi/2\}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 276.12

$E = [0, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 277.1

Нечетная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 277.2

Четная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 277.3

Общего вида.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 277.4

Нечетная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 277.5

Четная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 277.6

Нечетная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 277.7

Общего вида.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 277.8

Нечетная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 277.9

Общего вида.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 277.10

Четная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 277.11

Четная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 277.12

Общего вида.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 278.1

Периодическая, $T = \pi/2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 278.2

Периодическая, $T = \pi/5$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 278.3

Периодическая, $T = 3\pi$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 278.4

Непериодическая.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 278.5

Периодическая, $T = 2\pi$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 278.6

Периодическая, $T = 8\pi$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 278.7

Непериодическая.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 278.8

Периодическая, $T = \pi/2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 278.9

Периодическая, $T = 4\pi$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 278.10

Периодическая, $T = \pi/3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 279.1

$x = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg} y.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 279.2

$x = \dfrac{y-2}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 279.3

$x = \dfrac{2}{y} - 3.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 279.4

$x = y^2$, $y \in [0, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 279.5

$x = \frac{1}{3} \ln \frac{y}{2}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 279.6

$x = \sqrt[3]{y+2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 279.7

$$x = \frac{2}{1-y}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 280.1

$f(g(x)) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, $g(f(x)) = x$, $x \geqslant 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 280.2

$f(g(x)) = (2x-1)^3$, $g(f(x)) = 2x^3 - 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 280.3

$f(g(x)) = x$, $x > 0$, $g(f(x)) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 280.4

$f(g(x)) = 6x - 14$, $g(f(x)) = 6x - 3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 280.5

$f(g(x)) = |\cos x|$, $g(f(x)) = \cos|x|$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 281.1

$u = 2x - 3$, $y = u^{99}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 281.2

$v = x/3$, $u = \operatorname{tg} v$, $y = \lg u$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 281.3

$v = -x^2$, $u = 3^v$, $y = \arcsin u$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 281.4

$w = 5x + 3$, $v = \sin w$, $u = v^3$, $y = \sqrt{u}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 281.5

$v = \dfrac{1-x}{1+x}$, $u = \ln v$, $y = u^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 283.1

Монотонная ограниченная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 283.2

Строго монотонная ограниченная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 283.3

Ограниченная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 283.4

Не обладает свойствами монотонности и ограниченности.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 283.5

Не обладает свойствами монотонности и ограниченности.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 283.6

Монотонная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 284

$p_0 = \frac{4}{5}$, $Q_0 = \frac{188}{75}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 285

$q_0 = 2$, $p_0 = 17$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 286

$p_0 = 3$, $Q_0 = \dfrac{17}{31}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 288.1

15.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 288.2

4/5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 288.3

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.1

15.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.2

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.3

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.4

$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.5

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.6

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.7

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.8

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.9

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.10

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.11

-4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.12

$\frac{3}{16}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.13

$-\frac{13}{11}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.14

$-\frac{47}{75}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.15

$-\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.16

$-\frac{3}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.17

$-\frac{3}{16}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.18

$\frac{7}{8}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.19

$\frac{7}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.20

$-\frac{2}{27}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.21

$-\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.22

$\frac{9}{28}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.23

-3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.24

$-\frac{37}{24}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.25

$\frac{7}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.26

-2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.27

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.28

-1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.29

$\frac{2}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.30

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.31

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.32

$\frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.33

$-\frac{3}{11}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.34

$\frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.35

$-\frac{5}{39}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.36

-8.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.37

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.38

$-\frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.39

$\frac{1}{6}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.40

$-\frac{1}{56}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.41

$\frac{1}{20}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.42

$\frac{8}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.43

-1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.44

$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.45

$\frac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.46

$\frac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.47

$-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.48

$\frac{1}{8}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.49

$-\sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.50

$\frac{1}{8}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.51

$\frac{\sqrt{5}}{10}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.52

$-\sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.53

$\frac{2}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.54

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.55

$-\frac{1}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.56

-2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.57

$\frac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.58

$\frac{4}{9}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.59

$\frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.60

$-1/12$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.61

-12.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.62

$-\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.63

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.64

$-\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.65

-3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.66

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.67

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.68

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.69

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.70

5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.71

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.72

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.73

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.74

-2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.75

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.76

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.77

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.78

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.79

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.80

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.81

$-\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.82

$-\frac{1}{14}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.83

$-\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 290.84

$\frac{1}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.1

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.2

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.3

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.4

2/5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.5

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.6

$\frac{9}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.7

25.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.8

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.9

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.10

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.11

-8.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.12

$\frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.13

$\frac{9}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.14

$-\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.15

$-\frac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.16

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.17

$-\frac{1}{12}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.18

-4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.19

$-\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.20

-6.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.21

$-\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.22

-4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.23

$\frac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.24

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.25

-1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.26

$\frac{4}{\pi}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 291.27

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.1

e^k.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.2

e^k.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.3

e^5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.4

$e^{3/2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.5

e^{-6}.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.6

e^5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.7

e^{-9}.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.8

e.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.9

e.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.10

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.11

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.12

e^{16}.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.13

e^2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.14

e^2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.15

e.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.16

$e^{9/2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.17

e^{-1}.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.18

e^{-6}.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.19

e^5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.20

$e^{3/5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.21

$e^{3/4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.22

e^{-1}.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.23

e^{-2}.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.24

e.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.25

$e^{2/3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.26

$1/\sqrt{e}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 292.27

$1/\sqrt{e}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 293.1

k.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 293.2

6.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 293.3

1/2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 293.4

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 293.5

1/4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 293.6

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 293.7

$4 \ln 2 - 4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 293.8

-2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 293.9

k.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 293.10

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 293.11

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 293.12

$-1/2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 293.13

$\sqrt{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 293.14

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 293.15

km.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 293.16

1/2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 293.17

1/6.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 293.18

1/75.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 293.19

1/2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 294.1

$f(0-0) = -3$, $f(0+0) = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 294.2

$f(3-0)=2$, $f(3+0)=3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 294.3

$f(1-0)=1$, $f(1+0)=0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 294.4

$f(2-0) = -\pi/2$, $f(2+0) = \pi/2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 294.5

$f(1-0)=0$, $f(1+0)=1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 294.6

$f(1-0) = -1$, $f(1+0) = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 294.7

$f(1-0) = -2$, $f(1+0) = 1/3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 294.8

$f(-0) = 1$, $f(+0) = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 296.1

$\frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 296.2

$\frac{2}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 296.3

$-\frac{1}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 296.4

$\log_3 7$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 296.5

$\frac{7}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 296.6

$\frac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 296.7

-6.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 296.8

$\frac{\ln 2}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 296.9

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 296.10

-1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 296.11

4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 296.12

$\frac{1}{e}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 296.13

$\frac{3}{e}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 296.14

$\frac{1}{\sqrt{3}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 296.15

$\frac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 296.16

5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 296.17

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 296.18

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 300.1

$x = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 300.2

$x \in \mathbb{R}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 300.3

$x = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 300.4

$x = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 300.5

$x \neq \pm 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 300.6

$x \in (1, 2]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 300.7

$x \in [-1/3, 1]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 300.8

$x \in [-3, -1) \cup (2, 3]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 301.1

Непрерывна справа.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 301.2

Непрерывна слева.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 301.3

Непрерывна справа.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.1

Точка конечного скачка.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.2

Точка неопределённости.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.3

Точка устранимого разрыва.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.4

Точка бесконечного скачка.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.5

Точка неопределённости.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.6

Точка устранимого разрыва.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.7

Точка бесконечного скачка.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.8

Точка конечного скачка.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.9

Точка бесконечного скачка.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.10

Точка устранимого разрыва.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.11

Точка бесконечного разрыва.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.12

Точка конечного скачка.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.13

Точка бесконечного скачка.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.14

Точка неопределённости.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.1

В точках $x_1 = -\pi/2$ и $x_2 = \pi/2$ устранимый разрыв со скачком $h = 1/2$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.2

В точке $x = 0$ конечный разрыв со скачком $h = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.3

В точках $x = \pm 1$ конечный разрыв со скачком $h = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.4

В точке $x = 1$ конечный разрыв со скачком $h = 3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.5

В точке $x = 0$ конечный разрыв со скачком $h = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.6

В точке $x = 0$ устранимый разрыв, в точке $x = 1$ разрыв второго рода. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.7

В точке $x_1 = -\pi$ скачок $h = \pi$, в точке $x_2 = \pi/2$ устранимый разрыв. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.8

В точке $x_1 = 1$ устранимый разрыв, в точке $x_2 = 2$ скачок $h = 4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.9

В точке $x = 0$ конечный разрыв со скачком $h = 1$, в точке $x = 1$ разрыв второго рода.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.10

В точке $x_1 = -2$ скачок $h = 2$, в точке $x_2 = 2$ устранимый разрыв. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.11

В точках $x = \pi/2 + \pi n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, разрыв второго рода.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.12

В точках $x = \pm 1$ конечный разрыв со скачком $h = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.13

В точке $x = 0$ конечный разрыв со скачком $h = \pi$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.14

В точках $x = \pm 1$ конечный разрыв со скачком $h = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.15

В точке $x = 0$ устранимый разрыв.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.16

В точке $x = 0$ конечный разрыв со скачком $h = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.17

В точке $x = 0$ разрыв второго рода.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.18

В точке $x = 2$ разрыв второго рода.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.19

В точке $x = -2$ разрыв второго рода.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.20

В точке $x = 0$ конечный разрыв со скачком $h = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.1

В точке $x = 0$ устранимый разрыв.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.2

В точке $x = -1$ устранимый разрыв.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.3

В точке $x = 0$ разрыв первого рода со скачком $h = \pi$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.4

В точке $x = 3$ разрыв второго рода.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.5

В точках $x = \pi/2 + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, разрыв второго рода.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.6

В точке $x = -1$ устранимый разрыв, в точке $x = 1$ конечный разрыв со скачком $h = 2\pi$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.1

$A = -4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.2

Не существует.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.3

$A = -1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 308.1

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 308.2

Нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 308.3

Нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 308.4

Нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 308.5

Да.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309

Имеет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 313

Существует.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 316

Имеет.

[Вернуться к условию]

Глава 4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Ответ к задаче 317.1

$y' = 3x^2 + 6x.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.2

$y' = 8x^3 - 2x^2 - 4.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.3

$$y' = x^3 - \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{16}{x^3} + \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.4

$$y' = 15x^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3}{2x^4} - \frac{8}{\sqrt[5]{x^9}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.5

$y' = e^x(\sin x + \cos x)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.6

$y' = \operatorname{arcctg} x - \dfrac{x}{1+x^2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.7

$$y' = \frac{\ln x}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.8

$$y' = 2x \operatorname{tg} x + \frac{x^2}{\cos^2 x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.9

$$y' = -\frac{x \sin x \ln x + \cos x}{x \ln^2 x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.10

$$y' = \frac{(2x+1)3^x \ln 3 - 2 \cdot 3^x}{(2x+1)^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.11

$$y' = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.12

$$y' = \frac{2e^x}{(1-e^x)^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.13

$$y' = \frac{\sin x - x \ln x \cos x}{x \sin^2 x} + \operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.14

$y' = 2\cos 2x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.15

$$y' = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.16

$$y' = \frac{2}{(2x-5)\ln 3}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.17

$$y' = \frac{5}{\cos^2(5x+1)}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.18

$y' = 21(3x - 8)^6$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.19

$y' = \dfrac{1}{2x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.20

$y' = \sin 2x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.21

$y' = -3 \sin x \cos^2 x.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.22

$$y' = \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.23

$y' = \dfrac{1}{x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.24

$y' = \dfrac{1}{4 + x^2}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.25

$$y' = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.26

$$y' = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.27

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.28

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.29

$y' = -\operatorname{ctg} x.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.30

$y' = \operatorname{tg} x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.31

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.32

$$y' = \frac{-5\sin x}{2\sqrt{1+5\cos x}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.33

$y' = e^x \cos x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.34

$y' = \dfrac{1}{x \ln x}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.35

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.1

$$y' = \frac{6 \operatorname{tg} 3x}{\cos^2 3x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.2

$$y' = \frac{5}{2\sqrt{(-25x^2 - 10x)\arcsin(5x+1)}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.3

$y' = (8x - 5)3^{4x^2-5x+1} \ln 3.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.4

$y' = e^{4x+1}(\sin 2x + 4\sin^2 x)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.5

$$y' = -\frac{3x \arccos^2\left(x^2/2+1\right)}{\sqrt{1-\left(x^2/2+1\right)^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.6

$$y' = \frac{2x^3 + 6x^2 - 5}{(x^3 - 2x + 1)(x + 2)}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.7

$y' = -3x^2 \cdot 2^{x^3} \sin\left(2^{x^3}\right) \cdot \ln 2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.8

$$y' = \frac{1}{3}\frac{e^{4x+1}\left(\operatorname{ctg}^2(x/3) + 12\operatorname{ctg}(x/3) + 1\right)}{\operatorname{ctg}^2(x/3)}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.9

$y' = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.10

$y' = \sqrt{a^2 - x^2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.11

$y' = \sqrt{x^2 + a^2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.12

$$y' = \frac{\operatorname{ctg} x \ln\cos x + \operatorname{tg} x \ln\sin x}{\ln^2 \cos x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.13

$y' = 4(2^x + 3x^2)^3(2^x \ln 2 + 6x)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.14

$$y' = \operatorname{tg} x + \frac{x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.15

$$y' = \frac{2x\sin(1-x^2)}{5\sqrt[5]{\cos^4(1-x^2)}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.16

$$y' = -\frac{7(x^2+1)+3x\sin 14x}{(x^2+1)^2\sin^2 7x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.17

$$y' = \frac{21\sin x}{4(1+3\cos x)^8}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.18

$$y' = \frac{21 \sin x}{4(1 + 3\cos x)^8}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.19

$$y' = \frac{2}{3}\,\frac{x^2 - 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.20

$$y' = \frac{e^x + xe^x}{2\sqrt{xe^x + 1}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.21

$$y' = -\frac{3 \cdot 2^{\arccos 3x} \ln 2 + 6(1 - \arcsin 3x)}{\sqrt{1 - 9x^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.22

$$y' = \frac{3e^x + 2^x \ln 2}{3\sqrt[3]{(3e^x + 2^x - 1)^2}} + \frac{7 \ln^6 x}{x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.23

$$y' = -\frac{9x \arccos 3x + 3\sqrt{1-9x^2}}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.24

$y' = (3x^2 + 4^x \ln 4)\cos(x^3 + 4^x)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.25

$$y' = \frac{x+2}{2\sqrt{(x^2+x+1)^3}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.26

$y' = 3\sin^2 x \cos x \, e^{\sin^3 x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.27

$$y' = \frac{e^x}{2\left(1 + e^x + \sqrt{1 + e^x}\right)}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.28

$$y' = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.29

$$y' = -\frac{\sin(4^x + 4^{-x})(4^x \ln 4 - 4^{-x} \ln 4)}{2\sqrt{\cos(4^x + 4^{-x})}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.30

$$y' = 4^{\sqrt{x^2+2x+2}} \ln 4 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.31

$$y' = 3\left(5^{\arccos x} - \operatorname{tg}^8 x\right)^2 \left(-\frac{5^{\arccos x}\ln 5}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{8\operatorname{tg}^7 x}{\cos^2 x}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.32

$$y' = 12\sin^2\left(\sqrt{x}+\lg x\right)^4\cos\left(\sqrt{x}+\lg x\right)^4\left(\sqrt{x}+\lg x\right)^3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x\ln 10}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.33

$$y' = -\frac{2x(x^2-2)}{x^4-1}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.34

$$y' = \frac{30\,\mathrm{tg}^5\,5x}{\cos^2 5x} - 7^{\frac{2x}{3x-1}}\,\frac{2\ln 7}{(3x-1)^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.35

$$y' = 5\ln^4(x - 2^{-x})\frac{1 + 2^{-x}\ln 2}{x - 2^{-x}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.1

$y' = (\sin x)^x (\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.2

$$y' = (x^2+3x)^{x-2}\left(\ln(x^2+3x) + \frac{(x-2)(2x+3)}{x^2+3x}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.3

$$y' = (\operatorname{tg} 2x)^{x^2} \left(2x \ln \operatorname{tg} 2x + \frac{2x^2}{\operatorname{tg} 2x \cos^2 2x} \right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.4

$$y' = x^{2^x}\left(2^x \ln 2 \ln x + \frac{2^x}{x}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.5

$y' = (x+2)^2(x+3)^3 + 2(x+1)(x+2)(x+3)^3 + 3(x+1)(x+2)^2(x+3)^2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.6

$$y' = \sqrt[5]{\frac{(x^2+1)(x+3)}{5(x-3)^3}}\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x+3}-\frac{3}{x-3}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.7

$$y' = \frac{\cos 2x \sqrt[4]{(2x-3)^3}}{(x+1)^2 \operatorname{ctg} x}\left(-2\operatorname{tg} 2x + \frac{3}{2(2x-3)} - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{\sin 2x}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.8

[Вернуться к условию]

$$y' = \frac{2^{x^2-3x}(1-5x)^3\sqrt{3x+1}}{(6x+5)^{10}\sqrt[3]{2x+x^2}} \times$$
$$\times \left((2x-3)\ln 2 - \frac{15}{1-5x} + \frac{3}{2(3x+1)} - \frac{60}{6x+5} - \frac{2+2x}{3(2x+x^2)} \right).$$

Ответ к задаче 319.9

$$y' = (\arcsin 5x)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}} \left(\frac{\ln(\arcsin 5x)}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}} + \frac{5\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x} \right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.10

$$y' = (3x+1)^{1/x}\left(\frac{3}{x(3x+1)} - \frac{\ln(3x+1)}{x^2}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.11

$y' = 1 + x^x(\ln x + 1) + x^{x^x}\left(x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.12

$$y' = \left(\operatorname{ctg}(4x-1)^3\right)^{\cos 6x}\left(-6\sin 6x \ln \operatorname{ctg}(4x-1)^3 - \frac{24(4x-1)^2\cos 6x}{\sin\left(2(4x-1)^3\right)}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.13

$$y' = (\operatorname{tg} 7x)^{\lg(3x+1)} \left(\frac{3 \ln \operatorname{tg} 7x}{(3x+1) \ln 10} + \frac{14 \lg(3x+1)}{\sin 14x} \right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.14

[Вернуться к условию]

$$y' = (\sin 5x)^{\cos 5x}(5\cos 5x \operatorname{ctg} 5x - 5\sin 5x \ln \sin 5x) + \\ + x^{\cos 5x}\left(\frac{\cos 5x}{x} - 5\sin 5x \ln x\right).$$

Ответ к задаче 319.15

$$y' = x^{a^x} a^x \left(\ln a \ln x + \frac{1}{x} \right) + x^{x^a + a - 1}(a \ln x + 1) + a^{x^x} x^x (\ln x + 1) \ln a.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.16

$$y' = (\operatorname{ctg} 5x)^{x^3-1}\left(3x^2 \ln \operatorname{ctg} 5x - \frac{10(x^3-1)}{\sin 10x}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.17

$$y' = (\sin(5x-1))^{\operatorname{ctg} x}\left(5\operatorname{ctg}(5x-1)\operatorname{ctg} x - \frac{\ln\sin(5x-1)}{\sin^2 x}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.18

$$y' = (6x-9)^{x^2}\left(2x\ln(6x-9) + \frac{2x^2}{2x-3}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.19

$$y' = (\arcsin 8x)^{\operatorname{tg}(3x-8)} \left(\frac{3 \ln \arcsin 8x}{\cos^2(3x-8)} + \frac{8 \operatorname{tg}(3x-8)}{\sqrt{1-64x^2}\arcsin 8x} \right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.20

$$y' = (\operatorname{tg} x)^{\sin(3x+7)} \left(3\cos(3x+7) + \frac{2\sin(3x+7)}{\sin 2x} \right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.1

5. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.2

$-\frac{4}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.3

$\frac{9}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.4

$2e(4\ln 2 - 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.5

$\dfrac{\pi - 4}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.6

16. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.7

$\frac{1}{15}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.8

6.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.9

14.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.10

33.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.11

$\dfrac{7\sqrt{3}}{36}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.12

-1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.13

-18.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.14

-125.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.15

-25.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.16

-1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.17

-1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.18

$\frac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.19

$-\frac{1}{8}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 321.1

$y'' = 6$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 321.2

$y'' = 2e^{x^2}(2x^2 + 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 321.3

$$y'' = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 321.4

$$y'' = \frac{3}{4}\,\frac{x^4 + 4x}{(1 + x^3)\sqrt{1 + x^3}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 321.5

$$y'' = \frac{8x}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 321.6

$y'' = -2\cos 2x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.1

$y''' = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.2

$y''' = 2e^x(\cos x - \sin x)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.3

$y''' = 2x^2 \sin x - 12 \sin x - 12x \cos x.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.4

$$y''' = 18\frac{x^2 - 3}{(9 + x^2)^3}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.5

$y''' = e^{-x}(3 - x)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.6

$y''' = -\dfrac{1}{x^2}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 323.1

$y^{(n)} = (-1)^n e^{-x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 323.2

$y' = 4x^3 - 9x^2 + 2x - 1$, $y'' = 12x^2 - 18x + 2$, $y''' = 24x - 18$, $y^{(4)} = 24$, $y^{(n)} = 0$, $n = 5, 6, \ldots$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 323.3

$y^{(n)} = 2^n \sin\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 323.4

$$y^{(n)} = \frac{1}{3^n}\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi n}{2}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 323.5

$y^{(n)} = (3 \ln 2)^n 2^{3x-5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 323.6

$y' = 2x\ln x + 1$, $y'' = 2\ln x + 3$, $y^{(n)} = (-1)^{n+1}2(n-3)!\dfrac{1}{x^{n-2}}$, $n = 3, 4, \ldots$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 324.1

$y^{(100)} = x\sin x - 100\cos x.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 324.2

$y^{(20)} = 2^{20}e^{2x}(x^2 + 20x + 95)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 324.3

$$y^{(50)} = 2^{50}\left(-x^2\sin 2x + 50x\cos 2x + \frac{1225}{2}\sin 2x\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 324.4

$y^{(4)} = -4e^x \cos x.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 324.5

$$y^{(5)} = \frac{274}{x^6} - \frac{120}{x^6}\ln x.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 324.6

$$y^{(8)} = \frac{8!}{(1-x)^9}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 325.1

$y = x - 1$, $y = -x + 1$, $\dfrac{\pi}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 325.2

$y = -4x - 1$, $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{4}$, $\pi - \operatorname{arctg} 4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 325.3

$y = 1$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, 0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 325.4

$y = x + 1$, $y = -x + 1$, $\dfrac{\pi}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 325.5

$y = 12x - 16$, $y = -\dfrac{1}{12}x + \dfrac{49}{6}$, $\operatorname{arctg} 12$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 325.6

$y = -5x + 2$, $y = \frac{1}{5}x - \frac{16}{5}$, $\pi - \operatorname{arctg} 5$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 325.7

$y = x$, $y = -x$, $\dfrac{\pi}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 325.8

$y = -4x - 8$, $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{15}{4}$, $\pi - \operatorname{arctg} 4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 325.9

$y = \frac{1}{6}x + \frac{9}{5}$, $y = -6x + 33$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{6}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 326б

$\left(2, \frac{32}{3}\right), \left(3, \frac{23}{2}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 327

$\left(4, \frac{67}{3}\right)$, $\left(5, \frac{133}{6}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 328

$(4, -25)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 329

$(2, 10)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 330

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{9}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right).$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331

$y = 4x$, $y = -\dfrac{x}{4}$, $y = -8x + 16$, $y = \dfrac{x}{8} - \dfrac{1}{4}$, $y = -8x - 16$, $y = \dfrac{x}{8} + \dfrac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 332

$y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$, $y = 8x + 57$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 333

$k = 7$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 334

$(1, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 335

$y = 8 - 4x$, $y = -x/4 - 2$, $\operatorname{tg}\alpha = 15/8$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 336

$y = x - 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 337

$(e-1, \ln(e-1))$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 338.1

$\operatorname{tg}\alpha = 3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 338.2

$\operatorname{tg}\alpha = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 339

$4/\sqrt{17}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 340

$(1/2, 17/4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 341

$b = -3$, $c = 4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 342

$y = 7x - 14$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 343

$\frac{\pi}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 344

$\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 345

$(7, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 346.1

$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 346.2

$\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 346.3

$\operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 346.4

arctg 3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 346.5

$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 347.1

$AC(10) = 45$, $MC(10) = 35$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 347.2

$AC(4) = 0{,}3$, $MC(4) = 0{,}02$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 347.3

$AC(1) = e^3$, $MC(1) = 3e^3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 347.4

$AC(5) \approx 4{,}95$, $MC(5) \approx 0{,}55$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 348.1

$E_{60}(y) = -0{,}6.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 348.2

$E_{\pi/3}(y) = -\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 348.3

$E_2(y) = \dfrac{26}{11}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 348.4

$E_{e^2}(y) = \frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.1

$z(1) = 112{,}5,\ v(1) = 10,\ T_z(1) = \dfrac{4}{45},\ z(7) = 82{,}5,\ v(7) = -20,\ T_z(7) = \dfrac{8}{33}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.2

$z(1) = \frac{2}{7}$, $v(1) = -\frac{4}{49}$, $T_z(1) = -\frac{2}{7}$, $z(7) = \frac{2}{19}$, $v(7) = -\frac{4}{361}$, $T_z(7) = -\frac{2}{19}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.3

$z(1) = 111{,}5,\ v(1) = 8,\ T_z(1) = \dfrac{8}{111},\ z(7) = 51,\ v(7) = -28,\ T_z(7) = \dfrac{28}{51}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.4

$z(1) \approx 0{,}63$, $v(1) \approx 0{,}368$, $T_z(1) \approx 0{,}582$, $z(7) \approx 0{,}999$, $v(7) \approx 0{,}001$, $T_z(7) \approx 0{,}001$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.1

$p = 2$; $E_2(q) = -0{,}3$; $E_2(s) = 0{,}8$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.2

$p = 1$, $E_1(q) = -0{,}25$, $E_1(s) = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.3

$p = 3$, $E_3(q) = -0{,}75$, $E_3(s) \approx 0{,}18$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.4

$p = 1$, $E_1(q) = 0$, $E_1(s) = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 351.1

$$dy = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 351.2

$$dy = -\frac{2}{(x-1)^2}dx.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 351.3

$$dy = -\frac{1}{\arccos 2x\sqrt{1-4x^2}}\,dx.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 351.4

$$dy = \left(2x\,\mathrm{tg}\,3x + \frac{3x^2}{\cos^2 3x}\right) dx.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 351.5

$dy = 2xe^{x^2}\,dx.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 351.6

$$dy = \frac{12x - 1}{6x^2 - x + 3}dx.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.1

5,1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.2

1,1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.3

$1 - \dfrac{1}{20 \ln 2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.4

$\frac{\pi}{4} + 0{,}005.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.5

214,92.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.6

$\frac{\pi}{4} + 0{,}005.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.7

$2\dfrac{107}{108}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.8

$3\frac{1}{27}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.9

$\frac{\pi}{4} + 0{,}01.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.10

$\frac{3}{100}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.11

$\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\pi}{360}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.12

$82\frac{2}{25}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.13

$1 + \dfrac{1}{500 \ln 10}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.14

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{360}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.15

4,9.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.16

5,013.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.17

2,012.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.18

3,009.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.19

$-0{,}017$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.20

0,966.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.21

1,037.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.22

$\frac{\pi}{4} - 0{,}01.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.23

85,32.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352.24

$-0{,}04$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 353.1

12,16.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 353.2

0,587.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 353.3

0,494.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 353.4

1,925.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.1

$\frac{2}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.2

-1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.3

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.4

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.5

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.6

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.7

3,5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.8

$-\frac{1}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.9

$\frac{7}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.10

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.11

$-\frac{\pi}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.12

0,5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.13

$\frac{2}{\pi}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.14

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.15

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.16

e^{-2}.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.17

3. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.18

e^{-1}.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.19

e^{-1}.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.20

e^{-1}.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354.21

e^3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.1

$y_{\max} = -7/3$ при $x = 2$, $y_{\min} = -5/2$ при $x = 3$, возрастает при $x \in (-\infty; 2]$, $[3; +\infty)$, убывает при $x \in [2; 3]$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.2

$y_{\min} = e^{-1}$ при $x = 1$, возрастает при $x \in [1, +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty, 1]$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.3

$y_{\min} = \ln(2/3)$ при $x = -1/3$, возрастает при $x \in [-1/3, +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty, -1/3]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.4

$y_{\max} = 4/e^2$ при $x = 2$, $y_{\min} = 0$ при $x = 0$, возрастает при $x \in [0, 2]$, убывает при $x \in (-\infty, 0], [2, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.5

$y_{\max} = 4 \cdot 3^{3/4}/3$ при $x = 2\sqrt{3}/3$, возрастает при $x \in \left[0, 2\sqrt{3}/3\right]$, убывает при $x \in (-\infty, -2]$, $\left[2\sqrt{3}/3, 2\right]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.6

Точек экстремума нет, возрастает при $x \in (-\infty, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.7

$y_{\min} = 4$ при $x = -1$, $y_{\max} = 5$ при $x = 0$, $y_{\min} = 4$ при $x = 1$, возрастает при $x \in [-1, 0], [1, +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty, -1], [0, 1]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.8

Точек экстремума нет, убывает при $x \in (-\infty, -2), (-2, 8), (8, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.9

$y_{\max} = 12$ при $x = -1$, $y_{\min} = -20$ при $x = 3$, возрастает при $x \in (-\infty, -1], [3, +\infty)$, убывает при $x \in [-1, 3]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.10

$y_{\min} = 0$ при $x = 1$, $y_{\max} = 2\sqrt[3]{2}$ при $x = 3$, $y_{\min} = 0$ при $x = 5$, возрастает при $x \in [1, 3], [5, +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty, 1], [3, 5]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.11

$y_{\min} = 0$ при $x = 0$, возрастает при $x \in [0, +\infty)$, убывает при $x \in (-1, 0]$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.12

$y_{\max} = 4/e^2$ при $x = 1/e^2$, $y_{\min} = 0$ при $x = 1$, возрастает при $x \in \left(-0, 1/e^2\right], [0, +\infty)$, убывает при $x \in \left[1/e^2, 1\right]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.13

$y_{\min} = 0$ при $x = -1$, $y_{\max} = 1$ при $x = 1$, $y_{\min} = 0$ при $x = 1$, возрастает при $x \in [0, 1], [1, +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty, -1], [0, 1]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.14

$y_{\min} = -4$ при $x = -3$, $y_{\max} = 12$ при $x = -1$, $y_{\min} = -4$ при $x = 1$, возрастает при $x \in [-3, -1], [1, +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty, -3], [-1, 1]$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.15

$y_{\max} = e^{12}$ при $x = -3$, возрастает при $x \in (-\infty, -3]$, убывает при $x \in [-3, +\infty)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.16

$y_{\min} = 0$ при $x = 0$, $y_{\max} = 4/27$ при $x = 8/27$, возрастает при $x \in [0, 8/27]$, убывает при $x \in (-\infty, 0]$, $[8/27, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.17

Точек экстремума нет, возрастает при $x \in (-\infty, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.18

Точек экстремума нет, возрастает при $x \in [7/3, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.19

$y_{\max} = 17$ при $x = -1$, $y_{\min} = -47$ при $x = 3$, возрастает при $x \in (-\infty, -1], [3, +\infty)$, убывает при $x \in [-1, 3]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.20

$y_{\min} = -\dfrac{4\sqrt{2}}{16+\sqrt{2}}$ при $x = -\dfrac{1}{4} - \sqrt{2}$, $y_{\max} = \dfrac{4\sqrt{2}}{16-\sqrt{2}}$ при $x = -\dfrac{1}{4} + \sqrt{2}$, возрастает при $x \in \left[-1/4-\sqrt{2}, -1/4+\sqrt{2}\right]$, убывает при $x \in \left(-\infty, -1/4-\sqrt{2}\right]$, $\left[-1/4+\sqrt{2}, +\infty\right)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.21

$y_{\max} = 40/799$ при $x = -1/20$, возрастает при $x \in (-\infty, -1/20]$, убывает при $x \in [-1/20, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355.22

$y_{\min} = \sqrt{42}/3$ при $x = -2/3$, возрастает при $x \in [-2/3, +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty, -2/3]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 356.1

$(0, -1)$, $(2, -15)$ — точки перегиба, выпукла при $x \in [0, 2]$, вогнута при $x \in (-\infty, 0], [2, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 356.2

$\bigl(1/2, 1/2 - \ln 2\bigr)$ — точка перегиба; выпукла при $x \in (0, 1/2]$, вогнута при $x \in [1/2, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 356.3

$\left(-1, 1/\sqrt{e}\right)$, $\left(1, 1/\sqrt{e}\right)$ — точки перегиба; выпукла при $x \in [-1, 1]$, вогнута при $x \in (-\infty, -1], [1, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 356.4

$(-1, \ln 2)$, $(1, \ln 2)$ — точки перегиба; выпукла при $x \in (-\infty, -1], [1, +\infty)$, вогнута при $x \in [-1, 1]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 356.5

Точек перегиба нет; выпукла при $x \in (-2, 2)$, вогнута при $x \in (-\infty, -2)$, $(2, +\infty)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 356.6

$\left(-\sqrt{3}/3, 1/2\right)$, $\left(\sqrt{3}/3, 1/2\right)$ — точки перегиба; выпукла при $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}/3\right]$, $\left[\sqrt{3}/3, +\infty\right)$, вогнута при $x \in \left[-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\right]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 356.7

Точек перегиба нет; вогнута при $x \in (-\infty, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 356.8

$(0, 0)$ — точка перегиба; выпукла при $x \in [0, +\infty]$, вогнута при $x \in (-\infty, 0]$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 356.9

Точек перегиба нет; выпукла при $x \in (-\infty, -1), (1, +\infty)$, вогнута при $x \in (-1, 1)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 356.10

$\left(-8, -18e^{-8/3}\right)$ — точка перегиба; выпукла при $x \in (-\infty, -8]$, вогнута при $x \in [-8, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 356.11

Точек перегиба нет; выпукла при $x \in (-\infty, 2]$, вогнута при $x \in [2, +\infty)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 356.12

$\left(-2, -2/e^2\right)$ — точка перегиба; выпукла при $x \in (-\infty, -2]$, вогнута при $x \in [-2, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 356.13

$(-6, -9/2)$, $(0, 0)$, $(6, 9/2)$ — точки перегиба; выпукла при $x \in [-6, 0], [6, +\infty)$, вогнута при $x \in (-\infty, -6], [0, 6]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 356.14

Точек перегиба нет; выпукла при $x \in (-\infty, 0)$, вогнута при $x \in (0, +\infty)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 356.15

$(1, -2)$ — точка перегиба; выпукла при $x \in (-\infty, 1]$, вогнута при $x \in [1, +\infty)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 356.16

$(1, \ln 2)$, $(3, \ln 2)$ — точки перегиба; выпукла при $x \in (-\infty, 1], [3, +\infty)$, вогнута при $x \in [1, 3]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 356.17

$\left(1/2, e^{\operatorname{arctg}(1/2)}\right)$ — точка перегиба; выпукла при $x \in [1/2, +\infty)$, вогнута при $x \in (-\infty, 1/2]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 357.1

$y_{\text{наиб}} = y(2) = 2$, $y_{\text{наим}} = y(1) = -2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 357.2

$y_{\text{наиб}} = y(3) = 9$, $y_{\text{наим}} = y(2) = -16$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 357.3

$y_{\text{наиб}} = y(-1) = 3$, $y_{\text{наим}} = y(-2) = -19$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 357.4

$y_{\text{наиб}} = y(0) = y(1) = 0$, $y_{\text{наим}} = y\,(1/4) = -1/4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 357.5

$y_{\text{наиб}} = y(e) = e - 1$, $y_{\text{наим}} = y(1) = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 357.6

$y_{\text{наиб}} = y(-4) = 7e^4$, $y_{\text{наим}} = y(-1) = e$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 357.7

$y_{\text{наиб}} = y(-1) = 8$, $y_{\text{наим}} = y(1) = -12$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 357.8

$y_{\text{наиб}} = y(1) = 4$, $y_{\text{наим}} = y(-1) = -4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 357.9

$y_{\text{наиб}} = y(4) = 6$, $y_{\text{наим}} = y\,(1/16) = -1/8$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 357.10

$y_{\text{наиб}} = y(-3) = 22$, $y_{\text{наим}} = y(2) = -3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 357.11

$y_{\text{наиб}} = y(\pi/4) = (4-\pi)/4$, $y_{\text{наим}} = y(-\pi/4) = (\pi-4)/4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 357.12

$y_{\text{наиб}} = y(0) = 3$, $y_{\text{наим}} = y(-2) = y(2) = -13$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 358.1

$x = -1$, $y = x - 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 358.2

$x = 1$, $y = 2x + 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 358.3

$x = 1$, $y = x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 358.4

$x = 0$, $y = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 358.5

$y = x - 1/2$, $y = -x + 1/2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 358.6

$y = \frac{\pi}{2}x - 1$, $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 358.7

$x = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 358.8

$x = -1$, $x = 1$, $y = x$, $y = -x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 358.9

$x = 1$, $y = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 358.10

$y = \pi/2$, $y = -\pi/2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 358.11

$x = 0$, $y = 2/3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 358.12

$x = 2$, $x = -2$, $y = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 358.13

$y = 3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 358.14

$x = 3$, $y = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 360.1

$q_{max} = 174{,}9$, $\Pi_{max} = 2259{,}001$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 360.2

$q_{max} = 9$, $\Pi_{max} = 78$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 360.3

$q_{\max} = 4$, $\Pi_{\max} \approx 18$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 360.4

$q_{max} = 2$, $\Pi_{max} \approx 2{,}68$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 361.1

$\varphi = \pi/3$, $s \approx 57{,}7$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 361.2

$\varphi = \pi/3$, $s \approx 109{,}6$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 361.3

$\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{3}{4}$, $s = 186$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 361.4

$\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2}$, $s = 89{,}4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 362.1

$x_1 = 1/18, x_2 = 17/18.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 362.2

$x_1 = 3/16$, $x_2 = 13/16$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 362.3

$x_1 = 11/18$, $x_2 = 7/18$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 362.4

$x_1 = 12/19$, $x_2 = 7/19$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 363

-43; -44.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 364

б) 22 000; в) 4 225.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 365

а) -50; б) $-3{,}2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 36б

33,75; 19,75.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 367

$p_0 = 2;\ -1/2,\ 1/2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 368.1

179/207.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 368.2

1,9.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 369

$p_0 = 20;\ -0{,}36,\ 0{,}72.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370

185,225; 51,5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 371

$q_{\min} = 3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 372

$q_{\min} = 800$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 373.1

$-7/18$, увеличит.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 373.2

$-7{,}5$, уменьшит.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374

25,69; 25,7.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 375

$q = 200$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 376.1

1,99.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 376.2

$-0{,}69$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.1

$q = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.2

$q = 5$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 378

$FC = 1\,000$, $q_{\min} = 2\sqrt{10}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 379

$q = 1;\ 1,\ 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 380

46, 11, -1, -3, по мере возрастания численности персонала предельная производительность падает.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 381.1

$-0{,}14$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 381.2

6.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 382

$q = 58{,}8$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 383

$-2{,}67$.

[Вернуться к условию]

Глава 5. Теория интегрирования

Ответ к задаче 384.1

$\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.2

$$\frac{x^2}{2} - \ln|x| + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.3

$$\frac{x^2}{2} + 3\sqrt[3]{x^2} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.4

$\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.5

$2x - 6\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x^3} + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.6

$$\ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.7

$\frac{1}{2}(x - \sin x) + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.8

$\frac{1}{2}(x + \sin x) + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.9

$x - \cos x + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.10

$x + \cos x + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.11

$-\sin x + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.12

$\operatorname{tg} x - x + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.13

$-x - \operatorname{ctg} x + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.14

$\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.15

$-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.16

$-\frac{1}{2}\cos x + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.17

$\frac{1}{8}(x - \sin x) + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.18

$3e^x + \operatorname{tg} x + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.19

$$\frac{3 \cdot 4^x}{\ln 4} + 3\sqrt[3]{x} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.20

$$\frac{2^{x+1}}{\ln 2} - \frac{5^{x-1}}{\ln 5} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.21

$$\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2 \cdot 6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.22

$$-\frac{1}{5^x \ln 5} - \frac{1}{2^x \ln 2} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.23

$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.24

$$\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{4}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.25

$\operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} x + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.26

$$x + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.27

$x^3 + \operatorname{arctg} x + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.28

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \operatorname{arctg} x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.29

$$\frac{2}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.30

$$\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x+4}{x-4}\right|+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.31

$$-x - \frac{4}{x^2} + \frac{12}{x} + 6\ln|x| + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.1

$\frac{1}{3}\sin 3x + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.2

$$-\frac{2}{5\sqrt{\sin 5x}}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.3

$$-\frac{1}{6}\sqrt{\operatorname{ctg}^3 4x} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.4

$2\operatorname{arctg} x + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.5

$-\frac{1}{4}e^{5-2x^2}+C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.6

$\ln(x^2+16) - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{4} + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.7

$\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}+C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.8

$$\frac{(2+5x)^{10}}{50}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.9

$\frac{1}{3}\ln|3x-1|+C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.10

$-\ln|\cos x| + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.11

$\ln|\sin x| + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.12

$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.13

$-\frac{1}{2}\arccos^2 x + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.14

$$-\frac{1}{3\arcsin^3 x}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.15

$\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x} + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.16

$e^{\sin x} + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.17

$$-\frac{4^{\cos 5x}}{5\ln 4}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.18

$$\frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.19

$$-\frac{3}{20}\sqrt[3]{(3+5\cos x)^4}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.20

$\frac{1}{8}\sqrt[4]{8x^4+125}+C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.21

$$\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{3}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.22

$$\frac{1}{6}\ln\left|x^6+\sqrt{x^{12}+3}\right|+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.23

$\ln|\ln x| + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.24

$\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^2}+C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.25

$$-\sin\frac{1}{x}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.26

$\frac{1}{2}\arcsin^2 x - \sqrt{1-x^2} + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.27

$\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.28

$\frac{1}{2}e^{2x} + e^x + \ln|e^x - 1| + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.29

$\cos\left(\frac{1}{e^x}\right) + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.30

$\arcsin \dfrac{e^x}{2} + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.31

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.32

$$\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6-1}\right|+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.33

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.34

$-\frac{1}{5}\cos^5 x + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.35

$2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.36

$$\frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{a^2 - b^2} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.37

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}\right|+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.1

$(x+8)\ln(x+8) - x + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.2

$$\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}-x+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.3

$$\left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right)\ln^2 x - \left(\frac{3x^2}{2} - 4x\right)\ln x + \frac{3x^2}{4} + 4x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.4

$$-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x+\frac{1}{2}x+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.5

$$-\frac{1}{3}(x+8)\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.6

$(x^2 - 5)\sin x + 2x\cos x + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.7

$x\sin(x-4)+\cos(x-4)+C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.8

$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.9

$$x \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \ln(1 + 4x^2) + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.10

$$\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.11

$$\frac{5x}{2}e^{2x} - \frac{7}{4}e^{2x} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.12

$$-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{27}\cos 3x+\frac{2}{9}x\sin 3x+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.13

$$\frac{2}{25}\cos 5x + \frac{2}{5}x\sin 5x + \frac{3}{5}\sin 5x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.14

$$-\frac{2}{5}e^x\cos 2x+\frac{1}{5}e^x\sin 2x+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.15

$$\frac{2}{5}e^{2x}\cos x + \frac{1}{5}e^{2x}\sin x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.16

$\frac{1}{2}x\cos(\ln x) + \frac{1}{2}x\sin(\ln x) + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.17

$$-\frac{1}{2}x\cos(\ln x)+\frac{1}{2}x\sin(\ln x)+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.18

$x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.19

$-x \operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.20

$$\frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2}+\frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.21

$$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+7}+\frac{7}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.22

$x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.23

$x \ln(x^2 + 4) - 2x + 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.24

$$x \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.25

$x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.26

$2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.27

$x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.28

$2\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \ln|x+1| + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.29

$\frac{1}{2}e^{2x} + 4xe^x - 4e^x + \frac{4}{3}x^3 + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.30

$$\frac{1}{2}e^{2x} + e^x(\cos x - \sin x) - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.31

$$-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.32

$$\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\ln^2 x - \frac{9}{8}\sqrt[3]{x^4}\ln x + \frac{27}{32}\sqrt[3]{x^4} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.33

$-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.34

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.35

$-2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 6x\sin\sqrt{x} - 12\sin\sqrt{x} + 12\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.36

$$\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.37

$$-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.38

$$-\frac{1}{2}x^2\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.1

$\ln(x^2 + 2x + 2) - 5\,\mathrm{arctg}(x + 1) + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.2

$$x + \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + 2\ln|x-1| + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.3

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.4

$x + 3\ln(x^2 - 6x + 10) + 8\,\mathrm{arctg}(x - 3) + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.5

$x - 3\ln(x^2 + 4x + 5) + 8\,\mathrm{arctg}(x + 2) + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.6

$2\ln|x-2|-\ln|x-3|+C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.7

$\ln|x| - \ln|x+1| + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.8

$\ln|(x-2)(x+5)|+C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.9

$$-\frac{7}{(x-2)^2}-\frac{2}{x-2}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.10

$$\frac{17}{x+4} + +3\ln|x+4| + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.11

$$2\ln\left|\frac{x+2}{x-4}\right| + \ln|x-5| + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.12

$$2\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|2x+1|-\ln|x-2|+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.13

$$-\frac{2}{x+3}+2\ln|x+3|-\ln|x+2|+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.14

$$4\ln|x+5| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.15

$$\ln(x^2+4x+8) - \ln|x-3| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}+1\right) + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.16

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 2) + \operatorname{arctg}(x + 1) - 2\ln|x - 3| + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.17

$$\frac{3}{x+2} + 5\ln|x+2| - 5\ln|x+3| + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.18

$$2x + \frac{15}{8}\ln|x+7| \frac{1}{8}\ln|x-1| + \ln|x+5| + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.19

$$\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.20

$$\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right) + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.21

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.22

$$\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{3} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.23

$$-3\ln|x| + \frac{3}{2}\ln(x^2 - 2x + 5) + 2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.24

$$\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 + 16x + 32\ln|x-2| + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.25

$$\frac{1}{3}x^3 - 7x + 7\sqrt{7}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{7}}{7}x\right) + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.26

$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}\ln|x^3 - 1| + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.27

$\frac{1}{2}x^2 + 4x - \ln|x| + 8\ln|x-1| + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.28

$\frac{1}{x} - \ln|x| + \ln|x-2| + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.29

$$\ln|x-2| - \frac{2}{x+1} - \ln|x+1| + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.30

$$\frac{1}{66}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| - \frac{\sqrt{2}}{22}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.31

$$\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.32

$$-\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{4}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.1

$\sqrt{2x-1}+2\sqrt[4]{2x-1}+\ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2+C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.2

$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2x + 6\sqrt{x} - 12\ln(\sqrt{x}+2) + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.3

$$-2\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\right|+\ln|x-1|-4\sqrt[4]{x}+2\sqrt{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.4

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}| + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.5

$\ln x - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.6

$$-\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+$$
$$+6\sqrt[6]{x+1}+3\ln|\sqrt[3]{x+1}-1|-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.7

$$\frac{1}{15}\sqrt[3]{(3x+1)^5}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.8

$$\frac{1}{6}\sqrt{(2x+1)^3} - \frac{x}{2} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.9

$2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.10

$$2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.11

$\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+\sqrt[3]{3x+1}+\ln|\sqrt[3]{3x+1}-1|+C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.12

$$\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+1)^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.13

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.14

$\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln|\sqrt[6]{2x+1}-1|+C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.15

$$\frac{2}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.16

$\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{3}\ln(\sqrt[4]{x^3}+1) + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.17

$$-\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x-3)^5}+2\sqrt{x-3}+3\sqrt[3]{x-3}-3\ln\left(\sqrt[3]{x-3}-\sqrt[6]{x-3}+1\right)-$$
$$-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\sqrt[6]{x-3}-1\right)\right)+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.18

$$-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}-9\ln|\sqrt[6]{x}-1|-3\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.19

$\frac{1}{6}\sqrt{(2x-1)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.20

$$2\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\right|+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.21

$$-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-3\ln(\sqrt[3]{x+1}+1)-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.22

$$x - \frac{2}{5}\sqrt[6]{(3x+1)^5} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2} - \frac{4}{3}\sqrt{3x+1} + \\ + 3\sqrt[3]{3x+1} - 4\sqrt[6]{3x+1} + 4\ln(\sqrt[6]{3x+1}+1) + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.23

$$\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} - x + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} - 4\ln(\sqrt[4]{x} + 1) + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.24

$$-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.25

$$2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.26

$x + 4\sqrt{x+1} + 4\ln(\sqrt{x+1} - 1) + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.27

$$\frac{10}{27}\sqrt{(1-3x)^3}-\frac{46}{9}\sqrt{1-3x}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.28

$$\frac{2}{7}\sqrt{(x-1)^7}+\frac{6}{5}\sqrt{(x-1)^5}+2\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{x-1}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.29

$$\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}+\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x+1)^8}-\frac{6}{5}\sqrt[3]{(x+1)^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.30

$-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}+C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.31

$2 \operatorname{arctg} \sqrt{x+1} + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.32

$$6\sqrt[6]{x} - 12\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.1

$$-\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.2

$\frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.3

$$\frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{14}\sin 7x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.4

$\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{14}\sin 7x + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.5

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{7}\sin 7x + \sin x + \frac{1}{9}\sin 9x\right) + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.6

$-\frac{1}{4}\cos^4 x + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.7

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.8

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.9

$$-\frac{1}{5}\sin x\cos^4 x+\frac{1}{15}\sin x\cos^2 x+\frac{2}{15}\sin x+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.10

$$-\frac{1}{48}\sin^3 2x - \frac{1}{8}\sin x\cos^3 x + \frac{1}{32}\sin 2x + \frac{1}{16}x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.11

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.12

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.13

$$-\frac{\cos^4 x}{\sin x} - \cos^2 x \sin x - 2\sin x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.14

$$\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right|+\frac{2\sin x}{\cos^2 x}\right)+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.15

$$\frac{\sin^5 x}{\cos x} - \sin^3 x \cos x + \frac{3}{2}\cos x \sin x - \frac{3}{2}x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.16

$$\frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2\sin^2 x} - 2\ln|\sin x| + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.17

$$\frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.18

$$\frac{5}{16}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{64}\sin 12x - \frac{1}{144}\sin^3 6x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.19

$$\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\sin^3 2x \cos 2x - \frac{3}{32}\sin 4x + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.20

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} x\right)+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.21

$$\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\operatorname{tg} x\right)+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.22

$x - \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.23

$$\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{2}\ln\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right) + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.24

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.25

$$-\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.26

$$\frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-x+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.27

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.28

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}\right|+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.29

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.30

$$\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.31

$$\frac{1}{5}\ln\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right|-\frac{1}{5}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2\right|+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.32

$$12\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+6\ln\left(\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}+1\right)-5x+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.33

$$-\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right)+3x+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.34

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\left(3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-4\right)\right)+C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 390

б) 200; в) 29 575; г) 0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 391

б) 1 250.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 392

$\pi = 25q - 0{,}002q^2 + 8\,680$, $q = 6\,250$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 393

а) $C(q) = 15\,000\, e^{0{,}001q^2} + 5\,000$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 394.1

6.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 394.2

$\frac{\pi}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 394.3

$\frac{\pi}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 394.4

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 394.5

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 394.6

$1 - \frac{\pi}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 394.7

$\frac{61}{6}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 394.8

$\frac{6}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 394.9

$1 - \frac{\pi}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.1

$\dfrac{e-1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.2

$1 - \cos 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.3

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.4

$2 - 8 \ln \frac{5}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.5

$$\frac{7}{2} - \frac{15}{2}\ln 2 + \frac{9\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\sqrt{7}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.6

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{3}\ln 2.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.7

$\frac{5\pi}{32}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.8

$e - \sqrt{e}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.9

$2\sqrt{2} - 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.10

π.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.11

$-6e-3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.12

$\frac{\ln 5}{32}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.13

$\dfrac{\pi^2}{32}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.14

$\dfrac{2e^3+1}{9}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.15

$\sqrt{65} - 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.16

$2 - \ln 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.17

$1 - \frac{2}{e}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.18

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.19

$2 \operatorname{arctg} e - \dfrac{\pi}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.20

$3 \ln 2 - \ln 5$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.21

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.22

π.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.23

$4 - \pi$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.24

$\frac{8}{9}e^3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.25

$\frac{2}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.26

$\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.27

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.28

$2 \ln 2 - 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.29

$\ln(e+1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.30

$\frac{3}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.31

$\sin 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.32

$\frac{\pi}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.33

$4 - 2\ln 3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.34

$3 \ln 3 - 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.35

$\frac{32}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.36

$2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.37

$\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.38

$2\ln 2 - \frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.39

$\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.40

$\frac{32}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.41

$2 - \sqrt{5} + 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.42

$2 - \ln 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 395.43

$\frac{17}{6}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.1

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.2

$\frac{32}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.3

$\frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.4

12. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.5

$\frac{1}{6}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.6

$\frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.7

$\frac{1}{6}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.8

$\frac{32}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.9

$12\sqrt{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.10

$9 - \dfrac{8}{\ln 9}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.11

$\frac{16}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.12

$\frac{5}{12}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.13

$\frac{9}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.14

$\frac{\pi^2}{8} + 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.15

$\frac{3}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.16

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.17

$\frac{8}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.18

$\frac{13}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.19

$\frac{32\sqrt{6}}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.20

$\frac{7}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.21

$\frac{11}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.22

$\frac{23}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.23

$\frac{35}{2} - 6 \ln 6.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.24

$$a+\frac{1}{a}-\frac{a-1}{\ln a}-\frac{a-1}{a\ln a}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.25

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.26

$\frac{7}{12}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.27

$\frac{17}{12}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.28

$\frac{4}{3} + 2\pi.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.29

$\frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.30

$4\pi - \frac{32}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 396.31

6π.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 397.1

$$\frac{80\sqrt{10}}{27} - \frac{8}{27}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 397.2

$\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 397.3

$6\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2})$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 397.4

$\frac{232}{15}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 397.5

$2 + \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 397.6

$\ln(1+\sqrt{2})$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 397.7

$4\sqrt{2} + \ln\left(\frac{9+4\sqrt{2}}{7}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 397.8

$\frac{1}{4}(e^2+1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 397.9

$\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 397.10

$4 \ln 3 - 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 397.11

$\arcsin \frac{3}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 397.12

$\dfrac{\pi+1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 397.13

$1 + \ln 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 397.14

$\ln(2+\sqrt{3})$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 397.15

$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 397.16

$\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.1

$\frac{3\pi}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.2

$\frac{\pi}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.3

27π.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.4

$\frac{80\pi}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.5

$\frac{3\pi}{10}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.6

$\frac{65\pi}{6}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.7

$$\pi\left(\frac{e^2+e^{-2}}{4}+1\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.8

$\frac{5\pi}{6}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.9

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{3}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.10

$\frac{\pi}{4}(e^2+1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.11

6π.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.12

$\frac{24\pi}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.13

$\frac{\pi}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.14

$\frac{128\pi}{15}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.15

$\frac{96\pi}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.16

$\frac{64\pi}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.17

$4\pi^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.18

$\pi\left(\ln 2 - \frac{1}{6}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.19

$\pi\left(2\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 398.20

$\frac{4a^2b\pi}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 399.1

$K_{\text{ср}} = 15,\ x = \dfrac{5}{3}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 399.2

$K_{\text{ср}} = 61$, $x = \dfrac{-1+\sqrt{91}}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 399.3

$K_{\text{ср}} = 3 - \log_2 e$, $x = \dfrac{8}{e} - 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 399.4

$K_{\text{ср}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}$, $x \approx 2,26$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 400.1

$V = \frac{2}{3} \ln \frac{10}{7} + 3.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 400.2

$V = \ln \dfrac{17}{14} + 5.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 400.3

$$V = \frac{3}{e^2} - \frac{4}{e^3}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 400.4

$V = 4 \sin \frac{1}{4} + 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 401.1

$K \approx 30{,}5$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 401.2

$K \approx 37{,}7$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 401.3

$K \approx 193{,}5$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 401.4

$K \approx 41{,}5$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 402.1

22.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 402.2

$\frac{128}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 402.3

$\approx 0{,}32.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 402.4

$\approx 0{,}8$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 403.1

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 403.2

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 403.3

Расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 403.4

$\frac{2}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 403.5

$\frac{\pi}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 403.6

-1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 403.7

Расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 403.8

$\frac{\pi^2}{8}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 403.9

Расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 403.10

π.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 403.11

$\frac{\pi}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 404.1

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 404.2

Расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 404.3

$\frac{\pi}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 404.4

$\dfrac{1}{\ln 2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 404.5

Расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 404.6

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 404.7

Расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 404.8

$\frac{3\pi^2}{8}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 404.9

Расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 404.10

Расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 404.11

$-\frac{1}{9}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 404.12

$\frac{\pi}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 404.13

$$\frac{e(\sin 1 - \cos 1)}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Глава 6. Дифференцирование функций двух переменных

Ответ к задаче 405.1

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 405.2

5, 1/5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 405.3

$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 406.1

Круг с центром в начале координат и единичным радиусом, включающий границу. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 406.2

Полоса, ограниченная параллельными прямыми $x + y + 1 = 0$ и $x + y - 1 = 0$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 406.3

Вся плоскость Oxy, исключая прямую $y = 3x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 406.4

Часть плоскости Oxy, лежащая выше прямой $y = -x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 406.5

Внешняя по отношению к параболе $y^2 = 2x - 4$ часть плоскости Oxy (без границы). [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 406.6

Внешняя часть круга $x^2 + y^2 = 16$ (без границы круга).

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 406.7

Расположенная в правой полуплоскости между прямыми $y = -x$ и $y = x$ (без прямой $y = -x$) часть плоскости Oxy.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 406.8

Точки I и III координатных углов, включая оси координат.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 406.9

Кольцо между окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 3$, включая их границы. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 406.10

Вся плоскость Oxy.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 406.11

Плоскость Oxy без прямых $y = x$ и $y = -x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 406.12

Правая полуплоскость, включая ось Oy.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 407.1

$(0, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 407.2

$(1, -1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 407.3

$(0, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 407.4

Линия $x - y = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 407.5

Линии разрыва — прямые $x = k\pi$ и $y = m\pi$, где $k, m \in \mathbb{Z}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 407.6

Окружность $x^2 + y^2 = 4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 407.7

Прямая $y = x/2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 407.8

Линия $y = x^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.1

$\dfrac{\partial \rho}{\partial u} = 4u^3 \cos^2 \varphi,\ \dfrac{\partial \rho}{\partial \varphi} = -u^4 \sin 2\varphi.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.2

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 12xy$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -6x^2 + 3y^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.3

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y - 4,\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 4y - 3x + 2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.4

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6y^2 - 2y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 12xy - 12y^2 - 2x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.5

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{5y}{(x+2y)^2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{5x}{(x+2y)^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.6

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.7

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.8

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos(x+3y) - x^2\sin(x+3y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -3x^2\sin(x+3y)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.9

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{6x}{3x^2 - y^4}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4y^3}{3x^2 - y^4}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.10

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos\sqrt{x-y^3}}{2\sqrt{x-y^3}},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -3\frac{y^2\cos\sqrt{x-y^3}}{2\sqrt{x-y^3}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.11

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{6xy}{\sqrt{1-4x^6y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^3}{\sqrt{1-4x^6y^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.12

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4xe^{2x^2-y^5}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -5y^4e^{2x^2-y^5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.13

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{x^2 \cos^2 \frac{3x-y^2}{x}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{x \cos^2 \frac{3x-y^2}{x}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.14

$\dfrac{\partial r}{\partial \rho} = 2\rho \sin^4 \theta$, $\dfrac{\partial r}{\partial \theta} = 4\rho^2 \sin^3 \theta \cos \theta$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.15

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^2} - \frac{1}{y}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.16

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{xy(x^2+y^2)}(3x^2y + y^3)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{xy(x^2+y^2)}(x^3 + 3xy^2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.17

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{x}},\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2\sqrt{x} + 6y\sqrt[3]{z^2},\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2y^2}{\sqrt[3]{z}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.18

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2+y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2+y^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.19

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = y^2 z^{xy^2} \ln z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^{xy^2} \ln z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = xy^2 z^{xy^2-1}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.20

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} + \frac{z}{y^2} e^{-\frac{z}{y}},\ \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{y} e^{-\frac{z}{y}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 408.21

$\frac{\partial u}{\partial x} = (y-z)(2x-y-z)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = (x-z)(x-2y+z)$, $\frac{\partial u}{\partial z} = (x-y)(-y+2z-x)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 409

$f'_x\left(-1, \frac{\pi}{4}\right) = -1,\ f'_x\left(-1, \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 410

$f'_x(3,-4)=\dfrac{4}{25}$, $f'_y(-12,5)=-\dfrac{12}{169}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 411

$f'_x(3,2) = 56,\ f'_y(3,2) = 42.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 413.1

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 8y^3,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 24xy^2 + 7,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24x^2 y.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 413.2

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 10y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -10x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 413.3

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4y}{(x+y)^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\frac{x-y}{(x+y)^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x+y)^3}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 413.4

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\cos(x^2+y^3) - 4x^2\sin(x^2+y^3),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6xy^2\sin(x^2+y^3),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y\cos(x^2+y^3) - 9y^4\sin(x^2+y^3).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 413.5

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin\frac{y}{x^2} + e^x \ln y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\cos y}{x} + \frac{e^x}{y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin y \ln x - \frac{e^x}{y^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 413.6

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y^2}{\sqrt{(2xy+y^2)^3}},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{\sqrt{(2xy+y^2)^3}},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2}{\sqrt{(2xy+y^2)^3}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 413.7

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - 1}{x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 413.8

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^4 \sin 2xy^2}{\cos^4 xy^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2y\cos^2 xy^2 + xy^2 \sin 2xy^2}{\cos^4 xy^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x\cos^2 xy^2 + 2x^2 y^2 \sin 2xy^2}{\cos^4 xy^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 413.9

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{1-2y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{4x}{(1-2y)^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{8x^2}{(1-2y)^3}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 413.10

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \cos y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\cos x \sin y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \cos y.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 413.11

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y^2}{(x-y)^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2xy}{(x-y)^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{(x-y)^3}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 413.12

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xe^y.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 413.13

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{4xy + 2y^2}{(2x^2 + 2xy + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y^2 - 2x^2}{(2x^2 + 2xy + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x^2 + 2xy}{(2x^2 + 2xy + y^2)^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 413.14

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{ye^{xy}(xy-2)-1}{(x+e^{xy})^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(x^2y+e^{xy})e^{xy}}{(x+e^{xy})^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^3e^{xy}}{(x+e^{xy})^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 413.15

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y(2y-1)x^{2y-2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x^{2y-1}(1+2y\ln x)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x^{2y}\ln^2 x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 413.16

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x(\cos y + x\sin y + 2\sin y),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^x(\cos y + x\cos y - \sin y),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x(x\sin y + \cos y).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.1

$$dz = \frac{x\,dx - y\,dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.2

$dz = (8x^3 - 2xy^3 + 5y)\,dx + (4y^3 - 3x^2y^2 + 5x)\,dy.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.3

$dz = \sin 2x\, dx - \sin 2y\, dy$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.4

$dz = y^2 x^{y-1}\,dx + x^y(1 + y\ln x)\,dy.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.5

$dz = e^{y^2-xy}\Big((2y-x)\,dy - y\,dx\Big).$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.6

$$dz = \frac{(6x+1)\,dx - 2y\,dy}{2\sqrt{3x^2 - y^2 + x}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.7

$$dz = \frac{2\,dx - dy}{1 + (2x - y)^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.8

$$dz = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 \sin^2 \frac{y}{x}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.9

$dz = (5y^4 + 4xy^7)\,dx + (20xy^3 + 14x^2y^6)\,dy.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.10

$$dz = \frac{1}{(x^3+y^3)^2}\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\Big(x(x^3+3xy^2-2y^3)dx + y(y^3+3x^2y-2x^3)dy\Big).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.11

$dz = 30xy(5x^2y - y^3 + 7)^2\,dx + 3(5x^2y - y^3 + 7)^2(5x^2 - 3y^2)\,dy.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.12

$$dv = \frac{t}{u^2 + t^2}\,du - \frac{u}{u^2 + t^2}\,dt.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.13

$$dz = \left(\sqrt{y} - \frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}\right) dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dy.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.14

$$dz = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}}\, dx - \frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}\, dy.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.15

$$dz = -\frac{2\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2x\,dy}{y\sqrt{x^2+y^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.16

$$dz = \frac{\sqrt{u+\sqrt{u^2+v^2}}}{2\sqrt{u^2+v^2}}\,du + \frac{v\,dv}{2\sqrt{u+\sqrt{u^2+v^2}}\sqrt{u^2+v^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.17

$$dz = 2\frac{1 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}}{\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2}(x\,dx + y\,dy).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.18

$$du = \frac{dx}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{xy\,dy + xz\,dz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.19

$du = 2xyz^4\,dx + x^2z^4\,dy + 4x^2yz^3\,dz.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.20

$$du = -\frac{y}{x^2 z}\,dx + \frac{dy}{xz} - \frac{y\,dz}{xz^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.21

$du = (3x^2 + 3y - 1)\,dx + (z^2 + 3x)\,dy + (2yz + 1)\,dz.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.22

$$du = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}\,dx + \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x\,dy - \frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x\,dz.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 417.23

$du = y^z x^{y^z-1}\,dx + zy^{z-1}x^{y^z}\ln x\,dy + y^z x^{y^z}\ln x \ln y\,dz.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 418.1

$-7/130 \approx -0{,}054$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 418.2

$-0{,}1e^2 \approx -0{,}74.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 419.1

1,28.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 419.2

5,05.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 419.3

10,28.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 419.4

2,18.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 419.5

1,08.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 419.6

0,82.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 419.7

0,227.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 419.8

3,037.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 419.9

$-0{,}03$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 419.10

$-5{,}37$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 419.11

108,972.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 420.1

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 420.2

$a\cos 2t$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 420.3

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 420.4

$$-2(5x^4 + 2y)\sin 2t + \frac{2x - 3y^2}{1 + t^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 420.5

$$\left(y\operatorname{arctg} xy + \frac{xy^2}{1+x^2y^2}\right)2t + \left(x\operatorname{arctg} xy + \frac{x^2y}{1+x^2y^2}\right)3t^2.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 420.6

$$2e^{2x-3y}\frac{1}{\cos^2 t} - 3e^{2x-3y}(2t-1).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 420.7

$$yx^{y-1}\frac{1}{t} + x^y \ln x \cos t.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 420.8

$(1+u)\left(y\cos t+\dfrac{x}{t}\right)+xye^{t}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 420.9

$$-\sin\left(2t+\frac{4}{t^2}-\frac{\sqrt{t}}{\ln t}\right)\left(2-\frac{8}{t^3}-\frac{\ln t-2}{2\sqrt{t}\ln^2 t}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 420.10

$t^7(8\sin t + t\cos t)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 421.1

$\sqrt{3}+1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 421.2

$1 + \sqrt{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 421.3

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 422

$-\frac{11\sqrt{2}}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 423

$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 424

$\frac{16}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 425.1

$\frac{2}{\sqrt{14}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 425.2

$\frac{2}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 426.1

$(4, -4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 426.2

$(-2, -4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 426.3

$(3, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 426.4

$(-4, -4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 426.5

$(0, -e)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 427.1

$(2xyz, x^2z^3, 3x^2yz^2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 427.2

$(2x, 2y, -2z)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 427.3

$(ye^{xy}, xe^{xy} - z^2, -2yz)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 427.4

$$\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 428.1

$\operatorname{grad} u = (1, -1, 0)$, $|\operatorname{grad} u| = \sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 428.2

$\operatorname{grad} u = (1, -12, -5)$, $|\operatorname{grad} u| = \sqrt{170}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 428.3

$\operatorname{grad} u = (2, -2, -4)$, $|\operatorname{grad} u| = 2\sqrt{6}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 428.4

$\operatorname{grad} u = (-6, -4, 2)$, $|\operatorname{grad} u| = 2\sqrt{14}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 428.5

$\operatorname{grad} u = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$, $|\operatorname{grad} u| = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 428.6

$\operatorname{grad} u = (-2, 6, -3)$, $|\operatorname{grad} u| = 7$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 428.7

$\operatorname{grad} u = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $|\operatorname{grad} u| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 428.8

$\operatorname{grad} u = (1, 1, -2)$, $|\operatorname{grad} u| = \sqrt{6}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 428.9

$\operatorname{grad} u = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, 0\right)$, $|\operatorname{grad} u| = \frac{1}{2\sqrt{5}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 429

637,5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 431.1

$u'_x = \dfrac{a_1}{x - c_1}$, $u'_y = \dfrac{a_2}{y - c_2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 431.2

$u'_x = a_1 x^{-b_1}$, $u'_y = a_2 x^{-b_2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 432

$E_{zx}(1,1) \approx 0{,}67$, $E_{zy} \approx 1{,}33$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 433

$E_{zx} = \alpha$, $E_{zy} = \beta$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 434.1

$\sigma_{xy} = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 434.2

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{\beta + 1}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.1

$$z_{\min} = z\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{7}{3}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.2

$z_{\min} = z\,(1, 2) = -7.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.3

Экстремума нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.4

Экстремума нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.5

$z_{\min} = z(-1, -2) = -11.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.6

$z_{\min} = z(1, 4) = -21.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.7

Экстремума нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.8

$$z_{\max} = z\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.9

$$z_{\min} = z\left(1, -\frac{1}{2}\right) = 0.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.10

$z_{\max} = z(-1, 1) = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.11

В точках $M_1(-1,-2)$ и $M_2(1,2)$ экстремума нет; $z_{\max} = z(-2,-1) = 28$, $z_{\min} = z(2,1) = -28$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.12

$z_{\min} = z(0,0) = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.13

$z_{\max} = z\,(4, 4) = 12.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.14

$z_{\max} = z(0, 0) = 2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.15

$z_{\min} = z(1,1) = 4$, $z_{\max} = z(2,1) = -28$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.16

$z_{\max} = z(2, -2) = 3.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.17

$z_{\min} = z(1, 3) = 10 - 18 \ln 3.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.18

$z_{\min} = z(-2, 0) = -2/e.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.19

$z_{\min} = z\,(-2, 0) = -2/e.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.20

$$z_{\max} = z\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 435.21

$$z_{\max} = z\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 436.1

$z_{\text{наим}} = -128$, $z_{\text{наиб}} = 1/4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 436.2

$z_{\text{наим}} = -3$, $z_{\text{наиб}} = 41$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 436.3

$z_{\text{наим}} = -1/3$, $z_{\text{наиб}} = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 436.4

$z_{\text{наим}} = 0$, $z_{\text{наиб}} = 4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 436.5

$z_{\text{наим}} = -3$, $z_{\text{наиб}} = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 436.6

$z_{\text{наим}} = -4$, $z_{\text{наиб}} = 6$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 436.7

$z_{\text{наим}} = 5$, $z_{\text{наиб}} = 12$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 436.8

$z_{\text{наим}} = 0$, $z_{\text{наиб}} = 5$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 436.9

$z_{\text{наим}} = -11$, $z_{\text{наиб}} = 9$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 436.10

$z_{\text{наим}} = -3$, $z_{\text{наиб}} = 17$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 436.11

$z_{\text{наим}} = 0$, $z_{\text{наиб}} = 36$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 436.12

$z_{\text{наим}} = -1$, $z_{\text{наиб}} = 13$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 436.13

$z_{\text{наим}} = 0$, $z_{\text{наиб}} = 16$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 436.14

$z_{\text{наим}} = -24$, $z_{\text{наиб}} = 120$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 436.15

$z_{\text{наим}} = -15$, $z_{\text{наиб}} = -62/27$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 436.16

$z_{\text{наим}} = -14$, $z_{\text{наиб}} = 18$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 436.17

$z_{\text{наим}} = 0$, $z_{\text{наиб}} = 3\sqrt{3}/2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 436.18

$z_{\text{наим}} = -3$, $z_{\text{наиб}} = 1 + \sqrt{3}/2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 436.19

$z_{\text{наим}} = -1/8$, $z_{\text{наиб}} = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 437.1

$z_{\text{наим}} = -5$, $z_{\text{наиб}} = 75$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 437.2

$z_{\text{наим}} = -2\sqrt{2}$, $z_{\text{наиб}} = 2\sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 437.3

$z_{\text{наим}} = -30$, $z_{\text{наиб}} = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 437.4

$z_{\text{наим}} = -1/2$, $z_{\text{наиб}} = 1/2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 437.5

$z_{\text{наим}} = -3$, $z_{\text{наиб}} = 3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 437.6

$z_{\text{наим}} = -120$, $z_{\text{наиб}} = 8$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 437.7

$z_{\text{наим}} = -2(\sqrt{2}+1)$, $z_{\text{наиб}} = 2(\sqrt{2}-1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 437.8

$z_{\text{наим}} = -64$, $z_{\text{наиб}} = 8$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 437.9

$z_{\text{наим}} = -40$, $z_{\text{наиб}} = 5$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 437.10

$z_{\text{наим}} = -2$, $z_{\text{наиб}} = 30$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 437.11

$z_{\text{наим}} = -48$, $z_{\text{наиб}} = z(1,-1) = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 438

$z_{\text{наиб}} = 11$, $z_{\text{наим}} = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 439.1

$\frac{19\sqrt{2}}{8}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 439.2

$\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 439.3

$$\frac{9\sqrt{5}-15}{\sqrt{50}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 439.4

$\frac{8}{\sqrt{130}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 440

$\frac{1}{14}\sqrt{2730}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 441

Максимум прибыли равен 28 при $x = 2$ и $y = 4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 442

Максимум прибыли равен 176 при $x = 8$, $y = 4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 443

Длина и ширина равны 4 метра, глубина равна 2 метра.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 444

Длина и ширина равны $2\delta + \sqrt[3]{2V}$, высота равна $\delta + \dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 445

$R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, $H = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 446

$R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, $H = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 447

$R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi}}$, $H = 2\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 448

$$R = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}},\ H = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 449

Если R — радиус основания палатки, H — высота цилиндрической части, h — высота конической верхушки, то должны иметь место следующие соотношения: $R = h\sqrt{5}/2$, $H = h/2$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 450

Проволочная сетка должна отклоняться от стены на угол $\pi/3$, участок должен захватывать отрезок каменной стены длиной $4\sqrt[4]{3}\sqrt{S}/3$, его боковые стороны должны быть равны $2\sqrt[4]{3}\sqrt{S}/3$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 451

Канал должен соединять точку $(1/2, 1/4)$ параболы с точкой $(11/8, -5/8)$ прямой, его длина при этом равна $7\sqrt{2}/8$. [Вернуться к условию]

Глава 7. Дифференциальные уравнения

Ответ к задаче 452.1

$y'x - y = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 452.2

$y'x - y = x^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 452.3

$y'(x^2 - y^2) = 2xy.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 452.4

$y' = 2y$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 452.5

$y = 2y'x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 452.6

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 452.7

$$y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x}\arcsin y.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 452.8

$y = xy' \ln \dfrac{x}{y}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 452.9

$y' \sin x = y \ln y$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 452.10

$y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 452.11

$(1 + x^2)y' = xy(1 + y^2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 452.12

$y' = -2xy$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 452.13

$xy' - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 453.1

$y = 3\ln|x| + C_1x^2 + C_2x + C_3.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 453.2

$$y = \frac{1}{27}e^{3x} + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}\sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 453.3

$y = -\ln|\cos x| + C_1 x + C_2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 453.4

$y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C_1 x + C_2$, $y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 453.5

$$y = x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1 x + C_2.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 453.6

$y = e^x - \frac{x^4}{24} + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$, $y = e^x - \frac{x^4}{24} + 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 453.7

$y = \ln|\sin x| + C_1x^2 + C_2x + C_3.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 453.8

$$y = -\frac{1}{27}\sin 3x + \frac{1}{27}x\cos 3x + C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 453.9

$$y = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x \ln(x^2+1) + C_1 x + C_2.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 454.1

$y = C(x+1)e^{-x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 454.2

$$y = -\frac{1}{\ln C(x^2 - 1)}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 454.3

$y = \operatorname{arctg}\left(C - \dfrac{2}{x}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 454.4

$y = \ln(e^x + C)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 454.5

$y = \arcsin x + C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 454.6

$y = Ce^{x^2+x}$, $y = e^{x^2+x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 454.7

$y = e^{C \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$, $y = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 454.8

$y = (x + C)^2$, $y = (x + 1)^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 454.9

$\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \operatorname{arctg} x + C$, $y = 0$, $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \operatorname{arctg} x - 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 454.10

$y = Ce^{\sqrt{4-x^3}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 454.11

$e^x - (y+1)e^{-y} = C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 454.12

$y = C \ln x$, $y = \ln x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 454.13

$1 + e^y = C(1 + x^2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 454.14

$y = e^{Ce^x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 454.15

$$y = \frac{2}{\ln|2x+1| + C},\ y = \frac{2}{\ln\frac{|2x+1|}{9} + 2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 455.1

$y = x(\ln|x| + C)$, $y = x(\ln|x| + 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 455.2

$y = xe^{Cx+1}$, $y = xe^{1-x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 455.3

$y = x \arcsin(C - \ln|x|)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 455.4

$y = x\,\mathrm{tg}(\ln|x| + C)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 455.5

$y = xe^{Cx}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 455.6

$y^3 - 3x^2y - x^3 = C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 455.7

$y = x + x(Cx + 1)^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 455.8

$2y^2 - 2xy + x^2 = C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 455.9

$y = x\ln(C + \ln|x|)$, $y = x\ln(1 + \ln|x|)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 455.10

$y = Ce^{-2\sqrt{y/x}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 455.11

$e^{x/y} + \ln|x| = C.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 455.12

$$4y + 5 = (2x - 3)\left(\ln\left|x - \frac{3}{2}\right| + C\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 455.13

$$\ln|y-x-1| = C - \frac{x-2}{y-x-1}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 455.14

$(y + 2x - 3)^2 = C(6x + 2y - 5)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 455.15

$(y-x+1)^2(y+x-1)^5=C$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 455.16

$$\ln \frac{y+2}{(x-3)^2} + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y+2}{x-3} = C.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.1

$y = (x + C)e^x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.2

$y = Ce^x - x - 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.3

$y = 1 + Ce^{-x^3/3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.4

$y = 3 + \dfrac{C}{x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.5

$$y = \frac{x}{C - \ln x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.6

$xe^x y = x^3 + C$, $xe^x y = x^3 - 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.7

$x^3y = 2x + C$, $x^3y = 2x - 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.8

$y = (x \ln x - x + C)x^{-2}$, $y = (x \ln x - x + 3)x^{-2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.9

$y = x^3(e^x + C)$, $y = x^3e^x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.10

$y = -2\cos^2 x + C\cos x.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.11

$$y = \left(e^{x/2}(x-1) + C\right)^2 e^{-x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.12

$$y = \left(\operatorname{tg} x + \frac{\ln|\cos x| + C}{x} \right)^2.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.13

$x = Ce^{-y} - y^2 + 2y - 2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.14

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.15

$y = C\sin x - \cos x$, $y = 2\sin x - \cos x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.16

$x = Cy^2 + 2\ln|y| - y + 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.17

$$y = \left(\frac{3}{14}x^{7/2} + C\right)^4 x^{-2},\ y = \left(\frac{3}{14}x^{7/2} + \frac{11}{14}\right)^4 x^{-2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.18

$x = y^2 + Cy.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.19

$y = (\operatorname{arctg} x + C)e^{-x}$, $y = (\operatorname{arctg} x + 1)e^{-x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 456.20

$$y = \frac{1}{x(C - \ln x)}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 457

$$y = \frac{2}{1 + 3e^{-2t}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 458

$D = 50 + \dfrac{100q}{k}\left(e^{kt} - 1\right).$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 459

$$x = \frac{N}{1 + (\alpha - 1)\, e^{-Nkt}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 460

$Y = 2t + 1 + e^{2t}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 461

$y = \frac{2}{3}t + \frac{5}{9}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 462

$$p = \frac{15}{4}t - \frac{77}{16} + C\,e^{-\frac{4t}{3}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 463

$\approx 6{,}93$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 464

$q = \dfrac{1}{\sqrt[3]{p}}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 465.1

$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 465.2

$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 465.3

$y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 465.4

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 465.5

$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 465.6

$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 465.7

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 465.8

$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 465.9

$y = C_1 + C_2 e^{-4x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 465.10

$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 465.11

$y = C_1 + C_2 e^x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 465.12

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 465.13

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 465.14

$y = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 465.15

$y = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 465.16

$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 465.17

$y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x).$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 465.18

$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 4x.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 465.19

$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 e^{-2x} + C_4 e^{2x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 466.1

$y = \dfrac{C_1}{x^3} + C_2 x^2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 466.2

$$y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2 \ln x}{x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 466.3

$y = C_1 + C_2 \ln x.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 466.4

$$y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 466.5

$y = C_1(2x+1) + C_2(2x+1)\ln(2x+1).$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 466.6

$$y = \frac{C_1}{(x+2)^3} + C_2(x+2).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 467.1

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x|.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 467.2

$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \dfrac{1}{x}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 467.3

$y = C_1 + C_2 e^x - 4\sqrt{x}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 467.4

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} \cos x \ln \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 467.5

$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x e^{-x} \ln |x|.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 467.6

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln |\sin x|$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 467.7

$y = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x} + e^{x^2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 467.8

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sqrt{\cos 2x}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 467.9

$y = C_1 + C_2x + \sqrt{1 - e^{2x}} + e^x \arcsin e^x.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 467.10

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \ln|\cos x| + \frac{1}{2} \sin x \ln \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.1

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{4} e^{x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.2

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 3x^2 - 3x - \frac{9}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.3

$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{5}{3} e^{-x}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.4

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - \frac{1}{5}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.5

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right) e^{2x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.6

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} + \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{25}x\right) e^x.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.7

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right) e^{-x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.8

$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x} + (x^2 + 3x)e^{-x}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.9

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) e^{-2x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.10

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x).$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.11

$y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + \frac{1}{74}(7\cos x + 5\sin x).$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.12

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{3}{4} x \cos 2x.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.13

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{4} x \cos x + \frac{1}{4} x^2 \sin x.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.14

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{13}{72} x \cos 3x + \frac{1}{12} x^2 \sin 3x.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.15

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{4} x e^x \sin 2x.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.16

$$y = e^{\frac{3}{5}x}\left(C_1 \cos\frac{4}{5}x + C_2 \sin\frac{4}{5}x\right) - \frac{1}{8}xe^{\frac{3}{5}x}\cos\frac{4}{5}x.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.17

$$y = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{6} e^{3x} - \frac{1}{3} x^3 - x^2 - 2x.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.18

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x + \frac{1}{2} e^x.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.19

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{20}\cos x - \frac{3}{20}\sin x + \frac{7}{260}\cos 3x + \frac{9}{260}\sin 3x.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 468.20

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{20}\sin 2x - \frac{1}{10}\cos 2x.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 469.1

$y = 4e^x + 2e^{3x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 469.2

$y = xe^{3x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 469.3

$y = 9 - 2e^{-4x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 469.4

$y = 2e^{-\frac{1}{2}x} + xe^{-\frac{1}{2}x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 469.5

$y = e^{2x}(\cos x - 2\sin x) + (x+1)^2 e^x.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 469.6

$$y = (1 - 3x)e^{3x} + \frac{x^2}{9} + \frac{x}{27} + \frac{1}{3}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 469.7

$$y = 3\pi \sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + x(\sin 2x - \cos 2x).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 469.8

$y = \frac{3}{2}x^2e^{-2x}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 469.9

$y = \cos x + \left(1 - \dfrac{\pi}{2}\right) \sin x + x.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 469.10

$$y = \frac{1}{4}e^x - 2e^{2x} + \frac{1}{4}e^{3x}(2x^2 - 6x + 7).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 470.1

$P(t) = e^{-2t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 470.2

$P(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 470.3

$P(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t/2} + 4.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 471

$$P = C\cos(\omega t - \varepsilon) + \frac{\alpha - \beta}{b - a}.$$

[Вернуться к условию]

Глава 8. Ряды

Ответ к задаче 472.1

$a_n = \dfrac{1}{n^3},\ n = 1, 2, 3, \ldots .$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 472.2

$a_n = \dfrac{1}{\ln n},\ n = 2, 3, 4, \ldots .$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 472.3

$a_n = \dfrac{n}{2n+1},\ n = 1, 2, 3, \ldots .$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 472.4

$a_n = \dfrac{n^2}{n!},\ n = 1, 2, 3, \ldots .$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 472.5

$(-1)^{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 472.6

$a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n},\ n = 1, 2, 3, \ldots .$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 472.7

$a_n = \dfrac{1}{2^n + 3},\ n = 1, 2, 3, \ldots.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 472.8

$a_n = \dfrac{1}{n!},\ n = 1, 2, 3, \ldots .$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 472.9

$$a_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 473.1

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 473.2

$\frac{3}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 473.3

$\frac{3}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 473.4

$\frac{23}{90}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 473.5

$\frac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 473.6

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 473.7

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 473.8

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 474.1

Выполняется.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 474.2

Не выполняется, ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 474.3

Не выполняется, ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 474.4

Не выполняется, ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 474.5

Не выполняется, ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 474.6

Выполняется.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 474.7

Не выполняется, ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 474.8

Не выполняется, ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 475.1

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 475.2

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 475.3

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 475.4

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 475.5

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 475.6

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 475.7

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 475.8

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 475.9

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 475.10

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 475.11

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 475.12

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 475.13

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 475.14

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 475.15

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 475.16

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 475.17

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 476.1

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 476.2

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 476.3

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 476.4

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 476.5

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 476.6

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 476.7

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 476.8

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 476.9

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 476.10

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 477.1

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 477.2

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 477.3

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 477.4

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 477.5

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 477.6

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 477.7

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 477.8

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 477.9

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 477.10

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 478.1

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 478.2

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 478.3

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 478.4

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 478.5

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 478.6

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 478.7

Ряд сходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 479.1

Ряд сходится абсолютно.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 479.2

Ряд сходится условно.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 479.3

Ряд сходится абсолютно.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 479.4

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 479.5

Ряд сходится условно.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 479.6

Ряд сходится абсолютно.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 479.7

Ряд сходится абсолютно.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 479.8

Ряд сходится абсолютно.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 479.9

Ряд сходится условно.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 479.10

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 479.11

Ряд сходится условно.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 479.12

Ряд сходится условно.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 479.13

Ряд сходится абсолютно.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 479.14

Ряд сходится абсолютно.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 479.15

Ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 479.16

Ряд сходится условно.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 479.17

Ряд сходится абсолютно.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 479.18

Ряд сходится абсолютно.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 480.1

$(1, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 480.2

$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 480.3

$(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 480.4

$\left[\frac{1}{10}, 10\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 480.5

$\mathbb{R} \setminus \{2 + 4n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 480.6

$\varnothing$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 480.7

$(-\infty, \infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 480.8

$[0, \infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 480.9

$(0, \infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 480.10

$(-1, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 480.11

$$(-\infty, -1) \cup \left[-\frac{1}{3}, \infty\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 480.12

$(-\infty, \infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 480.13

$(-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 480.14

$(-2, 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 480.15

$\varnothing$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.1

$[-1, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.2

3. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.3

$[-1, 1]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.4

$[-4, 6)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.5

$[-1, 1]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.6

$(-1, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.7

$(-\infty, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.8

$[-7, 3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.9

$(-1, 7)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.10

$(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.11

$(-4, 4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.12

$\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.13

$(-2, 4]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.14

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.15

$(-5, -3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.16

$\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.17

$(1, 3]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.18

$[2, 3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.19

$(-2; 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 481.20

$(0, 4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 482.1

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 2}{n!} x^n$, $(-\infty, \infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 482.2

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n\, n!} x^n$, $(-\infty, \infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 482.3

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n!} x^{n+2}$, $(-\infty, \infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 482.4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2},\ (-\infty, \infty).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 482.5

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$, $(-\infty, \infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 482.6

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n}}{(2n)!} x^{2n+2}$, $(-\infty, \infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 482.7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^n}{n} x^{2n},\ \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 482.8

$\frac{2}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $(-1,1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 482.9

$$\ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n \cdot 5^n} x^n, \quad \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right].$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 482.10

$$\ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2^n + 3^n)}{n \cdot 6^n} x^n,\ (-2, 2].$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 482.11

$$\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n \cdot 2^n} x^n,\ (-1, 1).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 482.12

$$\ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) \frac{x^n}{n},\ (-2, 2].$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 482.13

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}} x^n, \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right).$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 482.14

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$, $(-1,1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 482.15

$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(5-3^{1-n})x^n$, $(-1,1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 482.16

$$1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n\,n!}x^{2n},\ [-1,1].$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 482.17

$$3+\frac{x}{27}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-4)}{3^{4n-1}\,n!}x^n,\ [-27,27].$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 483.1

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$, $(0, 2]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 483.2

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n$, $(-2, 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 483.3

$$e^{-2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right),\ (-\infty,\infty).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 483.4

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n$, $(1,3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 483.5

$$2+\frac{x-4}{4}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot 2n\cdot 2^{2n}}(x-4)^n,\ [0,8].$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 483.6

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^n, \ (-\infty, \infty).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 483.7

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(x+1)^{2n}$, $[-2, 0]$.

[Вернуться к условию]

Часть III

Тесты

Глава 1. Линейная алгебра
Глава 2. Аналитическая геометрия
Глава 3. Теория пределов
Глава 4. Теория дифференцирования
Глава 5. Теория интегрирования
Глава 6. Функции двух переменных
Глава 7. Дифференциальные уравнения
Глава 8. Ряды

Глава 1

Линейная алгебра

1.1. Матрицы, определители, обратная матрица, системы уравнений
1.2. Векторная алгебра

1.1. Матрицы, определители, обратная матрица, системы уравнений

Начало теста (Инструкции).

1. Если

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 7 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix},$$

то

$$-3A + 4B = \begin{pmatrix} \square * & \square * & \square * \\ \square * & \square * & \square * \end{pmatrix}.$$

2. Если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

то

$$AB = \begin{pmatrix} \square * & \square * & \square * & \square * \\ \square * & \square * & \square * & \square * \end{pmatrix}.$$

3. Пусть

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5x + 8, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти значение матричного многочлена $f(A)$.

Решение. Выписываем нулевую, первую, вторую и третью степени матрицы A:

$$A^0 = E = \begin{pmatrix} \square * & \square * \\ \square * & \square * \end{pmatrix}, \qquad A^1 = A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \square * & \square * \\ \square * & \square * \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} \square * & \square * \\ \square * & \square * \end{pmatrix}.$$

Находим значение матричного многочлена:

$$f(A) = -A^3 + 3A^2 - 5A + 8E = \begin{pmatrix} \square * & \square * \\ \square * & \square * \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти AA^T и A^TA.

Решение. Выписываем транспонированную матрицу:

$$A^T = \begin{pmatrix} \square * & \square * & \square * \\ \square * & \square * & \square * \end{pmatrix}.$$

Находим искомые произведения:

$$AA^T = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

5. Вычислите определители. $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = *$.

6. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & -4 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = *$.

7. Вычислить определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Решение. Занулите все элементы последней строки, кроме четвертого:

$$D = \begin{vmatrix} \square\,* & \square\,* & \square\,* & -3 \\ \square\,* & \square\,* & \square\,* & -1 \\ \square\,* & \square\,* & \square\,* & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Запишите определитель D в виде произведения числа и минора четвертого элемента последней строки:

$$D = \square\,* \begin{vmatrix} \square\,* & \square\,* & \square\,* \\ \square\,* & \square\,* & \square\,* \\ \square\,* & \square\,* & \square\,* \end{vmatrix}.$$

Вынесите со знаком «минус» наибольший общий делитель элементов третьего столбца:

$$D = \square\,* \begin{vmatrix} \square\,* & \square\,* & \square\,* \\ \square\,* & \square\,* & \square\,* \\ \square\,* & \square\,* & \square\,* \end{vmatrix}.$$

Занулите все элементы третьего столбца, кроме первого:

$$D = \square^{*} \begin{vmatrix} \square^{*} & \square^{*} & \square^{*} \\ \square^{*} & \square^{*} & 0 \\ \square^{*} & \square^{*} & 0 \end{vmatrix}.$$

Запишите полученный определитель в виде произведения некоторого числа и минора первого элемента третьего столбца, а затем завершите вычисления:

$$D = \square^{*} \begin{vmatrix} \square^{*} & \square^{*} \\ \square^{*} & \square^{*} \end{vmatrix} = \square^{*}.$$

8. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$ найдите обратную матрицу.

Решение. Вычисляем определитель матрицы A:

$$\det A = \square^{*}.$$

Находим присоединенную матрицу:

$$A^{*} = \begin{pmatrix} \square^{*} & \square^{*} \\ \square^{*} & \square^{*} \end{pmatrix}.$$

Выписываем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \square^{*} & \square^{*} \\ \square^{*} & \square^{*} \end{pmatrix}.$$

9. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ найдите обратную матрицу.

Решение. Вычисляем определитель матрицы A:

$$\det A = \boxed{}\boxed{*}.$$

Находим присоединенную матрицу:

$$A^* = \begin{pmatrix} \boxed{}\boxed{*} & \boxed{}\boxed{*} & \boxed{}\boxed{*} \\ \boxed{}\boxed{*} & \boxed{}\boxed{*} & \boxed{}\boxed{*} \\ \boxed{}\boxed{*} & \boxed{}\boxed{*} & \boxed{}\boxed{*} \end{pmatrix}.$$

Выписываем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{}\boxed{*} & \boxed{}\boxed{*} & \boxed{}\boxed{*} \\ \boxed{}\boxed{*} & \boxed{}\boxed{*} & \boxed{}\boxed{*} \\ \boxed{}\boxed{*} & \boxed{}\boxed{*} & \boxed{}\boxed{*} \end{pmatrix}.$$

10. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решить матричное уравнение $XA = B$.

Решение. Находим матрицу A^{-1} и выписываем ее в виде произведения положительного рационального числа и целочисленной матрицы, наибольший общий делитель всех элементов которой равен единице:

$$A^{-1} = \square^{*} \begin{pmatrix} \square^{*} & \square^{*} \\ \square^{*} & \square^{*} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} \square^{*} & \square^{*} \\ \square^{*} & \square^{*} \end{pmatrix}.$$

11. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & -6 & -4 & 0 & -4 \\ -4 & -3 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

методом элементарных преобразований.

Решение. Зануляем четвертый столбец с помощью третьей строки:

$$\begin{pmatrix} \square^{*} & \square^{*} & \square^{*} & 0 & \square^{*} \\ \square^{*} & \square^{*} & \square^{*} & 0 & \square^{*} \\ -4 & -3 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

С помощью первой строки зануляем второй элемент второй строки:

$$\begin{pmatrix} \square * & \square * & \square * & 0 & \square * \\ \square * & 0 & \square * & 0 & \square * \\ -4 & -3 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Делаем вывод, что ранг данной матрицы равен $\square *$.

12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 4y = 13, \\ 5x + 17y = 56 \end{cases}$$

методом Крамера.

Решение. Вычисляем определители для формул Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 17 \end{vmatrix} = \square *,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \square * & \square * \\ \square * & \square * \end{vmatrix} = \square *, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} \square * & \square * \\ \square * & \square * \end{vmatrix} = \square *.$$

Отсюда следует, что

$$x = \square *, \quad y = \square *.$$

13. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 10x + 4y = -18, \\ x + 2y - 5z = -5, \\ -4x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

методом Гаусса.

Решение. Рассмотрим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 4 & 0 & -18 \\ 1 & 2 & -5 & -5 \\ -4 & -2 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

Сократим первую строку на ее наибольший общий делитель (со знаком «плюс»), а в третьем столбце занулим все элементы, кроме последнего:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \square * & \square * & 0 & \square * \\ \square * & \square * & 0 & \square * \\ -4 & -2 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

Занулим второй элемент второго столбца:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \square * & \square * & 0 & \square * \\ \square * & 0 & 0 & \square * \\ -4 & -2 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

Отсюда находим, что

$$x = \square *, \quad y = \square *, \quad z = \square *.$$

Clear

1.2. Векторная алгебра

Начало теста (Инструкции).

1. Даны точки $A(5,-2,4)$ и $B(-3,7,1)$. Координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ следующие:

$$\overrightarrow{AB} = \left(\square^{*}, \square^{*}, \square^{*}\right), \quad \overrightarrow{BA} = \left(\square^{*}, \square^{*}, \square^{*}\right).$$

2. Орт вектора $\mathbf{a}(4,-1,8)$ равен

$$\left(\square^{*}, \square^{*}, \square^{*}\right).$$

3. Являются ли точки $A(3,-1,4)$, $B(1,2,5)$, $C(1,8,4)$, $D(7,-1,1)$ вершинами трапеции?

Решение. Находим векторы:

$$\overrightarrow{AB} = \left(\square^{*}, \square^{*}, \square^{*}\right), \qquad \overrightarrow{BC} = \left(\square^{*}, \square^{*}, \square^{*}\right),$$
$$\overrightarrow{CD} = \left(\square^{*}, \square^{*}, \square^{*}\right), \qquad \overrightarrow{DA} = \left(\square^{*}, \square^{*}, \square^{*}\right).$$

Таким образом, четырехугольник $ABCD$:

☐ является трапецией; ☐ не является трапецией.

4. Векторы $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \beta\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ коллинеарны при

$$\alpha = \square^{*}, \quad \beta = \square^{*}.$$

5. Два вектора $\mathbf{a}(2,1,-2)$ и $\mathbf{b}(-4,1,8)$ приложены к одной точке. Найти вектор $\mathbf{c}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если известно, что $|\mathbf{c}| = 2\sqrt{6}$.

$$\mathbf{c} = \left(\square^{*}, \square^{*}, \square^{*}\right).$$

6. Если $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \dfrac{\pi}{3}$ и $\mathbf{c} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, то

$$\mathbf{ab} = \square^{*}, \quad \mathbf{ac} = \square^{*}, \quad \mathbf{c}^2 = \square^{*}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{c}}) = \sqrt{\square^{*}}.$$

7. Для векторов $\mathbf{a}(3, 1, -2)$ и $\mathbf{b}(-2, 0, -5)$

$$\mathbf{ab} = \square^{*}.$$

8. Векторы $\mathbf{a}(3, -2, 1)$ и $\mathbf{b}(-1, \alpha, 5)$ будут перпендикулярны при

$$\alpha = \square^{*}.$$

9. Даны векторы $\mathbf{a} = (2, -3)$ и $\mathbf{b} = (4, 1)$. Найти вектор $\mathbf{x}$, перпендикулярный вектору $\mathbf{a}$ и удовлетворяющий условию $\mathbf{bx} = 14$.

$$\mathbf{x} = \left(\square^{*}, \square^{*}\right).$$

10. Для векторов

$$\mathbf{a}_1 = (3, -2, 0), \quad \mathbf{a}_2 = (-1, 2, 5), \quad \mathbf{a}_3 = (4, 0, -3)$$

пространства $\mathbb{R}^3$ линейная комбинация

$$-\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3 = \left(\square^{*}, \square^{*}, \square^{*}\right).$$

11. Найти ранг системы векторов

$$\mathbf{a}_1 = (-6, 7, -4), \qquad \mathbf{a}_2 = (10, -3, -2),$$
$$\mathbf{a}_3 = (-2, 2, -1), \qquad \mathbf{a}_4 = (0, 5, -5).$$

Решение. Составим матрицу A с данными векторами в качестве столбцов и получим нуль на месте третьего элемента четвёртого столбца:

$$\begin{pmatrix} -6 & 10 & -2 & 0 \\ 7 & -3 & 2 & 5 \\ -4 & -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 & 10 & -2 & 0 \\ 7 & -3 & 2 & 5 \\ \square^{*} & \square^{*} & \square^{*} & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, ранг данной системы векторов равен [ ] *.

12. Даны векторы $\mathbf{a} = (1, -3)$, $\mathbf{b} = (2, 5)$, $\mathbf{c} = (1, -14)$. Определить разложение вектора $\mathbf{c}$ по базису $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Решение. Ищем такие α и β, при которых

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}.$$

Получаем систему линейных уравнений для определения α и β:

$$\begin{cases} [\ ]^*\alpha + [\ ]^*\beta = [\ ]^*, \\ [\ ]^*\alpha + [\ ]^*\beta = [\ ]^*. \end{cases}$$

Решая ее, получаем:

$$\alpha = [\ ]^*, \quad \beta = [\ ]^*.$$

Таким образом,

$$\mathbf{c} = [\ ]^*\mathbf{a} + [\ ]^*\mathbf{b}.$$

13. Найти собственные значения и векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Решение. Выпишете собственные значения матрицы A, расположив их по возрастанию:

$$\lambda_1 = [\ ]^*, \quad \lambda_2 = [\ ]^*.$$

Найдите собственный вектор X^1, соответствующий значению λ_1:

$$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix} \square * & 8 \\ -4 & \square * \end{pmatrix}, \quad X^1=\begin{pmatrix} \square * \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите собственный вектор X^2, соответствующий значению λ_2:

$$A-\lambda_2 E=\begin{pmatrix} \square * & 8 \\ -4 & \square * \end{pmatrix}, \quad X^2=\begin{pmatrix} \square * \\ 1 \end{pmatrix}.$$

14. Для векторов $\mathbf{a}=(1,-1,2,1)$ и $\mathbf{b}=(-3,1,3,3)$

$$\mathbf{ab}=\square *, \ |\mathbf{a}|=\sqrt{\square *}, \ |\mathbf{b}|=\sqrt{\square *}, \ \cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=\square *.$$

Clear

Глава 2

Аналитическая геометрия

2.1. Прямая на плоскости
2.2. Кривые второго порядка

2.1. Прямая на плоскости

Начало теста (Инструкции).

1. Уравнение

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$$

является:

- ☐ уравнением прямой с угловым коэффициентом;
- ☐ уравнением прямой в отрезках;
- ☐ уравнением другого типа.

2. Уравнение

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 7 = 0$$

является:

- ☐ уравнением прямой с угловым коэффициентом;
- ☐ уравнением прямой в отрезках;
- ☐ уравнением другого типа.

3. Уравнение

$$y = 3x + 4$$

является:

- ☐ уравнением прямой с угловым коэффициентом;
- ☐ уравнением прямой в отрезках;
- ☐ уравнением другого типа.

4. Прямая $2x + 3y = 6$ отсекает на оси абсцисс отрезок $a =$ ☐ *, а на оси ординат — отрезок $b =$ ☐ *.

5. Через точки $A(3,2)$ и $B(4,-1)$ проходит прямая

$$\square^{*}x + y + \square^{*} = 0.$$

6. Прямая, проходящая через точки $A(-1,-3)$ и $B(3,5)$, имеет угловой коэффициент $k = \square^{*}$ и пересекает ось Oy в точке с ординатой $b = \square^{*}$.

7. Уравнение прямой, для которой точка $M(1,3)$ является серединой ее отрезка, заключенного между осями координат, следующее:

$$y = \square^{*}x + \square^{*}.$$

8. В треугольнике ABC, где $A(0,0)$, $B(2,6)$, $C(3,1)$,

а) уравнение медианы AM имеет вид $y = \square^{*}x$;

б) уравнение высоты AD имеет вид $y = \square^{*}x$;

в) уравнение биссектрисы AE имеет вид $y = \square^{*}x$.

9. Найти тангенс угла α между прямыми $2x + 3y - 7 = 0$ и $-x + 4y - 1 = 0$.

Решение. Последовательно вычисляем угловые коэффициенты первой и второй прямой k_1 и k_2, а затем $\operatorname{tg}\alpha$:

$$k_1 = \square^{*}, \quad k_2 = \square^{*}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \square^{*}.$$

10. Прямые $2x + 3y + 4$ и $6x - 4y + 5$:

- ☐ параллельны, но не совпадают;
- ☐ совпадают;
- ☐ пересекаются под острым углом;
- ☐ пересекаются под прямым углом.

11. Прямые $4x - 5y + 2$ и $-8x + 10y - 4$:

- ☐ параллельны, но не совпадают;
- ☐ совпадают;
- ☐ пересекаются под острым углом;
- ☐ пересекаются под прямым углом.

12. Прямые $-x + 2y - 3$ и $-3x + 6y + 1$:

- ☐ параллельны, но не совпадают;
- ☐ совпадают;
- ☐ пересекаются под острым углом;
- ☐ пересекаются под прямым углом.

13. Прямые $2x + y - 4$ и $-x + 3y + 5$:

- ☐ параллельны, но не совпадают;
- ☐ совпадают;
- ☐ пересекаются под острым углом;
- ☐ пересекаются под прямым углом.

14. Уравнение прямой, проходящей через точку $(-1, -1)$ и параллельной прямой, соединяющей точки $(3, -2)$ и $(5, 4)$, следующее:

$$y = \square^{*} x + \square^{*}.$$

15. Прямые $3x - 2y + 5 = 0$ и $-6x + \alpha y - 1 = 0$ параллельны при $\alpha = \square^{*}$ и перпендикулярны при $\alpha = \square^{*}$.

16. Найти точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ с вершинами $A(14,9)$, $B(14,-8)$, $C(-7,2)$, $D(-6,8)$.

Решение. Уравнения диагоналей записываем как общее уравнение прямой с целыми коэффициентами, наибольший общий делитель которых равен единице; коэффициент при x выбираем неотрицательным:

$$AC: \square^{*}x + \square^{*}y + \square^{*} = 0,$$
$$BD: \square^{*}x + \square^{*}y + \square^{*} = 0.$$

Тогда точка пересечения диагоналей $O\left(\square^{*}, \square^{*}\right)$.

17. В треугольнике с вершинами $A(7,3)$, $B(3,5)$, $C(-3,13)$ найти длину высоты AD.

Решение. Составляем уравнение стороны BC как общее уравнение прямой с целыми коэффициентами, наибольший общий делитель которых равен единице; коэффициент при x выбираем неотрицательным:

$$\square^{*}x + \square^{*}y + \square^{*} = 0.$$

Отсюда вычисляем высоту $AD = \square^{*}$.

18. Симметрично точке $M_1(-2,1)$ относительно прямой $3x+2y-9=0$ располагается точка

$$M_2\left(\square^{*}, \square^{*}\right).$$

19. Если стороны квадрата лежат на параллельных прямых

$$3x-4y-12=0, \quad 3x-4y+3=0,$$

то его площадь $S = \square^{*}$.

20. Найти координаты центра описанной около треугольника ABC с вершинами $A(6,-1)$, $B(-1,-8)$, $C(6,-9)$ окружности.

Решение. Находим середину D отрезка AB, угловой коэффициент прямой AB и уравнение срединного перпендикуляра к стороне AB:

$$D\left(\boxed{}\boxed{*}, \boxed{}\boxed{*}\right), \quad k_{AB} = \boxed{}\boxed{*}, \quad y = \boxed{}\boxed{*}x + \boxed{}\boxed{*}.$$

Находим середину E отрезка AC и уравнение срединного перпендикуляра к стороне AC:

$$E\left(\boxed{}\boxed{*}, \boxed{}\boxed{*}\right), \quad y = \boxed{}\boxed{*}x + \boxed{}\boxed{*}.$$

Приходим к выводу, что центр описанной окружности $O\left(\boxed{}\boxed{*}, \boxed{}\boxed{*}\right)$.

Clear

2.2. Кривые второго порядка

Начало теста (Инструкции).

1. Для окружности $x^2 + y^2 + 12x - 14y + 4 = 0$ координаты центра O и радиус R следующие:

$$O\left(\square^{*}, \square^{*}\right), \quad R = \square^{*}.$$

2. Через точки $A(-2, 3)$, $B(-2, 7)$, $C(4, 3)$ проходит окружность

$$x^2 + y^2 + \square^{*} x + \square^{*} y + \square^{*} = 0.$$

3. Эллипс с большой полуосью $a = 5$ и эксцентриситетом $\varepsilon = \dfrac{4}{5}$ имеет уравнение

$$\frac{x^2}{\square^{*}} + \frac{y^2}{\square^{*}} = 1.$$

4. Эллипс $x^2 + 9y^2 - 4x - 5 = 0$ имеет центр в точке

$$O\left(\square^{*}, \square^{*}\right).$$

Его большая полуось $a = \square^{*}$, малая полуось $b = \square^{*}$, расстояние между фокусами $2c = \square^{*}\sqrt{2}$.

5. Гипербола, уравнения асимптот которой имеют вид $y = \pm\dfrac{1}{2}x$ и расстояние между фокусами, лежащими на оси абсцисс, $2c = 6\sqrt{5}$, имеет каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{\square^{*}} - \frac{y^2}{\square^{*}} = 1.$$

6. На части гиперболы

$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1,$$

лежащей в первой четверти, точка M, меньший фокальный радиус которой $r_2 = \sqrt{6}$, имеет координаты

$$M\left(\square\,*, \sqrt{\square\,*}\right).$$

7. Уравнение симметричной относительно оси Ox и лежащей в правой полуплоскости параболы с вершиной в начале координат и расстоянием между фокусом и директрисой, равным 3, следующее:

$$y^2 = \square\,* x.$$

8. Уравнение касательной к параболе $y^2 = 2x$ в точке $A(8, -4)$ следующее:

$$y = \square\,* x + \square\,*.$$

Clear

Глава 3

Теория пределов

3.1. Последовательности
3.2. Предел, непрерывность точки разрыва функции одной переменной

3.1. Последовательности

Начало теста (Инструкции).

1. Первые пять элементов последовательности $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ следующие:

$$x_1 = \square^*, \quad x_2 = \square^*, \quad x_3 = \square^*,$$
$$x_4 = \square^*, \quad x_5 = \square^*.$$

2. Последовательность x_n задана рекуррентно формулами $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 3$. Ее первые пять элементов следующие:

$$x_1 = \square^*, \quad x_2 = \square^*, \quad x_3 = \square^*,$$
$$x_4 = \square^*, \quad x_5 = \square^*.$$

3. Является ли ограниченными последовательности: $x_n = \dfrac{n}{n+1}$;

☐ Да ☐ Нет

4. $x_n = \ln n$;

☐ Да ☐ Нет

5. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$?

☐ Да ☐ Нет

6. Последовательность $x_n = \dfrac{n+1}{n}$

☐ возрастает; ☐ убывает; ☐ не является монотонной.

7. Последовательность $x_n = (-1)^n$

☐ возрастает; ☐ убывает; ☐ не является монотонной.

8. Последовательность $x_n = \sin n$

☐ возрастает; ☐ убывает; ☐ не является монотонной.

9. Последовательность $x_n = \ln n$

☐ возрастает; ☐ убывает; ☐ не является монотонной.

10. Последовательность $x_n = \ln n$

☐ бесконечно малая; ☐ бесконечно большая; ☐ не принадлежит к указанным типам.

11. Последовательность $x_n = 2^{(-1)^n}$

☐ бесконечно малая; ☐ бесконечно большая; ☐ не принадлежит к указанным типам.

12. Последовательность $x_n = (-1)^n n$

☐ бесконечно малая; ☐ бесконечно большая; ☐ не принадлежит к указанным типам.

13. Последовательность $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

☐ бесконечно малая; ☐ бесконечно большая; ☐ не принадлежит к указанным типам.

14. Найти пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n+1}{3n^2-1} =$ ☐ *.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-3}{n^2+1} =$ ☐ *.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+4}{n^2+5} =$ ☐ *.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{n^2+1}-\dfrac{3n^2}{3n-1}\right)$.

Решение. Приводим дроби к общему знаменателю и вычитаем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+1}-\frac{3n^2}{3n-1}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\square^{*}n^4+\square^{*}n^3+\square^{*}n^2+\square^{*}n+\square^{*}}{(n^2+1)(3n-1)}=$$
$$=\square^{*}.$$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{5n+11}-\dfrac{\cos n}{10n}\right)=\square^{*}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}=\square^{*}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}=\square^{*}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}=\square^{*}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin n!}{n^2+1}=\square^{*}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\square^{*}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}\right)=\square^{*}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)=\square^{*}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=e^{\square^{*}}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)^n = e^{\square *}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{\square *}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(\ln(n+3)-\ln n\Big) = \square *$.

Clear

3.2. Предел, непрерывность точки разрыва функции одной переменной

Начало теста (Инструкции).

1. Для функции $y = \sqrt{4 - x^2}$
   - ☐ область определения $X = (-\infty, +\infty)$, множество значений $Y = (-\infty, +\infty)$;
   - ☐ область определения $X = (-2, 2)$, множество значений $Y = (0, 2)$;
   - ☐ область определения $X = [-2, 2]$, множество значений $Y = [0, 2]$;
   - ☐ область определения $X = (-2, 2)$, множество значений $Y = (-\infty, +\infty)$.
2. Для функции $y = \arccos(x + 2)$
   - ☐ область определения $X = [-3, -1]$, множество значений $Y = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
   - ☐ область определения $X = [-1, 1]$, множество значений $Y = [0, \pi]$;
   - ☐ область определения $X = (-3, -1)$, множество значений $Y = (0, \pi)$;
   - ☐ область определения $X = [-3, -1]$, множество значений $Y = [0, \pi]$.
3. Функция $f(x) = x^5 - x^3 - x$
   - ☐ четная;
   - ☐ нечетная;
   - ☐ не является ни четной, ни нечетной.
4. Функция $f(x) = \cos x + x \sin x$
   - ☐ четная;
   - ☐ нечетная;
   - ☐ не является ни четной, ни нечетной.
5. Функция $f(x) = \operatorname{arctg}(x^3 + x^2)$
   - ☐ четная;
   - ☐ нечетная;
   - ☐ не является ни четной, ни нечетной.
6. Период функции $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ равен ☐ * π.

7. Период функции $y = \sin 3x + \sin 2x$ равен $\square^{*}\pi$.

8. Период функции $y = |\sin x|$ равен $\square^{*}\pi$.

9. Найти следующие пределы. $\lim\limits_{x\to 3} x^2 - 7x + 4 = \square^{*}$.

10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 4} = \square^{*}$.

11. $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\sin x - \cos 2x) = \square^{*}$.

12. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{3 + \sqrt[4]{2x^3}} = \sqrt{\square^{*}}$.

13. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 + 6x + 8}{x^3 + 8} = \square^{*}$.

14. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x - 4}{x - 2} = \square^{*}$.

15. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} = \square^{*}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x} = \square^{*}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 5x} = \square^{*}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{x^2} = \square^{*}$.

19. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} = \square^{*}$.

20. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x+1)^{10}(x^2+1)}{(3x+1)^2(x+5)^5(x-1)^5} = \square^{*}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \square$ *.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sqrt{1+x}-1} = \square$ *.

23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right) = \square$ *.

24. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x = \square$ *.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 5x} = \square$ *.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1} = \square$ *.

27. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\operatorname{arctg}(2x-1)}{4x^2-1} = \square$ *.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-1}{\arcsin x} = \square$ *.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = e^{\square}$ *.

30. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{\square}$ *.

31. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{при } x \neq 3, \\ A, & \text{при } x = 3 \end{cases}$$

будет непрерывной в точке $x = 3$ при $A = \square$ *.

32. Функция $y = \dfrac{3x+3}{2x+4}$ имеет в точке $x = -2$:

☐ устранимый разрыв; ☐ скачок; ☐ разрыв второго рода.

33. Функция $y = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{при } x < 0, \\ \sin x, & \text{при } 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}, \\ x - \dfrac{\pi}{2} + 1, & \text{при } x \geqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ имеет:

☐ в точке $x = 0$ устранимый разрыв, в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ устранимый разрыв;

☐ в точке $x = 0$ устранимый разрыв, в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ скачок;

☐ в точке $x = 0$ устранимый разрыв, в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ разрыв второго рода;

☐ в точке $x = 0$ скачок, в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ устранимый разрыв;

☐ в точке $x = 0$ скачок, в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ скачок;

☐ в точке $x = 0$ скачок, в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ разрыв второго рода;

☐ в точке $x = 0$ разрыв второго рода, в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ устранимый разрыв;

☐ в точке $x = 0$ разрыв второго рода, в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ скачок;

☐ в точке $x = 0$ разрыв второго рода, в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ разрыв второго рода.

Clear

Глава 4

Теория дифференцирования

4.1. Дифференцирование функций одной переменной
4.2. Исследование функции одной переменной

4.1. Дифференцирование функций одной переменной

Начало теста (Инструкции).

1. Производная функции $y = f(x)$ в точке x определяется следующим соотношением:

☐ $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$ ☐ $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ☐ $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to \infty} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

2. Пусть u и v — дифференцируемые функции. Выберите неверную формулу:

☐ $(u+v)' = u' + v'$ ☐ $(uv)' = u'v + uv'$ ☐ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v + uv'}{v^2}$

3. Является ли верным утверждение «Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке»?:

☐ неверным ☐ верным

4. Является ли верным утверждение «Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она дифференцируема в этой точке»?

☐ неверным ☐ верным

5. Найдите производную функции $y = 2x^2 - 3x + \dfrac{1}{x} - 1$. Выберите правильный ответ:

☐ $y' = 4x - 4 + \dfrac{1}{x^2}$ ☐ $y' = 4x - 3 - \dfrac{1}{x^2}$ ☐ $y' = 2x - 3$

6. Найдите производную функции $y = x \ln x$. Выберите правильный ответ:

☐ $y' = 1$ ☐ $y' = \ln x + 1$ ☐ $y' = 2$ ☐ $y' = \ln x - 1$

7. Найдите производную функции $y = \sin 2x$. Выберите правильный ответ:

☐ $y' = \cos 2x$ ☐ $y' = 2\cos x$ ☐ $y' = 2\cos 2x$ ☐ $y' = -\cos 2x$

8. Найдите производную функции $y = x^{x^2}$. Выберите правильный ответ:

☐ $y' = x^2 x^{x^2-1}$ ☐ $y' = (2\ln x + 1)x^{x^2+1}$ ☐ $y' = x^{x^2} \ln x$

9. Найдите вторую производную функции $y = \cos x$. Выберите правильный ответ:

☐ $y'' = \cos x$ ☐ $y'' = -\cos x$ ☐ $y' = \sin x$ ☐ $y' = -\sin x$

10. Найдите пятую производную функции $y = x^4 - \frac{1}{3}x^2 + 6$. Выберите правильный ответ:

☐ $y^{(5)} = 24$ ☐ $y^{(5)} = 24x + 1$ ☐ $y^{(5)} = 0$ ☐ $y^{(5)} = x^2 + x$

11. Вычислите значение производной функции $y = \operatorname{tg}^2 x$ в данной точке:
$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ ☐ *.

12. Вычислите значение производной функции $y = xe^{2x}$ в данной точке:
$y'(0) =$ ☐ *.

13. Вычислите значение производной функции $y = \ln \sin x$ в данной точке:
$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ ☐ *.

14. Вычислите значение производной функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $x^2y^2 + xy - 12 = 0$, в данной точке $(1; 3)$:
$y' =$ ☐ *.

15. Вычислите значение производной y'_x функции заданной параметрически $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2$ при $t = \frac{\pi}{4}$:
$y'_x =$ ☐ *.

16. В какой точке угловой коэффициент касательной к функции $y = 2\sqrt{x}$ равен 3?
$x_0 =$ ☐ *.

17. Найдите абсциссу точки пересечения касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 1$ с осью Ox.
$x =$ ☐ *.

18. Используя понятие дифференциала функции, вычислите приближенно $\sqrt{37}$ (ответ запишите неправильной дробью).
☐ *.

19. Найдите предел: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x - x}{x^3} =$ ☐ *.

20. Найдите предел: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x}{\ln x} =$ * .

Clear

4.2. Исследование функции одной переменной

Начало теста (Инструкции).

1. Точка x_0 называется точкой минимума функции $y = f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки выполняется соотношение:

   ☐ $f(x_0) > f(x)$ ☐ $f(x_0) < f(x)$

2. Дифференцируемая функция $y = f(x)$ является строго возрастающей на некотором промежутке, если выполняется условие:

   ☐ $f'(x) > 0$ ☐ $f'(x) < 0$ ☐ $f'(x) = 0$

3. Если x_0 — точка экстремума дифференцируемой функции $y = f(x)$, то:

   ☐ $f'(x_0) = 0$ ☐ $f'(x_0) = 1$ ☐ $f'(x_0) = \infty$ ☐ $f'(x_0) < 0$

4. Пусть дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция $y = f(x)$ обладает свойством $f'(x) < 0$ при $x \in [a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0; b]$. Тогда x_0 является

   ☐ точкой максимума ☐ точкой перегиба ☐ точкой минимума

5. Пусть дважды дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция $y = f(x)$ обладает свойством $f''(x) > 0$ при $x \in [a; x_0)$ и $f''(x) < 0$ при $x \in (x_0; b]$. Тогда x_0 является

   ☐ точкой максимума ☐ точкой перегиба ☐ точкой минимума

6. Функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ на промежутке $[1; 5]$

   ☐ является возрастающей ☐ является убывающей ☐ не является монотонной

7. Точка $x_0 = 1$ для функции $y = x^3 - 3x$ является

   ☐ точкой максимума ☐ точкой перегиба ☐ точкой минимума

8. Функция $y = x^4 - x^3 + 2x$ на промежутке $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$

☐ является выпуклой ☐ является вогнутой ☐ не обладает свойством выпуклости

9. Точка $x_0 = \frac{1}{2}$ для функции $y = x^4 - x^3 + 2x$ является

☐ точкой перегиба ☐ точкой экстремума ☐ ни тем, ни другим

10. Функция $y = \frac{x}{x^2+1}$

☐ имеет только верикальные асимптоты ☐ имеет только наклонные асимптоты ☐ имеет и вертикальные, и наклонные асимптоты ☐ не имеет асимптот

11. Найдите промежуток возрастания функции $y = e^{x^2}$:
$\left[\ \square\ *\ ;\ \square\ *\ \right)$

12. Найдите промежуток убывания функции $y = x^3 - x^2 - x$:
$\left[\ \square\ *\ ;\ \square\ *\ \right]$.

13. Найдите значение функции $y = 4x^3 - 3x$ в точке минимума:
$\square\ *$.

14. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ на отрезке $[-1; 2]$:
$\min\limits_{[-1;2]} y(x) = \square\ *$, $\max\limits_{[-1;2]} y(x) = \square\ *$,

15. Наименьшее значение функции $y = (x^2 + x - 5)e^{-x-2}$ на отрезке $[-4; 4]$ равно:
$\square\ *$

16. Функция $y = x^3 - 6x^2 + x$ вогнута на промежутке:
$\left[\ \square\ *\ ;\ \square\ *\ \right)$

17. Функция $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$ выпукла на промежутке:
$[\ \square\ *\ ;\ \square\ *\ ]$

18. Найдите точку перегиба функции $y = 2x^2 + \ln x$:

[ ] * .

19. Вертикальными асимптотами функции $y = \dfrac{2x+1}{x^2-5x+6}$ являются линии:

$x =$ [ ] * ,

$x =$ [ ] *

20. Наклонной асимптотой функции $y = \dfrac{2x^3 - x^2}{x^2+1}$ является прямая:

$y =$ [ ] * $x +$ [ ] *

Clear

Глава 5

Теория интегрирования

5.1. Неопределённый интеграл
5.2. Определённый интеграл с приложениями

5.1. Неопределённый интеграл

Начало теста (Инструкции).

1. Количество первообразных для непрерывной на интервале $(a; b)$ функции $y = f(x)$:

   ☐ равно одна ☐ ни одной ☐ бесконечное количество ☐ ровно две

2. Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то также первообразными являются функции вида (C — некоторая константа):

   ☐ $F(x) + C$ ☐ $C \cdot F(x)$ ☐ $(F(x))^C$ ☐ первообразных больше нет

3. Выберите неверное правило (k — некоторая константа):

   ☐ $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;

   ☐ $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$;

   ☐ $\int (f(x) \cdot g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$.

4. Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то:

   ☐ $\int f(ax + b)\,dx = aF(ax + b) + C$;

   ☐ $\int f(ax + b)\,dx = F(ax + b) + C$;

   ☐ $\int f(ax + b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$.

5. Формулу интегрирования по частям в кратной форме можно записать в виде:

- ☐ $\int u\,dv = uv + \int v\,du$;
- ☐ $\int u\,dv = uv - \int v\,du$;
- ☐ $\int u\,dv = uv - \int u\,dv$.

6. Первообразной для функции $\cos x$ является функция:

☐ $\sin x$ ☐ $\cos x$ ☐ $-\sin x$ ☐ $-\cos x$

7. Первообразной для функции $2x$ не является функция:

☐ x^2 ☐ $x^2 + 1$ ☐ $2x^2$ ☐ $x^2 - 2$

8. Неопределенный интеграл $\int \left(x^2 - 2x + \frac{1}{x}\right) dx$ равен:

☐ $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1 + C$ ☐ $x^3 - x^2 + \ln|x| + C$ ☐ $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \ln|x| + C$

9. Неопределенный интеграл $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ равен:

☐ $\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C$ ☐ $3\sqrt[3]{x} + C$ ☐ $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$

10. Неопределенный интеграл $\int \frac{x+1}{x}\,dx$ равен:

☐ $x + \ln|x| + C$ ☐ $1 + \ln|x| + C$ ☐ $\frac{\frac{1}{2}x^2 + x}{\frac{1}{2}x^2} + C$

11. Неопределенный интеграл $\int \cos 2x\,dx$ равен:

☐ $\sin 2x + C$ ☐ $2\sin 2x + C$ ☐ $\frac{1}{2}\sin 2x + C$

12. Неопределенный интеграл $\int xe^{x^2}\,dx$ равен:

☐ $e^{x^2} + C$ ☐ $x^2 e^{x^2} + C$ ☐ $\frac{1}{2} e^{x^2} + C$

13. Неопределенный интеграл $\int \ln x \, dx$ равен:

☐ $\frac{1}{x} + C$ ☐ $x \ln x - x + C$ ☐ $x \ln x + x + C$

14. Неопределенный интеграл $\int (x+1) \sin x \, dx$ равен:

☐ $\sin x - x \cos x - \cos x + C$;
☐ $\sin x + x \cos x + \cos x + C$;
☐ $-\left(\frac{x^2}{2} + x\right) \cos x + C$.

15. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ равен:

☐ $\ln|x^2 + 2x + 2| + C$ ☐ $\operatorname{arctg}(x+1) + C$ ☐ $1 + \operatorname{arctg} x + C$

16. Вычислите неопределенный интеграл $\int \frac{x^2 + 3x + 4}{(x+2)(x^2 + 2x + 2)} \, dx$.

Решение. Результатом разложения подынтегральной дроби на простейшие будет сумма дробей

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{(x+2)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{\square * \square}{x+2} + \frac{\square * \square x + \square * \square}{x^2 + 2x + 2}$$

Значит, исходный интеграл равен

☐ $\ln|x+2| + \ln|x^2 + 2x + 2| + C$;
☐ $\ln|x| + \operatorname{arctg} x + C$;
☐ $\ln|x+2| + \operatorname{arctg}(x+1) + C$.

17. Неопределенный интеграл $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 + x^2}}$ равен:

$\sqrt{1+x^2}+C$ $2\sqrt{1+x^2}+C$ $\ln\left|\sqrt{1+x^2}\right|+C$

18. Неопределенный интеграл $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$ равен:

- $x-2\sqrt{x}+2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$;
- $\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$;
- $x-2\sqrt{x}+C$.

19. Неопределенный интеграл $\int \operatorname{ctg} x\,dx$ равен:

$\operatorname{tg} x+C$ $-\frac{1}{\sin^2 x}+C$ $\ln|\sin x|+C$

20. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{1+2\cos x}$ равен:

- $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{3}}\right|+C$;
- $\ln|1+2\cos x|+C$;
- $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3\right)+C$.

Clear

5.2. Определённый интеграл с приложениями

Начало теста (Инструкции).

1. Для вычисления определенного интеграла применяется формула Ньютона–Лейбница, которая имеет вид (здесь $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$):

   ☐ $\int_a^b f(x)\,dx = F(a) + F(b)$;

   ☐ $\int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b)$;

   ☐ $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

2. Выберите верные высказывания:

   1) Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

   2) Если функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она непрерывна на этом отрезке.

   ☐ 1) ☐ 2) ☐ 1) и 2) ☐ оба неверные

3. Может ли функция, не являющаяся непрерывной на отрезке $[a; b]$, быть интегрируемой на этом же отрезке:

   ☐ да ☐ нет

4. Если функция $f(x)$ является четной, то интеграл $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ равен ($a > 0$):

- [ ] 0
- [ ] $2\int_0^a f(x)\,dx$
- [ ] ∞
- [ ] $\int_0^a f(x)\,dx$

5. Если функция $f(x)$ является нечетной, то интеграл $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ равен $(a > 0)$:

- [ ] 0
- [ ] $2\int_0^a f(x)\,dx$
- [ ] ∞
- [ ] $\int_0^a f(x)\,dx$

6. Вычислите определенный интеграл $\int_2^{10} dx$:

- [ ] 0
- [ ] 1
- [ ] 8
- [ ] ∞

7. Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$:

- [ ] 0
- [ ] 2
- [ ] π
- [ ] $\frac{\pi}{2}$

8. Вычислите определенный интеграл $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$:

- [ ] 0
- [ ] 1
- [ ] π
- [ ] $\frac{\pi}{4}$

9. Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, e^{\sin x}\,dx$:

- [ ] $e-1$
- [ ] $e+1$
- [ ] 1
- [ ] π

10. Вычислите определенный интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{2x+5}{(x+2)(x+3)}\,dx$:

☐ $\ln 2$ ☐ $\ln 3$ ☐ $\ln 6$ ☐ 1

11. $\int_{0}^{1} xe^{x}\,dx =$ ☐ *.

12. $\int_{-2}^{2} x\,e^{x^4}\,dx =$ ☐ *.

13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

$S =$ ☐ *

14. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$.

$S =$ ☐ *

15. Вычислите площадь фигуры, лежащей в первой четверти и ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$.

$S =$ ☐ *

16. Вычислите длину диги кривой $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ от $x = 0$ до $x = 3$.

$L =$ ☐ *

17. Вычислите длину диги кривой $y = \ln\cos x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{4}$.

☐ 1 ☐ $\ln(1+\sqrt{2})$ ☐ $\ln 2$ ☐ 3

18. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox области под параболой $y = x^2$ от $x = 0$ до $x = 2$.

☐ $\frac{32}{5}\pi$ ☐ $\frac{23}{5}\pi$ ☐ π ☐ 1

19. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 1$.

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 1
- ☐ π
- ☐ $\frac{\pi}{2}$

20. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy области, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 0$, $y = 1$.

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 1
- ☐ π
- ☐ $\frac{\pi}{2}$

Clear

Глава 6

Функции двух переменных

Начало теста (Инструкции).

1. Область определения X функции $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$ следующая:

- $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \geqslant a^2\right\}$;
- $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 > a^2\right\}$;
- $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leqslant a^2\right\}$;
- $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 < a^2\right\}$.

2. Область определения X функции $z = \arcsin \dfrac{y}{x^2}$ следующая:

- $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |y| \leqslant x^2\right\}$;
- $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |y| < x^2\right\}$;
- $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |y| < x^2, x \neq 0\right\}$;
- $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |y| \leqslant x^2, x \neq 0\right\}$.

3. Что можно сказать о пределе $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$?

- ☐ Существует и равен 0.
- ☐ Существует и равен 1.
- ☐ Не существует.
- ☐ Существует и равен ∞.

4. Все точки разрыва функции $z = \sin\dfrac{1}{x-y}$ лежат на

- ☐ прямых $x = 0$ и $y = 0$;
- ☐ прямой $y = x$;
- ☐ прямых $y = x + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$;
- ☐ прямых $y = x + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

5. Частные производные функции $z = \dfrac{y}{x}$ следующие:

- ☐ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x}$;
- ☐ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x}$;
- ☐ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y}{x}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x}$;
- ☐ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x}$.

6. Частные производные функции $z = xe^{-xy}$ следующие:

- ☐ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -xye^{-xy}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x^2e^{-xy}$;
- ☐ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{-xy}(1-xy), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x^2e^{-xy}$;
- ☐ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{-xy}(x+1), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = xe^{-xy}$.

7. Для функции $z = x\sin\dfrac{x}{y}$, где $x = 1+3t$ и $y = \sqrt{1+t^2}$, верно, что:

- $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{3t}{\sqrt{1+t^2}}\left(\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{x}{y}\cos\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{x^2}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\dfrac{3t}{\sqrt{1+t^2}}$;
- $\dfrac{dz}{dt} = 3\left(\sin\dfrac{x}{y} - \dfrac{x}{y}\cos\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{x^2}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$;
- $\dfrac{dz}{dt} = 3\left(\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{x}{y}\cos\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{x^2}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$;
- $\dfrac{dz}{dt} = 3\left(\sin\dfrac{x}{y} + x\cos\dfrac{1}{y}\right) - x\cos\dfrac{x}{y^2}\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

8. Для функции $z = y^x$:

- $dz = y^x \ln y\,(dx + dy)$;
- $dz = y^x \ln y\,dx\,dy$;
- $dz = y^x\left(\ln y\,dx + \dfrac{x}{y}\,dy\right)$;
- $dz = xy^{x-1}\,(dx + dy)$;
- $dz = xy^{x-1}\,dx\,dy$;
- $dz = y^x\left(\dfrac{x}{y}\,dx + \ln y\,dy\right)$;

9. Пусть $u = x^2 - 2xz + y^2$, и единичный вектор l сонаправлен с вектором $\overrightarrow{MN}$, где $M(1, 2, -1)$, $N(2, 4, -3)$. Найти производную функции u по направлению l в точке M.

Решение. Находим векторы $\overrightarrow{MN}$ и l:

$$\overrightarrow{MN} = (\square^*, \square^*, \square^*),$$
$$\mathsf{l} = (\square^*, \square^*, \square^*).$$

Вычисляем частные производные функции u в точке M:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = \square^*, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M) = \square^*, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(M) = \square^*.$$

Выписываем искомую производную по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathsf{l}} = \square^*.$$

10. Для функции $u = xyz$ в точке $M(3, -1, 2)$

$$\operatorname{grad} u = \Big(\square^{*}, \square^{*}, \square^{*} \Big), \quad |\operatorname{grad} u| = \square^{*}.$$

11. Для функции $z = xe^y$:

- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{2y}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{2y}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xe^{2y};$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xe^y, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^y;$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^y y''(x), \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xe^y \big(y'(x)\big)^2, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xe^y y''(x).$

12. Найти экстремумы функции $z = x^3 - y^3 - 3xy$.

Решение. Имеем две стационарные точки:

$$M_1(0, 0), \quad M_2 \Big(\square^{*}, \square^{*} \Big).$$

Вычисляем вторые производные функции z в точке M_1:

$$A = z''_{xx}(M_1) = \square^{*}, \quad B = z''_{xy}(M_1) = \square^{*},$$
$$C = z''_{yy}(M_1) = \square^{*}.$$

Для точки M_1 находим, что

$$\Delta = AC - B^2 = \square^{*}.$$

Вычисляем вторые производные функции z в точке M_2:

$$A = z''_{xx}(M_2) = \square^{*}, \quad B = z''_{xy}(M_2) = \square^{*},$$
$$C = z''_{yy}(M_2) = \square^{*}.$$

Для точки M_2 находим, что

$$\Delta = AC - B^2 = \square^*.$$

Итак, функция z имеет экстремум в точке номер (введите 1 для M_1 или 2 для M_2) $\square^*$. Тип экстремума:

- ☐ минимум, причем $z_{\min} = \square^*$;
- ☐ максимум, причем $z_{\max} = \square^*$.

Clear

Глава 7

Дифференциальные уравнения

7.1. Элементарные дифференциальные уравнения
7.2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

7.1. Элементарные дифференциальные уравнения

Начало теста (Инструкции).

1. Укажите порядок дифференциального уравнения $y' - \dfrac{x^3}{x^2 + y'^2} - \sin y'' = 0$.

   ☐ 1 ☐ 2
   ☐ 3 ☐ это не дифференциальное уравнение

2. Пусть условия теоремы Коши выполняются в некоторой области D и точка $(x_0; y_0) \in D$. Какое количество интегральных кривых проходит через точку $(x_0; y_0)$?

   ☐ одна ☐ ни одной
   ☐ одна или более ☐ не менее двух

3. Могут ли интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ пересекаться?

   ☐ да ☐ нет

4. Пусть функция $y = \varphi(x, C)$ является общим решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. Будет ли верным следующее утверждение: «Можно подобрать значение C_0, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет условию $\varphi'(x, C_0) \neq f(x, \varphi(x, C_0))$»?

   ☐ да ☐ нет

5. Метод Бернулли решения линейного уравнения $y' + p(x)y = g(x)$ состоит в использовании подстановки

   ☐ $y = ux$ ☐ $y = uv$ ☐ $y = \dfrac{u}{v}$ ☐ $y = C(x)x$

6. Пусть функция $y = Ce^x$ является общим решением некоторого дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. Найдите частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = -1$.

   ☐ $y = e^{-x+1}$ ☐ $y = -e^{x+1}$ ☐ $y = e^{-x-1}$ ☐ $y = -e^{-x-1}$

7. Какая из функций

$$y = e^x, \quad y = 2, \quad y = \frac{1}{x+1}, \quad y = \sqrt{\ln(x+1)}$$

является решением дифференциального уравнения

$$y\,dy = \frac{dx}{2(x+1)}?$$

- ☐ $y = e^x$
- ☐ $y = 2$
- ☐ $y = \frac{1}{x+1}$
- ☐ $y = \sqrt{\ln(x+1)}$

8. Укажите порядок однородной функции $f(x, y) = y^2 - 2xy$.

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ функция не является однородной

9. Общим решением дифференциального уравнения $dx - \sin^2 x\,dy = 0$ является

- ☐ $y = 0$
- ☐ $y = \operatorname{ctg} x + C$
- ☐ $y = -\operatorname{ctg} x + C$
- ☐ $x = \pi + C$

10. Найдите частное решение дифференциального уравнения

$$x^2 dy - y^2 dx = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}.$$

- ☐ $y = \frac{x}{x+1}$
- ☐ $y = (x - 0,5)^2 + \frac{1}{3}$
- ☐ $y = e^x$
- ☐ $y = \frac{1}{3}$

11. Решите задачу Коши $y' \sin x - (2y+1)\cos x = 0$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

- ☐ $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$
- ☐ $y = 2\sin^2 x - \frac{1}{2}$
- ☐ $y = 2\sin^2 x + \frac{1}{2}$
- ☐ $y = \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + 1$

12. Найдите общее решение дифференциального уравнения $ydx + (x + y)dy = 0$.

- ☐ $y + 2xy = C$
- ☐ $y^2 + 2xy = C$
- ☐ $y^2 - 2xy = C$
- ☐ $y^2 - xy = C$

13. Решите задачу Коши $y^2 + x^2y' = xyy'$, $y(1) = 1$.

- ☐ $y = 1$
- ☐ $y = \sin^2(x - 1) + 1$
- ☐ $y = x^2 + 2x - 2$
- ☐ $y = x(1 + \ln y)$

14. Чтобы уравнение $(y + 2)dx - (2x + y + 6)dy = 0$ привести к однородному, следует воспользоваться заменой
$x = X +$ ☐ *, $y = Y +$ ☐ *

15. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y' - 2xy = e^{x^2}$.

- ☐ $y = (x - C)e^{x^2}$
- ☐ $y = Ce^{x^2}$
- ☐ $y = (x + C)e^{x^2}$
- ☐ $y = xe^{x^2} + C$

16. Решите задачу Коши $xy' - y - x^3 = 0$, $y(2) = 4$.

- ☐ $y = \dfrac{x^3}{2}$
- ☐ $y = x + 2$
- ☐ $y = x^3 - 4$
- ☐ $y = e^{x-2} + 3$

17. Решите задачу Коши $y' - \dfrac{y}{x} = -y^2$, $y(1) = -1$.

- ☐ $y = x - 2$
- ☐ $y = \dfrac{x}{x - 2}$
- ☐ $y = \dfrac{2x}{x^2 - 3}$
- ☐ $y = x^2 + 2x - 4$

Clear

7.2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Начало теста (Инструкции).

1. Из указанных выберите уравнение, не являющееся линейным уравнением с постоянными коэффициентами.
   - ☐ $y' + xy = 0$
   - ☐ $y'' + y = 0$
   - ☐ $y'' + 24y = \cos 5x$
   - ☐ $y'' + 5y' + 6y = x \sin x$
2. Из указанных линейных уравнений с постоянными коэффициентами выберите однородное уравнение.
   - ☐ $y' + y = x$
   - ☐ $y'' + y = 0$
   - ☐ $y'' + 24y = \cos 5x$
   - ☐ $y'' + 5y' + 6y = x \sin x$
3. Из указанных функций выберите ту, которая не может являться частным решением уравнения с постоянными коэффициентами $y'' + px + q = 0$.
   - ☐ $\cos x$
   - ☐ e^x
   - ☐ $\ln x$
   - ☐ $\sin x$
4. Пусть $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ — частные решения уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Из указанных функций выберите ту, которая не является решением этого уравнения.
   - ☐ $y_1(x) + 2y_2(x)$
   - ☐ $\dfrac{y_2(x)}{3}$
   - ☐ $y_1(x) - 3y_2(x)$
   - ☐ $y_1(x)y_2(x)$
5. Пусть $y_0(x)$ — общее решение уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, $\varphi(x)$ — частные решения уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$. Тогда общим решением уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ является
   - ☐ $y = C_1 y_0(x) + C_2 \varphi(x)$
   - ☐ $y = y_0(x)\varphi(x)$
   - ☐ $y = y_0(x) + \varphi(x)$
   - ☐ $y = y_0(x)$
6. Найдите определитель Вронского для функций $\cos x$, $\sin x$.
   $W =$ ☐ *
7. Найдите определитель Вронского для функций x, e^x, e^{-x}.

☐ 1 ☐ x ☐ $2x$ ☐ 0

8. Составьте линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, фундаментальныя система решений которого имеет вид $\cos x$, $\sin x$.

☐ $y^2 + y = 0$ ☐ $y^2 - y = 0$
☐ $y^2 + y' + y = 0$ ☐ $y^2 + y' - y = 0$

9. Общее решение уравнения $y'' + 5y' + 6y = 0$ имеет вид

☐ $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$;
☐ $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$;
☐ $y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$;
☐ $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

10. Общее решение уравнения $y'' + 4y = 0$ имеет вид

☐ $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$;
☐ $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{-2x}$;
☐ $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$;
☐ $y = e^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

11. Общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$ имеет вид

☐ $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x}$ ☐ $y = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
☐ $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{x}$ ☐ $y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x}$

12. Пусть числа $k_1 = 2$ и $k_2 = 3$ являются решениями характеристического уравнения некоторого линейного уравнения с постоянными коэффициентами, правая часть которого $f(x) = xe^x$. Тогда частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

☐ $\varphi(x) = (Ax + B)e^x$ ☐ $\varphi(x) = Axe^x$
☐ $\varphi(x) = (Ax + B)xe^x$ ☐ $\varphi(x) = Ae^x$

13. Пусть числа $k_1 = -2$ и $k_2 = 1$ являются решениями характеристического уравнения некоторого ли-

нейного уравнения с постоянными коэффициентами, правая часть которого $f(x) = 4e^x$. Тогда частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

- ☐ $\varphi(x) = (Ax + B)e^x$
- ☐ $\varphi(x) = Ae^x$
- ☐ $\varphi(x) = (Ax + B)xe^x$
- ☐ $\varphi(x) = Axe^x$

14. Пусть числа $k_1 = k_2 = 1$ являются решениями характеристического уравнения некоторого линейного уравнения с постоянными коэффициентами, правая часть которого $f(x) = \cos x$. Тогда частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

- ☐ $\varphi(x) = A\cos x$
- ☐ $\varphi(x) = A\cos x + B\sin x$
- ☐ $\varphi(x) = Ax\cos x$
- ☐ $\varphi(x) = Ax\cos x + Bx\sin x$

15. Частное решение неоднородного уравнения $y'' - 2y' - y = 6xe^x$ следует искать в виде $\varphi(x) = (Ax + B)e^x$. Определите коэффициенты A и B.

$A =$ ☐ *, $B =$ ☐ *

16. Частное решение неоднородного уравнения $y'' + 3y' - 4y = 11\cos x - 7\sin x$ следует искать в виде $\varphi(x) = A\cos x + B\sin x$. Определите коэффициенты A и B.

$A =$ ☐ *, $B =$ ☐ *

Решите уравнение

$$y'' - y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

17. Фундаментальная система решений этого уравнения имеет вид

- ☐ $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$
- ☐ $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$
- ☐ $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$
- ☐ $y_1 = 1$, $y_2 = 2$

18. Определитель Вронского фундаментальной системы решений равен

☐ 1 ☐ e^x ☐ 2 ☐ $\sin x$

Решение уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2.$$

19. Функция $C_1(x)$ равна

- [ ] $\sqrt{1-e^{2x}}+\widetilde{C}_1$
- [ ] $e^{2x}+\widetilde{C}_1$
- [ ] $x\sin x+\widetilde{C}_1$
- [ ] $e^{x}+\widetilde{C}_1$

20. Функция $C_2(x)$ равна

- [ ] $e^{x}+\widetilde{C}_2$
- [ ] $\operatorname{arctg} e^{x}+\widetilde{C}_2$
- [ ] $\cos x+\widetilde{C}_2$
- [ ] $\arcsin e^{x}+\widetilde{C}_2$

Clear

Глава 8

Ряды

8.1. Числовые ряды
8.2. Функциональные и степенные ряды

8.1. Числовые ряды

Начало теста (Инструкции).

1. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, если

☐ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$

2. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда

☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

3. Пусть выполняется условие

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

1) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится;

2) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится;

3) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Укажите все верные утверждения.

☐ 1) ☐ 2) ☐ 3) ☐ 1) и 3) ☐ 1) и 2)

4. Пусть $q = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Согласно признаку Даламбера для сходимости ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ достаточно выполнения условия

☐ $q > 1$ ☐ $q < 1$ ☐ $q = 1$ ☐ $q = \infty$

5. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ сходится, если

☐ $\alpha > 1$ ☐ $\alpha < 1$ ☐ $\alpha = 1$ ☐ $\alpha = 0$

6. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ сходится при всех

☐ $\alpha > 1$ ☐ $\alpha > 0$ ☐ $\alpha < 1$ ☐ $\alpha < 0$

и расходится при остальных значениях α.

7. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2}$

☐ сходится ☐ расходится

8. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{2}$

☐ расходится ☐ сходится абсолютно ☐ сходится условно

9. Найдите суму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$.

$S =$ ☐ *

10. Найдите суму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

$S =$ *

11. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n^2-2)}$

сходится расходится

12. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^2}$

сходится расходится

13. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n}$

сходится расходится

14. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{n!}$

сходится расходится

15. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+3}{2n-1}\right)^n$

сходится расходится

16. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$

сходится расходится

17. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

сходится расходится

18. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

☐ сходится абсолютно ☐ сходится условно ☐ расходится

19. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

☐ сходится абсолютно ☐ сходится условно ☐ расходится

20. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{5n+3}$

☐ сходится абсолютно ☐ сходится условно ☐ расходится

Clear

8.2. Функциональные и степенные ряды

Начало теста (Инструкции).

1. Областью сходимости функционального ряда $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ является множество

☐ $(-1;1)$ ☐ $[-1;1]$ ☐ $(-\infty;+\infty)$ ☐ $\varnothing$

2. Из указанных функциональных рядов степенным является ряд

☐ $\sum_{n=0}^{\infty} \ln^n x$ ☐ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{x^n}$ ☐ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$ ☐ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}}}{n+1}$

3. Из указанных множеств выберите то, которое не может являтся областью сходимости степенного ряда

☐ $[-6;2)$ ☐ $(0;1)\cup(2;3)$ ☐ $\{0\}$ ☐ $(-\infty;+\infty)$

4. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в точке $x=2$. Тогда в точке $x=\frac{3}{2}$ этот ряд

☐ сходится ☐ расходится

5. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ представляет собой разложение в ряд Маклорена функции

☐ e^x ☐ $\ln(1+x)$ ☐ $\sin x$ ☐ $\cos x$

6. Найдите радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+5}}$.

$R =$ ☐ *

7. Найдите радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 3^n}$.

$R =$ *

8. Найдите радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n x^n$.

$R =$ *

9. Найдите интервал сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n n}{2^n}$.

(* ; *)

10. Найдите интервал сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n (x+2)^n$.

(* ; *)

11. Областью сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$ является множество

☐ $\{0\}$ ☐ $(-\infty; +\infty)$ ☐ $(-1; 1)$ ☐ $(-1; 1]$

12. Областью сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n+1}$ является множество

☐ 3 ☐ $(2; 4)$ ☐ $[2; 4)$ ☐ $(-1; 1)$

13. Областью сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ является множество

☐ $\{0\}$ ☐ $(-\infty; +\infty)$ ☐ $(-1; 1)$ ☐ $(-1; 1]$

14. Областью сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{n}$ является множество

☐ $(-1; 1)$ ☐ $(-1; 1]$ ☐ $[1; 3)$ ☐ $[1; 3]$

15. Областью сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ является множество

- ☐ $(0;1)$
- ☐ $(1;+\infty)$
- ☐ $(-\infty;0)$
- ☐ $(-1;1)$

16. Областью сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \lg^n x$ является множество

- ☐ $(0;10)$
- ☐ $(-\infty;10)$
- ☐ $(0,1;10)$
- ☐ $(0;10]$

17. Областью сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}}$ является множество

- ☐ $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$
- ☐ $(-\infty;-1)$
- ☐ $(1;+\infty)$
- ☐ $(-1;1)$

18. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ является рядом Маклорена функции $f(x)=x^2(x-1)$. Тогда

$c_4 =$ ☐ *

19. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ является рядом Маклорена функции $f(x)=xe^x$. Тогда

$c_3 =$ ☐ *

20. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n$ является рядом Тейлора функции $f(x)=\sqrt{x}$. Тогда

$c_2 =$ ☐ *

Clear